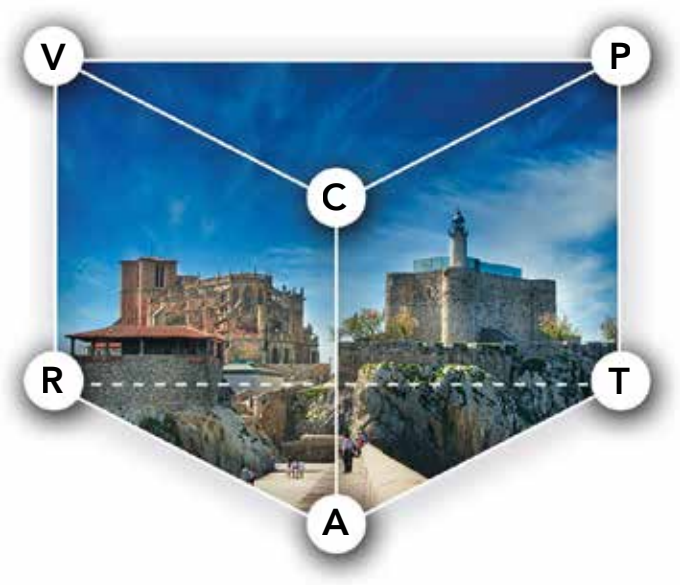
ETM8

Actas del Octavo Simposio sobre el Estudio del Trabajo Matemático

Actas ETM8 | Actes ETM8 | Proceedings ETM8



Steven Van Vaerenbergh, Laurent Vivier
Ferdinando Arzarello, Jesús Victoria Flores Salazar, Jorge Gaona Paredes, Patrick Gibel, Inés M. Gómez-Chacón, Alain Kuzniak, Michela Maschietto, Elizabeth Montoya Delgadillo, Assia Nechache, Konstantinos Nikolantonakis, Rosa Elvira Páez Murillo, Philippe R. Richard, M. Pilar Vélez, Fabienne Venant
(editores)

21-25 de octubre 2024
Castro Urdiales, España

Editorial Universidad Cantabria

Steven Van Vaerenbergh es Profesor Titular de Universidad en el área de Didáctica de la Matemática en la Universidad de Cantabria. Su investigación se centra en la formación del profesorado de matemáticas, la atención a la diversidad y el uso de entornos tecnológicos para el desarrollo de metodologías de aprendizaje adaptadas. Ha publicado más de 40 artículos en revistas científicas con revisión por pares y ha presentado más de 60 contribuciones en congresos internacionales. Ha participado en diversos proyectos de investigación y transferencia y colabora activamente en comités científicos internacionales.

Laurent Vivier es profesor de Didáctica de la Matemática en la Universidad Paris Cité. Doctor en Matemáticas por la Universidad de Tours y con Habilitación para Dirigir Investigaciones (HDR) en Didáctica de la Matemática, ha desarrollado una intensa actividad investigadora y de formación doctoral, dirigiendo diez tesis doctorales y participando en numerosos tribunales internacionales. Colabora activamente en proyectos de investigación con instituciones de Chile, Canadá, España, México y Perú. Ha desempeñado responsabilidades científicas en múltiples congresos internacionales y es editor jefe de la revista *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*. Ha realizado aportaciones a la Teoría de los Espacios de Trabajo Matemático.

Actas / Actes / Proceedings

Octavo Simposio sobre el Estudio del Trabajo Matemático
Huitième Symposium d'Étude sur le Travail Mathématique
Eighth Symposium on the Study of Mathematical Work

Colección Difunde # 282

Consejo Editorial

D. Luigi dell'Olio
Presidente. Vicerrector de Investigación, Transferencia y Doctorado, Universidad de Cantabria

D. Miguel Ángel Bringas Gutiérrez
Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales, Universidad de Cantabria

Berta Casar Martínez
Instituto de Biomedicina y Biotecnología de Cantabria (IBBTEC), Universidad de Cantabria

Dña. Macarena García-Avello Fernández-Cueto
Facultad de Educación, Universidad de Cantabria

D. Guillelmo Gómez-Ceballos
Instituto Tecnológico de Massachusetts (MIT)

D. Carlos Marichal Salinas
Centro de Estudios Históricos de El Colegio de México

D. Marcelo Norberto Rougier
Historia Económica y Social Argentina, UBA y CONICET (IIEP)

D. Jónatan Piedra Gómez
Instituto de Física de Cantabria (IFCA), Universidad de Cantabria-CSIC

D. Luis Sánchez González
Ingeniería de Comunicaciones (DICOM), Universidad de Cantabria

D. Jorge Luis Tomillo Urbina
Facultad de Derecho (SANFI), Universidad de Cantabria

Dña. Sofía Torallas Tovar
Escuela de Estudios Históricos del Instituto de Estudios Avanzados, Princeton University

Dña. Eva María Velasco Gil
Centro Oceanográfico de Santander, Instituto Español de Oceanografía

D. Aurelio Velázquez Hernández
Facultad de Filosofía y Letras, Universidad de Cantabria

Dña. Belmar Gándara Sancho
Directora Editorial, Universidad de Cantabria

Actas / Actes / Proceedings

Octavo Simposio sobre el Estudio del Trabajo Matemático
Huitième Symposium d'Étude sur le Travail Mathématique
Eighth Symposium on the Study of Mathematical Work

Steven Van Vaerenbergh
Laurent Vivier
Ferdinando Arzarello
Jesús Victoria Flores Salazar
Jorge Gaona Paredes
Patrick Gibel
Inés M. Gómez-Chacón
Alain Kuzniak
Michela Maschietto
Elizabeth Montoya Delgadillo
Assia Nechache
Konstantinos Nikolantonakis
Rosa Elvira Páez Murillo
Philippe R. Richard
M. Pilar Vélez
Fabienne Venant
(editores)

Editorial Universidad Cantabria

Simposio sobre el Estudio del Trabajo Matemático (8º : 2024 : Castro Urdiales), autor

ETM8 : actas del octavo Simposio sobre el Estudio del Trabajo Matemático : actas ETM8 = actes ETM8 = proceedings ETM8 : 21-25 de octubre 2024, Castro Urdiales, España / Steven Van Vaerenbergh, Laurent Vivier [y otros catorce] (editores). – Santander : Editorial de la Universidad de Cantabria, 2026.

589 páginas : ilustraciones. – (Difunde ; 282)

Textos en español, francés e inglés.

ISBN 978-84-19897-40-4

1. Matemáticas-Didáctica-Congresos. I. Van Vaerenbergh, Steven, editor de compilación. II. Vivier, Laurent, editor de compilación. III. Octavo Simposio sobre el Estudio del Trabajo Matemático. IV. Huitième Symposium d'Étude sur le Travail Mathématique. V. Eighth Symposium on the Study of Mathematical Work.

51:37.02(063)

THEMA: YPM, PB, UYQ, GT, 4C

Esta edición es propiedad de la Editorial de la Universidad de Cantabria, cualquier forma de reproducción, distribución, traducción, comunicación pública o transformación sólo puede ser realizada con la autorización de sus titulares, salvo excepción prevista por la ley. Diríjase a CEDRO (Centro Español de Derechos Reprográficos, www.cedro.org) si necesita fotocopiar o escanear algún fragmento de esta obra.

Digitalización: Manuel Ángel Ortiz Velasco [emeaov]

© Editores: Steven Van Vaerenbergh [Universidad de Cantabria], Laurent Vivier [Université Paris Cité], Ferdinando Arzarello [Università di Torino], Jesús Victoria Flores Salazar [Pontificia Universidad Católica del Perú], Jorge Gaona Paredes [Universidad de Playa Ancha], Patrick Gibel [Université de Bordeaux], Inés M. Gómez-Chacón [Universidad Complutense de Madrid], Alain Kuzniak [Université de Paris Cité], Michela Maschietto [Università degli Studi di Modena e Reggio Emilia], Elizabeth Montoya Delgadillo [Pontificia Universidad Católica de Valparaíso], Assia Nechache [CY Cergy Paris Université], Konstantinos Nikolantonakis [University of Western Macedonia], Rosa Elvira Páez Murillo [Universidad Autónoma de la Ciudad de México], Philippe R. Richard [Université de Montréal], M. Pilar Vélez [Universidad Nebrija], Fabienne Venant [Université du Québec à Montréal]

© Autores

© Editorial de la Universidad de Cantabria
Avda. de los Castros, s/n - 39005 Santander. Cantabria (España)
Tfno.: +34 942 201 087
ISNI: 0000 0005 0686 0180
www.editorial.unican.es

ISBN: 978-84-19897-40-4 (PDF)

DOI: https://doi.org/10.22429/Euc2026.005

Hecho en España-*Made in Spain*

Santander, 2026

Índice / Table des Matières / Table of Contents

INTRODUCCIÓN **13**

INTRODUCTION **17**

INTRODUCTION **21**

L'INTELLIGENCE ARTIFICIELLE ET LE NOUVEAU TRAVAIL MATHÉMATIQUE **25**
Philippe R. Richard, Steven Van Vaerenbergh

THÈME 1 : PERSPECTIVES ET APPROCHES THÉORIQUES SUR LE TRAVAIL MATHÉMATIQUE **63**
Assia Nechache, Patrick Gibel

TEMA 1: PERSPECTIVAS Y ENFOQUES TEÓRICOS SOBRE EL TRABAJO MATEMÁTICO **67**
Assia Nechache, Patrick Gibel

Espacio de trabajo estadístico y el paradigma *E1*: nuevas perspectivas didácticas **71**
Pedro Vidal-Szabó

L'évolution de l'ETM probabiliste de référence au cours de l'enseignement secondaire en France **85**
Assia Nechache, Bernard Parzysz

Qualité et valeur du travail mathématique des étudiants à travers le regard de la théorie des ETM : la perspective du chercheur **97**
Alain Kuzniak, Assia Nechache

Implementación de un diseño didáctico para introducir la integral definida en estudiantes de ingeniería desde dos perspectivas teóricas: ETM y TAD **111**
Pilar Carrasco Espinoza, Katherine Machuca Pérez

Paradigmes de l'algèbre élémentaire pour l'étude du travail mathématique exemples significatifs **123**
Philippe Hoppenot

Visualizaciones, construcciones: ¿de qué actividades matemáticas se trata? Límites de funciones en 1er año de universidad **137**
Fabrice Vandebrouck, Macarena Flores González

Vers l'ETM de référence en nombres et géométrie : le cas du système éducatif costaricien **147**
Norma Segura-Corella

Conceptualized mathematical work **159**
Alejandro Cabrera, Elizabeth Montoya, Fabrice Vandebrouck, Laurent Vivier

TEMA 2. ESTUDIO DE LOS SIGNOS, LAS HERRAMIENTAS Y EL DISCURSO, Y DE LA EVOLUCIÓN DINÁMICA DE SUS INTERACCIONES MUTUAS EN EL TRABAJO MATEMÁTICO 173
Michela Maschietto, Ferdinando Arzarello, Jorge Gaona, Rosa Elvira Páez Murillo

THÈME 2. ÉTUDE DES SIGNES, DES OUTILS ET DU DISCOURS, ET DE L'ÉVOLUTION DYNAMIQUE DE LEURS INTERACTIONS MUTUELLES DANS LE TRAVAIL MATHÉMATIQUE 181
Michela Maschietto, Ferdinando Arzarello, Jorge Gaona, Rosa Elvira Páez Murillo

Espacio de trabajo matemático personal de profesores de matemática en formación inicial ante el estudio de la geometría 3D mediante el uso de artefactos tecnológicos 189
Fabiola Arévalo-Meneses, Elizabeth Montoya-Delgadillo

Sessions de laboratoire avec les machines mathématiques pour les transformations géométriques au collège 201
Beatrice Battilani, Michela Maschietto

Contrepoint technologique et contrôle du référentiel dans le travail mathématique instrumenté 213
Eloï Danguy-Pichette, Philippe R. Richard

Tâches ouvertes dans un environnement numérique pour le développement de l'ETM collectif 227
Jorge Gaona, Catalina Palacios Bezama, Leonard Sánchez

Émergence de l'art de l'argumentation : l'instrumentation de l'IA dans la formation des enseignants de mathématiques 239
Itziar García-Honrado, Josep Maria Fortuny-Aymemi, Tomás Recio, Philippe R. Richard

De la page au code : comment explorer les récits issus de la littérature de jeunesse à travers la lentille mathématique et littéraire, de la théorie des graphes à l'algorithmique créative 251
Dominique Laval

El estudio de la relación funcional entre recorrido y distancia, en un contexto de manipulación con artefactos materiales 265
Rosa-Elvira Páez, Miguel Delgado, Judith Hernández, Magally Martínez

Analyse d'une ingénierie didactique articulant activités mathématiques et algorithmiques - étude des formes et fonctions des raisonnements des élèves 277
Maryna Rafalska, Patrick Gibel

TEMA 3: GÉNESIS Y DESARROLLO DEL TRABAJO MATEMÁTICO: PAPEL DEL PROFESOR, DEL FORMADOR, DEL GRUPO Y DE LAS INTERACCIONES 291
Inés M. Gómez-Chacón, Fabienne Venant, Laurent Vivier

THÈME 3 : GENÈSE ET DÉVELOPPEMENT DU TRAVAIL MATHÉMATIQUE : RÔLE DE L'ENSEIGNANT, DU FORMATEUR, DU COLLECTIF ET DES INTERACTIONS 297
Inés M. Gómez-Chacón, Fabienne Venant, Laurent Vivier

ETM et action didactique conjointe : regards croisés sur l'enseignant intégrant une tâche de programmation informatique en classe de mathématiques 303
Fabienne Venant, Michèle Couderette

ETM idóneo potencial y conocimiento especializado en el diseño de propuestas de enseñanza en la formación inicial 315
Paula Verdugo-Hernández, Carolina Henríquez-Rivas, Gonzalo Espinoza-Vásquez, Nuria Climent

Conocimientos teóricos y prácticos en el espacio de trabajo matemático idóneo bajo instancias colaborativas de la tríada formativa con uso de la calculadora 327
Romina Menares Espinoza, Laurent Vivier

Travail mathématique des élèves et développement de connaissances didactiques de professeurs de mathématiques débutants 339
Christine Choquet

Examination of mathematical work performed in mathematical modeling task in the light of MWS: the case of pre-service elementary mathematics teachers 349
Ozan Deniz Kiyici, Filiz Tuba Dikkartin Övez

Amener les élèves à problématiser en mathématiques : enjeux et limites 363
Sylvie Grau

ETM idóneo de un grupo de profesores en formación inicial en el dominio de la probabilidad 375
Katherine Machuca Pérez, Elizabeth Montoya Delgadillo

Interpretación del condicional por futuros profesores de educación primaria 387
Aránzazu Dolz, Inés M. Gómez-Chacón

Selección de tareas que fomentan diferentes tipos de significados y trabajo matemático para la función 399
Gonzalo Espinoza-Vásquez, Paula Verdugo-Hernández, Carolina Henríquez-Rivas, Nuria Climent

Investigating GAI's role in shaping mathematics work and identity within a university didactic system 411
Annamaria Miranda

Designing situations to develop mathematical flexibility and identify students' emotions 425
Mónica Arnal-Palacián, Nuria Begué, Mónica Marbán

Enrichir collectivement les ETM idoines, une expérimentation de type lesson study sur 3 ans 429
Nicolas Grenier-Boley, Blandine Masselin, Laurent Vivier, Jordan Martin, Caroline Beaudet

Genèse d'un ETM idoine de formation original sur le nombre pour de futurs professeurs d'écoles 433
Konstandinos Nikolantonakis, Florence Peteers, Laurent Vivier

THÈME 4 : LE RÔLE DES TÂCHES ET DES SITUATIONS DIDACTIQUES DANS LA FORMATION DU TRAVAIL MATHÉMATIQUE 437
Alain Kuzniak, Kostas Nikolantonakis, Elizabeth Montoya Delgadillo, Jesús Flores Salazar

TOPIC 4. ROLE OF TASKS AND DIDACTIC SITUATIONS IN THE CONSTRUCTION OF MATHEMATICAL WORK 441
Alain Kuzniak, Kostas Nikolantonakis, Elizabeth Montoya Delgadillo, Jesús Flores Salazar

TEMA 4. EL PAPEL DE LAS TAREAS Y SITUACIONES DIDÁCTICAS EN LA FORMACIÓN DEL TRABAJO MATEMÁTICO 445
Alain Kuzniak, Kostas Nikolantonakis, Elizabeth Montoya Delgadillo, Jesús Flores Salazar

Diseño de situaciones didácticas: una reflexión en el dominio de la probabilidad 449
Katherine Machuca Pérez, Elizabeth Montoya Delgadillo

Description d'issues équiprobables et introduction en classe de la loi binomiale 461
Jannick Trunkenwald

The inverse function under the prism of the Mathematical Working Space model 473
Kostas Nikolantonakis, Elisavet Gemenetzi

La derivada y sus conexiones en contextos económicos, desde el espacio de trabajo matemático 485
Flor Isabel Carrillo Lara

Análisis del trabajo matemático de estudiantes de primaria a partir de una tarea abierta sobre funciones en un entorno tecnológico 497
Catalina Palacios Bezama, Jorge Gaona Paredes

Conception d'une tâche géométrique pour amorcer le développement du raisonnement déductif d'élèves de 6e année du primaire au Québec : analyse d'un ETM idoine potentiel 509
Sandrine Michot

Tareas emblemáticas adecuadas: estudio de las características para su diseño 521
Darlis Panqueban, Carolina Henríquez-Rivas

Similitude, histoire des mathématiques et espace de travail mathématique en géométrie personnelle des élèves du collège 533
Konstantinos Nikolantonakis, Polymnia Andreadou

Tareas sobre semejanza de figuras planas en libros de texto con uso de tecnología: ¿qué trabajo matemático propician? 547
Denisse Avilés-Henn, Carolina Henríquez-Rivas

Résolutions d'équations du premier degré en IUT GEII - enrichir l'ETM personnel des étudiants 561
Philippe Hoppenot

Étude des variations de contrats fortement didactiques dans des ETM idoines autour de « l'aire de baignade » 575
Alain Kuzniak, Blandine Masselin

INTRODUCCIÓN

El Octavo Simposio sobre el Estudio del Trabajo Matemático (ETM8) se celebró en Castro Urdiales (España) del 21 al 25 de octubre de 2024. Reunió a una amplia comunidad internacional de investigadores interesados en el estudio del trabajo matemático y sus implicaciones en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

Los simposios ETM son encuentros internacionales organizados en forma de grupos de trabajo temáticos basados en las contribuciones de los participantes. La dinámica establecida en el simposio favorece intercambios entre los participantes y contribuye a crear una comunidad de investigadores alrededor de intereses comunes. Además, los encuentros se desarrollan en un marco trilingüe dentro del cual las contribuciones se pueden presentar en cualquiera de las tres lenguas (español, francés e inglés) y deben ir acompañadas de material visual elaborado en una de las otras lenguas.

Desde 2009, los simposios ETM se han celebrado en distintas sedes internacionales: Nicosia (2009), París (2010), Montreal (2012), San Lorenzo de El Escorial (2014), Florina (2016), Valparaíso (2018) y Estrasburgo (2022). A lo largo de esta trayectoria, los objetivos del simposio han evolucionado desde el estudio de la noción de Espacio de Trabajo Matemático, pasando por la profundización en el trabajo matemático y la ampliación de perspectivas, hasta el estudio del rol de la investigación en el aprendizaje y enseñanza de las matemáticas en relación con el trabajo matemático, contribuyendo así a consolidar una comunidad internacional.

El ETM8 se organizó en torno a los siguientes cuatro temas:

- Tema 1. Perspectivas y enfoques teóricos sobre el trabajo matemático.
- Tema 2. Estudio de los signos, las herramientas y el discurso, y de la evolución dinámica de sus interacciones mutuas en el trabajo matemático.
- Tema 3. Génesis y desarrollo del trabajo matemático: papel del profesor, del formador, del grupo y de las interacciones.
- Tema 4. El papel de las tareas y situaciones didácticas en la formación del trabajo matemático.

Cada tema se desarrolló por un grupo temático, a lo largo de cinco días.

El simposio contó con varias actividades plenarias, comenzando con la conferencia de apertura "*La IA y el Nuevo Trabajo Matemático*", a cargo de Philippe R. Richard y Steven Van Vaerenbergh, que permitió situar el ETM8 en el contexto de las transformaciones actuales del trabajo matemático en entornos digitales. El segundo día se desarrolló una sesión plenaria titulada "*Avances y perspectivas en la investigación sobre los Espacios de Trabajo Matemáticos*" a cargo de Alain Kuzniak y Darlis Panqueban, y una plenaria dedicada a los proyectos que se vienen realizando dentro del trabajo matemático en los distintos países participantes.

También, el programa incluyó tres talleres que permitieron vincular la teoría con la práctica:

- Taller 1: "*Paseos Matemáticos con GeoGebra Discovery y MathCityMap*" impartido por Tomás Recio.
- Taller 2: "*Trabajo matemático en álgebra lineal con tecnología digita*l" impartido por Jorge Gaona, Romina Menares, Elizabeth Montoya, Fabrice Vandebrouck y Laurent Vivier.
- Taller 3: "*GeoGebra Discovery vs ChatGPT*" impartido por M. Pilar Vélez.

Además, tuvo lugar una sesión inter-temática que reunió a los participantes de los cuatro temas para abordar cuestiones transversales, así como una sesión de pósteres en la que los participantes presentaron y discutieron trabajos en desarrollo.

El simposio reunió a 44 participantes procedentes de una amplia variedad de países. Europa estuvo representada por España, Francia, Italia, Grecia y Turquía; América del Norte contó con la participación de Canadá, y América Latina estuvo representada con la participación de investigadores de Chile, México y Perú.

Entre las actividades desarrolladas se incluyó una visita cultural a dos enclaves significativos de Castro Urdiales: la Iglesia de Santa María de la Asunción y el castillo-faro. Asimismo, se llevó a cabo una sesión pública de divulgación matemática, titulada "*Una muestra del Festival de Matemáticas*", en el Edificio La Residencia. A través de una selección de juegos y experiencias del kit didáctico del Festival de Matemáticas de Chile, los ponentes acercaron la matemática al público general mediante juegos, puzles y materiales manipulativos.

El Comité Organizador desea expresar su agradecimiento a las instituciones que han prestado su apoyo a este simposio. En primer lugar, agradecemos al CIEM (Centro Internacional de Encuentros Matemáticos) por acoger el encuentro y facilitar su desarrollo. Reconocemos igualmente el apoyo ofrecido por la Universidad de Cantabria, la Universidad Nebrija, la Universidad Complutense de Madrid, el Instituto de Matemáticas Interdisciplinar (IMI) y el Ayuntamiento de Castro Urdiales, cuya colaboración ha sido fundamental para llevar a cabo las distintas actividades.

Nuestro agradecimiento se dirige también al Comité Científico y a las personas que actuaron como revisores, por su dedicación en la evaluación de las contribuciones y por la calidad de sus observaciones. Agradecemos igualmente a todos los participantes, cuyo compromiso y trabajo han contribuido de manera decisiva al desarrollo científico y académico del ETM8.

La próxima edición del simposio, ETM9, se realizará en junio de 2026 en la Ciudad de México.

El Comité Organizador del ETM8

Steven Van Vaerenbergh, M. Pilar Vélez e Inés M. Gómez-Chacón

Los participantes del Simposio ETM8 de Castro Urdiales

Sesión de apertura del Simposio ETM8

Sesión pública de divulgación matemática “Una muestra del Festival de Matemáticas”

INTRODUCTION

Le Huitième Symposium d'Étude sur le Travail Mathématique (ETM8) s'est tenu à Castro Urdiales (Espagne) du 21 au 25 octobre 2024. Il a réuni une large communauté internationale de chercheurs intéressés par l'étude du travail mathématique et par ses implications pour l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques.

Les symposiums ETM sont des rencontres internationales organisées sous la forme de groupes de travail thématiques fondés sur les contributions des participants. La dynamique instaurée au sein du symposium favorise les échanges entre les participants et contribue à créer une communauté de chercheurs autour d'intérêts communs. De plus, les rencontres se déroulent dans un cadre trilingue au sein duquel les contributions peuvent être présentées dans l'une des trois langues (espagnol, français ou anglais) et doivent être accompagnées d'un support visuel élaboré dans l'une des autres langues.

Depuis 2009, les symposiums ETM se sont tenus dans différentes villes internationales : Nicosie (2009), Paris (2010), Montréal (2012), San Lorenzo de El Escorial (2014), Florina (2016), Valparaíso (2018) et Strasbourg (2022). Tout au long de ce parcours, les objectifs du symposium ont évolué : de l'étude de la notion d'Espace de Travail Mathématique, en passant par l'approfondissement du travail mathématique et l'élargissement des perspectives, jusqu'à l'étude du rôle de la recherche dans l'apprentissage et l'enseignement des mathématiques en relation avec le travail mathématique, contribuant ainsi à la consolidation d'une communauté internationale.

L'ETM8 a été structuré autour des quatre thèmes suivants :

- Thème 1. Perspectives et approches théoriques sur le travail mathématique.
- Thème 2. Étude des signes, des outils et du discours, et de l'évolution dynamique de leurs interactions mutuelles dans le travail mathématique.
- Thème 3. Genèse et développement du travail mathématique : rôle de l'enseignant, du formateur, du collectif et des interactions.
- Thème 4. Le rôle des tâches et des situations didactiques dans la formation du travail mathématique.

Chaque thème a été développé par un groupe thématique au long des cinq jours du symposium.

Le symposium a comporté plusieurs activités plénières, en commençant par la conférence d'ouverture « *L'IA et le Nouveau Travail Mathématique* », donnée par Philippe R. Richard et Steven Van Vaerenbergh, qui a permis de situer l'ETM8 dans le contexte des transformations actuelles du travail mathématique dans des environnements numériques. Le deuxième jour, une séance plénière intitulée « *Avancées et perspectives de la recherche sur les Espaces de Travail Mathématiques* », présentée par Alain Kuzniak et Darlis Panqueban, a eu lieu, ainsi qu'une plénière consacrée aux projets menés dans le cadre du travail mathématique dans les différents pays participants.

Le programme comprenait également trois ateliers qui ont permis de relier la théorie à la pratique :

- Atelier 1 : « *Promenades mathématiques avec GeoGebra Discovery et MathCityMap* » animé par Tomás Recio.
- Atelier 2 : « *Travail mathématique en algèbre linéaire avec la technologie numérique* » animé par Jorge Gaona, Romina Menares, Elizabeth Montoya, Fabrice Vandebrouck et Laurent Vivier.
- Atelier 3 : « *GeoGebra Discovery vs ChatGPT* » animé par M. Pilar Vélez.

De plus, une séance inter-thématique a réuni les participants des quatre thèmes afin d'aborder des questions transversales, ainsi qu'une session de posters au cours de laquelle les participants ont présenté et discuté des travaux en cours.

Le symposium a réuni 44 participants provenant d'un large éventail de pays. L'Europe était représentée par l'Espagne, la France, l'Italie, la Grèce et la Turquie ; l'Amérique du Nord par le Canada ; et l'Amérique latine par des chercheurs du Chili, du Mexique et du Pérou.

Parmi les activités organisées figurait une visite culturelle de deux sites emblématiques de Castro Urdiales : l'église Santa María de la Asunción et le château-phare. Une séance publique de diffusion des mathématiques, intitulée « Un aperçu du Festival des Mathématiques », a également été organisée dans le bâtiment La Residencia. À travers une sélection de jeux et d'expériences issus du kit pédagogique du Festival de Mathématiques du Chili, les intervenants ont rapproché les mathématiques du grand public au moyen de jeux, de puzzles et de matériels manipulables.

Le Comité d'Organisation souhaite exprimer sa gratitude envers les institutions qui ont apporté leur soutien à ce symposium. Nous remercions en premier lieu le CIEM (Centro Internacional de Encuentros Matemáticos) pour avoir accueilli la rencontre et facilité son déroulement. Nous reconnaissons également le soutien apporté par la Universidad de Cantabria, la Universidad Nebrija, la Universidad Complutense de Madrid, l'Institut de Matemáticas Interdisciplinar (IMI) et la Mairie de Castro Urdiales, dont la collaboration a été essentielle à la réalisation des différentes activités.

Nos remerciements s'adressent aussi au Comité Scientifique et aux personnes ayant agi comme relecteurs, pour leur dévouement dans l'évaluation des contributions et pour la qualité de leurs observations. Nous remercions également l'ensemble des participants, dont l'engagement et le travail ont contribué de manière décisive au développement scientifique et académique de l'ETM8.

La prochaine édition du symposium, ETM9, se tiendra en juin 2026 dans la ville de Mexico.

Le Comité d'Organisation de l'ETM8

Steven Van Vaerenbergh, M. Pilar Vélez et Inés M. Gómez-Chacón

Les participants du Symposium ETM8 de Castro Urdiales

Séance d'ouverture du Symposium ETM8

Séance publique de diffusion des mathématiques « Un aperçu du Festival des Mathématiques »

INTRODUCTION (ENGLISH VERSION)

The Eighth Symposium on the Study of Mathematical Work (ETM8) was held in Castro Urdiales (Spain) from October 21 to 25, 2024. It brought together a broad international community of researchers interested in the study of mathematical work and its implications for the teaching and learning of mathematics.

ETM symposia are international meetings organized around thematic working groups based on participants' contributions. The structure established within the symposium fosters exchange among participants and helps build a research community around shared interests. The meetings take place in a trilingual environment in which contributions may be presented in any of the three languages (Spanish, French, and English) and must be accompanied by visual material prepared in one of the other languages.

Since 2009, the ETM symposia have been held in various international locations: Nicosia (2009), Paris (2010), Montreal (2012), San Lorenzo de El Escorial (2014), Florina (2016), Valparaíso (2018), and Strasbourg (2022). Over this trajectory, the objectives of the symposium have evolved, from the study of the notion of the Mathematical Working Space, through a deepening of the analysis of mathematical work and a broadening of perspectives, to the examination of the role of research in the learning and teaching of mathematics in relation to mathematical work, thus contributing to the consolidation of an international community.

ETM8 was organized around the following four topics:

- Topic 1. Theoretical perspectives and approaches to mathematical work.
- Topic 2. The study of signs, tools, and discourse, and the dynamic evolution of their mutual interactions in mathematical work.
- Topic 3. Genesis and development of mathematical work: role of the teacher, the trainer, the group, and interactions.
- Topic 4. The role of tasks and didactic situations in shaping mathematical work.

Each topic was developed by a thematic working group over the course of five days.

The symposium included several plenary activities, beginning with the opening lecture, "*AI and the New Mathematical Work*," delivered by Philippe R. Richard and Steven Van Vaerenbergh, which situated ETM8 within the context of current transformations in mathematical work in digital environments. On the second day, a plenary session titled "*Advances and Perspectives in Research on Mathematical Working Spaces*," led by Alain Kuzniak and Darlis Panqueban, was held, followed by another plenary dedicated to ongoing projects related to mathematical work in the participating countries.

The programme also featured three workshops that provided opportunities to connect theory with practice:

- Workshop 1: "*Mathematical Walks with GeoGebra Discovery and MathCityMap*," given by Tomás Recio.
- Workshop 2: "*Mathematical Work in Linear Algebra with Digital Technology*," given by Jorge Gaona, Romina Menares, Elizabeth Montoya, Fabrice Vandebrouck, and Laurent Vivier.
- Workshop 3: "*GeoGebra Discovery vs ChatGPT*," led by M. Pilar Vélez.

In addition, an inter-topic session brought together participants from all four topics to address transversal questions, as well as a poster session in which participants presented and discussed works in progress.

The symposium brought together 44 participants from a wide range of countries. Europe was represented by Spain, France, Italy, Greece, and Türkiye; North America by Canada; and Latin America by researchers from Chile, Mexico, and Peru.

Among the activities offered was a cultural visit to two significant landmarks in Castro Urdiales: the Church of Santa María de la Asunción and the castle-lighthouse. A public mathematical outreach session was also held, titled "A Sample of the Mathematics Festival," in the La Residencia building. Through a selection of games and activities from the educational kit of the Chilean Mathematics Festival, the presenters brought mathematics closer to the general public through games, puzzles, and hands-on materials.

The Organizing Committee wishes to express its gratitude to the institutions that supported this symposium. We first thank the CIEM (Centro Internacional de Encuentros Matemáticos) for hosting the meeting and facilitating its development. We also acknowledge the support provided by the Universidad de Cantabria, Universidad Nebrija, Universidad Complutense de Madrid, the Instituto de Matemáticas Interdisciplinar (IMI), and the City of Castro Urdiales, whose collaboration was essential for carrying out the various activities.

Our appreciation is also extended to the Scientific Committee and to those who served as reviewers, for their dedication in evaluating the contributions and for the quality of their feedback. We likewise thank all participants, whose commitment and work contributed decisively to the scientific and academic development of ETM8.

The next edition of the symposium, ETM9, will take place in June 2026 in Mexico City.

The ETM8 Organizing Committee

Steven Van Vaerenbergh, M. Pilar Vélez, and Inés M. Gómez-Chacón

Participants of the ETM8 Symposium in Castro Urdiales

Opening session of the ETM8 Symposium

Public mathematical outreach session: “A Sample of the Mathematics Festival”

L'INTELLIGENCE ARTIFICIELLE ET LE NOUVEAU TRAVAIL MATHÉMATIQUE

Philippe R. Richard[*], Steven Van Vaerenbergh[**]

[*]Université de Montréal, [**]Universidad de Cantabria

Dans cet article, nous explorons les transformations du travail mathématique à l'ère des technologies numériques, en abordant la théorie des espaces de travail mathématique (ThETM). Nous mettons en lumière le contrepoint technologique entre l'humain et la machine, en examinant les tensions liées à l'intégration de l'intelligence artificielle dans la pratique mathématique. À partir d'exemples concrets, nous montrons comment les artefacts numériques modifient l'exploration, la modélisation et la validation, tout en soulevant des enjeux didactiques et cognitifs. Enfin, nous soulignons la nécessité d'un dialogue interdisciplinaire pour enrichir les dispositifs didactiques et améliorer les interactions dans les espaces de travail.

INTRODUCTION

Alors que les technologies numériques s'intègrent, d'une façon ou d'une autre, à l'enseignement des mathématiques depuis plus de quarante ans, l'émergence des nouveaux outils d'intelligence artificielle (IA) transforme profondément le travail mathématique, ouvrant de nouvelles perspectives tout en soulevant des défis majeurs. Bien que les approches symboliques et statistiques de l'IA, ainsi que les outils numériques, connaissent une croissance rapide, elles continuent de susciter des réticences, notamment en raison de la perception des mathématiques comme une activité fondamentalement humaine, intimement liée au langage et au raisonnement. Parallèlement, la généralisation des technologies numériques dans le quotidien des apprenants d'aujourd'hui impose une adaptation des pratiques éducatives. Cependant, cette évolution s'accompagne d'un manque de fondements épistémologiques solides et d'une compréhension approfondie des enjeux cognitifs liés au fonctionnement interne des artefacts numériques et à l'usage des mathématiques instrumentées.

Dans cet article, nous examinons comment le contrepoint technologique entre l'humain et la machine, ainsi que la coopération des approches symboliques et génératives de l'IA peuvent transformer la pratique des mathématiques et enrichir les interactions dans l'espace de travail. Pour mieux comprendre ces transformations, nous nous appuyons sur des notions telles que l'intelligence augmentée, l'idonéité et les effets de « boîte noire », qui permettent d'éclairer les dynamiques émergentes de ce nouveau travail mathématique dans un contexte de progrès technologiques rapides. Nous commençons par explorer le concept de nouveau travail mathématique, suivi d'une présentation sur la nature et les fondements de l'intelligence artificielle (IA). Ensuite, nous proposons une classification des systèmes d'IA pour l'enseignement des mathématiques et illustrons ces approches à travers des exemples concrets de travail mathématique avec l'IA. Enfin, nous concluons par un retour théorique et une synthèse des principales analyses développées.

1. VERS LE NOUVEAU TRAVAIL MATHÉMATIQUE

Le travail mathématique et la théorie des espaces de travail

Habituellement, le travail mathématique fait référence aux activités, processus et démarches impliqués dans la pratique des mathématiques, que ce soit par des élèves, des enseignants, ou des professionnels du domaine. Il englobe plusieurs dimensions, en commençant par :

- La résolution de problèmes, dans son sens traditionnel, de trouver des solutions à des questions mathématiques, qu'elles soient simples ou complexes, dans des contextes variés (réels ou abstraits).
- La modélisation, ou la traduction de situations réelles en termes mathématiques, en utilisant des concepts comme les équations, les fonctions, les graphiques, ou les figures, pour mieux comprendre et résoudre des problèmes.
- La démonstration et le raisonnement, c'est-à-dire l'utilisation d'arguments logiques et rigoureux pour prouver des propriétés (théorèmes) ou valider des conjectures. Cela peut inclure la construction de preuves formelles ou l'élaboration d'arguments basés sur des exemples et des contre-exemples.
- La représentation et la communication, car on sait que les mathématiques exigent l'utilisation de différents langages (symbolique, graphique, verbal) pour représenter des idées, ainsi que la capacité à communiquer ces idées clairement, tant à l'oral qu'à l'écrit.
- Les connaissances et les procédures, puisque faire des mathématiques c'est aussi mobiliser les concepts mathématiques acquis, tels que les opérations arithmétiques, les algorithmes, et les règles de calcul, pour les mettre en œuvre dans divers contextes.

Dans un cadre plus formel, le travail mathématique inclut la réflexion sur la nature même des mathématiques, sur leur évolution et sur leur articulation avec les autres disciplines. Dans un contexte scolaire, la notion de travail mathématique englobe, entre autres, le processus de transposition didactique — l'adaptation des savoirs mathématiques savants en savoirs enseignables, dotés d'une logique et d'une organisation propres, selon la théorie anthropologique du didactique (Chevallard, 1991) —, tout en exigeant une vigilance épistémologique, c'est-à-dire une attention constante à la validité des connaissances et des procédures, pour préserver leur cohérence avec les fondements des mathématiques dans les projets de formation.

La théorie des espaces de travail mathématique (ThETM) propose un cadre riche pour comprendre comment les processus cognitifs et épistémologiques s'articulent dans l'apprentissage des mathématiques, en soulignant l'importance de la coordination entre les trois genèses — discursive, sémiotique et instrumentale (Kuzniak, Montoya & Richard, 2022). Cette interaction dynamique montre que le travail mathématique ne se limite pas à des actions isolées, mais résulte d'une activité complexe et intégrée.

Le travail mathématique peut effectivement être conceptualisé comme l'interaction entre un sujet épistémique (celui qui apprend, enseigne ou produit des mathématiques) et un milieu épistémologique (le système dans lequel se développe l'activité mathématique). Mais, contrairement à une vision classique où le milieu serait un cadre statique, dans la perspective de la théorie des situations didactiques de Brousseau (1998), ce milieu joue un rôle dynamique et interactif.

Le sujet épistémique

Le sujet épistémique représente l'individu ou le collectif engagé dans une activité mathématique. Ce sujet mobilise des connaissances, des stratégies et des ressources pour interagir avec le milieu, mais aussi pour transformer ce milieu dans le cadre d'une situation donnée. Dans ce processus, l'idée de genèse ne se réduit pas à une simple adaptation à une situation nouvelle : elle intègre un apprentissage, permettant au sujet de développer de nouvelles connaissances, de reconfigurer ses schèmes d'action et d'enrichir la valeur épistémique associée à ces connaissances. Ainsi, le sujet, en apprenant ou en travaillant, est actif dans la construction de ses savoirs tout en consolidant leur validité au regard des fondements mathématiques.

Le milieu épistémologique

Le milieu, dans cette approche, est bien plus qu'un simple ensemble d'outils, de concepts et de représentations. Il agit comme un adversaire ou un coparticipant au processus d'apprentissage ou de travail mathématique. En effet, il oppose des contraintes, des réactions et des résistances qui amènent le sujet à ajuster ses hypothèses, à revoir ses stratégies et à repenser ses approches. Le milieu peut inclure :

- Les concepts mathématiques (théorèmes, définitions, propriétés) qui peuvent poser des défis et nécessiter d'être appropriés ou redécouverts par le sujet.
- Les problèmes ou tâches qui exigent une activité mathématique et suscitent des réponses ou des ajustements cognitifs appartenant à des projets plus larges.
- Les outils mathématiques, comme des algorithmes ou des représentations symboliques, qui font partie du système avec lequel le sujet interagit.

Le milieu désigne alors l'ensemble des éléments d'une situation qui interagissent avec l'élève ou sur lesquels l'élève agit. Dans la poursuite de la théorie des situations didactique, il s'agit d'un système antagoniste du sujet, qui le modélise lorsque celui-ci agit de manière rationnelle et en fonction de ses connaissances. En mathématiques, le milieu d'un concept est constitué des milieux des situations où ce concept intervient comme outil de résolution, par exemple, il peut être traditionnel, comme la feuille, la règle graduée et le compas dans le milieu de la géométrie plane euclidienne, ou numérique, à l'interface d'un logiciel de géométrie dynamique.

L’interaction dynamique

Le travail mathématique, dans ce cadre, se conçoit comme une interaction continue et dialectique entre le sujet et le milieu. Lorsque le sujet engage une procédure mathématique ou tente de résoudre un problème, il est en constante confrontation avec les réactions du milieu. Même un livre, bien que statique, peut sembler réagir au questionnement du sujet par la structuration des connaissances qu’il propose, reflet du travail de son auteur. Contrairement à un artefact numérique, c’est le sujet qui anime ici le milieu, mais les réponses qu’il obtient dépendent des contraintes et des possibilités offertes par cet objet : organisation des contenus, limites du support papier ou encore outils tels que le crayon ou la règle. Ces interactions, qu’elles soient directes ou médiées par la conception du milieu, amènent le sujet à revoir ses hypothèses ou à explorer de nouvelles voies.

Le milieu, en retour, ne reste pas inchangé : il se transforme en fonction des actions du sujet. Par exemple, lorsqu’un élève propose une solution à un problème, le milieu réagit par une validation ou une remise en question, générant une rétroaction qui influence la compréhension du sujet et le niveau épistémique de ses connaissances. De même, on peut lire une propriété dans un manuel une première fois, sans en percevoir pleinement la portée ou le lien avec les problèmes à venir, puis la relire avec un niveau épistémique plus élevé et une conviction renforcée, après avoir résolu ces problèmes. Ce jeu d’interactions entre le sujet et le milieu constitue le moteur de la construction progressive des savoirs mathématiques.

Un partenaire dans l’apprentissage

Dans cette optique, le milieu n’est pas simplement un cadre, mais un acteur dans le processus de construction des connaissances. Il agit en interaction constante avec le sujet, jouant un rôle fondamental dans la genèse des savoirs. Chaque action du sujet est interprétée et modifiée par les réponses du milieu, qui orientent à leur tour les prochaines actions du sujet.

Voir le travail mathématique comme une interaction entre un sujet épistémique et un milieu épistémologique met en lumière le caractère coopératif et dynamique de cette activité. Le milieu n’est pas une simple toile de fond, mais un partenaire actif qui contribue à la construction des connaissances mathématiques en posant des défis et en renvoyant des réponses, pour peu qu’il corresponde au questionnement du sujet. Ce processus bidirectionnel, où le sujet et le milieu s’influencent mutuellement, enrichit la compréhension de la manière dont les mathématiques sont apprises et produites.

Le nouveau travail mathématique

L’intégration d’artefacts numériques dans l’activité mathématique ne se limite pas à faciliter ou accélérer le travail existant, elle transforme la nature même de ce travail, en ouvrant de nouvelles perspectives pour la résolution de problèmes, l’exploration et l’apprentissage mathématique. L’instrumentation qui résulte de l’interaction humain-

machine peut générer de nouvelles formes de travail mathématique, par exemple sur le plan de :

- La dynamique des représentations ;
- L'automatisation des calculs et des raisonnements ;
- L'exploration et la conjecture ;
- La rétroaction immédiate et l'itération ;
- L'interaction entre artefacts et cognitions.

Le Nouveau Travail Mathématique (NTM), caractéristique de l'interaction émergente entre humains et artefacts numériques, englobe des activités transformées par l'automatisation, la visualisation dynamique et les retours interactifs. Il redéfinit les pratiques mathématiques en intégrant systématiquement les dimensions sémiotique, instrumentale et discursive, dans une « danse des genèses » où les interactions entre ces dimensions se complexifient (Flores Salazar, Gaona, & Richard, 2022 ; Richard, 2024b). Ces transformations produisent de nouveaux effets sur la modélisation, la démonstration, le raisonnement, la représentation, la communication, ainsi que sur les connaissances et les procédures, remettant en question le travail mathématique traditionnel tout en ouvrant des perspectives inédites. En voici deux exemples.

Exemples de NTM en géométrie

Il serait tentant de réduire l'idée du nouveau travail mathématique aux progrès rapides des logiciels, en le considérant uniquement comme une conséquence directe des nouvelles possibilités technologiques ou comme un simple produit de l'univers discret qui caractérise en grande partie l'informatique. Pourtant, dès qu'un artefact numérique s'invite dans l'espace de travail, il devient nécessaire de se demander si nous parlons des mêmes objets. Prenons l'exemple d'une figure dessinée sur papier comparée à une figure produite à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique. La figure sur papier structure des unités figurales, mais l'ordre de construction reste connu uniquement de l'auteur, et non du lecteur. Le discours peut parfois aider à révéler cet ordre, par exemple grâce à un protocole de construction, mais la figure demeure non ordonnée, laissant une liberté d'interprétation et la possibilité de dévoiler de nouvelles propriétés au fil des questionnements.

En revanche, dans un logiciel de géométrie dynamique, les unités figurales sont précisément définies les unes par rapport aux autres et liées selon une logique formelle et un ordre de construction explicite. Cette logique structure les propriétés représentées et a le potentiel de garantir leur préservation, notamment lors de déplacements ou d'autres mouvements. Il s'agit alors d'une figure ordonnée, où l'ordre de construction influe profondément sur le travail géométrique. Cela transforme non seulement l'appréhension de la figure en fonction des cas représentés, mais aussi son évolution sous l'effet des actions du sujet et du type de raisonnement qu'elle peut véhiculer (Coutat, Laborde & Richard, 2016). En mobilisant ses valences sémiotiques et instrumentales, elle conjugue la capacité à représenter et signifier des propriétés mathématiques avec des possibilités d'interaction et de manipulation, enrichissant ainsi

l'exploration et le raisonnement, ou les contraignant lorsque les propriétés que l'on souhaite représenter ou qui auraient pu se dévoiler demeurent éphémères, liées à un moment d'interaction précis.

Notre second exemple est tiré de Flores Salazar, Gaona, et Richard (2022). Lorsqu'une figure est construite en géométrie dynamique, elle se présente à la fois comme une représentation sémiotique et comme une situation pouvant être manipulée, paramétrée ou interrogée. Le contrôle des propriétés signifiantes résulte de l'interaction entre l'utilisateur et le milieu. Ainsi, dans GeoGebra, on distingue plusieurs types de figures : une *figure apparente* dans le module de construction géométrique, qui permet le déplacement ; une *figure paramétrable*, définie par la logique de la construction ; une *figure numérique*, sur laquelle certaines propriétés peuvent être vérifiées par échantillonnage ; et une *figure symbolique*, modélisée par l'algèbre, capable de statuer sur la vérité ou la fausseté d'énoncés grâce à des techniques de calcul symbolique relevant d'une logique modale.

L'imbrication de ces différentes figures confère à l'objet figural instrumenté les caractéristiques d'une figure émergente, qui s'écarte de l'idéal traditionnel et, ce faisant, transforme le milieu du concept, redéfinissant la manière de travailler avec des figures dont la nature pourrait demeurer incertaine. Le concept de nouveau travail mathématique devient alors indispensable, et des notions, telles que celle d'obstacle instrumental (Bruillard & Richard, 2024) permettent d'aborder plusieurs aspects en ce sens : les différences entre les représentations sur papier et celles générées par un artefact numérique ; les tensions entre la discrétisation inhérente à l'informatique et la continuité en mathématiques ; les caractéristiques du calcul symbolique, des modèles implémentés dans les logiciels et des choix des programmeurs ; ou encore les interférences interprétatives entre différents types de figures (apparente, paramétrable, numérique, symbolique), pour ne nommer que quelques aspects.

2. L'INTELLIGENCE ARTIFICIELLE (IA)

Appuis théoriques et méthodologiques

En plus de la ThETM, notre réflexion s'appuie sur trois références complémentaires, qui offrent des appuis théoriques et méthodologiques structurants. Premièrement, l'ouvrage *Mathematics Education in the Age of Artificial Intelligence : How Artificial Intelligence Can Serve Mathematical Human Learning* (Richard, Vélez, & Van Vaerenbergh, 2022) met en lumière les apports de l'intelligence artificielle à l'enseignement des mathématiques, en explorant la création d'environnements d'apprentissage enrichis ou assistés par l'IA, ainsi que l'intégration des techniques traditionnelles avec celles instrumentées par le numérique et l'IA.

La seconde référence est l'article *Intelligence artificielle et didactique des mathématiques : état des lieux et questionnements* (Emprin & Richard, 2023), qui explore les interactions entre l'intelligence artificielle et l'enseignement des mathématiques. Il interroge le concept d'intelligence, analyse ses biais lorsqu'il est

appliqué à l'IA, et examine les cadres théoriques en didactique des mathématiques, illustrés par des projets récents dans le monde francophone. Enfin, il aborde les défis liés à l'IA et propose des perspectives pour les développements futurs.

Quant à la troisième référence, elle est issue de notre exposé en séance plénière au North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME-NA), intitulé *The challenges of AI in shaping mathematical work : from human hybridization to automation through synergies of symbolic AI and generative models* (Richard, 2024a). Cet exposé explore les transformations du travail mathématique par l'intelligence artificielle, en analysant la coopération entre l'IA symbolique et les modèles génératifs, tout en interrogeant les défis liés à leur intégration et à la collaboration entre humains et machines[1].

De l'intelligence artificielle à la didactique

L'intelligence artificielle (IA) entretient depuis longtemps un lien étroit avec la didactique des mathématiques, établi il y a plus de 30 ans avec l'ouvrage *Didactique et intelligence artificielle* (Balacheff, 1994). Cette contribution a examiné les effets de l'IA sur les environnements informatiques pour l'apprentissage humain, en mettant en lumière à la fois leur potentiel pour soutenir la réflexion et la résolution de problèmes, et les contraintes qu'ils peuvent imposer, en particulier à travers des concepts comme la transposition informatique (Balacheff & Kaput, 1996). Bien que cette période d'enthousiasme, où l'on sous-estimait les difficultés, ait été suivie par une phase de désillusion, l'IA connaît aujourd'hui une convergence renouvelée avec la didactique. Elle se concentre sur la résolution de problèmes non routiniers et intègre apprentissage, modélisation et découverte, tout en revisitant les liens entre les dimensions humaines et numériques du travail mathématique.

Les références précédentes (Richard, Vélez, & Van Vaerenbergh, 2022 ; Emprin & Richard, 2023 ; Richard, 2024a) apparaissent dans un contexte marqué par l'essor des modèles génératifs, tels que ChatGPT, qui ont suscité un intérêt sans précédent pour l'intelligence artificielle depuis la fin de 2022. Cependant, cette popularité a souvent conduit à assimiler l'IA aux modèles génératifs, éclipsant d'autres contributions fondamentales, notamment celles portant sur les approches numériques et symboliques en mathématiques. Ces travaux soulignent la nécessité d'une IA capable de soutenir non seulement l'apprentissage des élèves, mais aussi les interactions complexes entre enseignants et élèves, tout en respectant les spécificités de la culture didactique. L'IA doit ainsi s'adapter aux besoins éducatifs humains plutôt que de réduire ces dynamiques à de simples enjeux techniques ou instrumentaux.

[1] Par un caprice de calendrier, le PME-NA 2024 et l'ETM8 se sont chevauchés, si bien que plusieurs idées développées dans ces deux contextes se rejoignent. Toutefois, la présente version va plus loin et s'inscrit nettement plus dans le champ de la didactique des mathématiques, tant par la profondeur des analyses que par la richesse des articulations théoriques.

En conjuguant « pensée humaine » et « pensée machine », l'intelligence artificielle (IA) offre un potentiel unique pour soutenir l'apprentissage des mathématiques, mais exige, par là même, une collaboration dépassant le cadre strictement informatique. Partant du principe fondamental, largement partagé dans la communauté didactique, selon lequel les mathématiques se construisent à travers la formulation et la résolution de problèmes — ou de situations-problèmes spécifiques à des milieux conceptuels mathématiques —, il est essentiel de combiner le génie informatique et la didactique pour que l'IA devienne un véritable levier pour l'apprentissage. Cette collaboration doit intégrer plusieurs dimensions :

- La prise en compte des transpositions didactiques et informatiques, sous vigilance épistémologique, afin d'assurer la cohérence du référentiel de l'espace de travail et l'authenticité des connaissances à construire.
- L'articulation entre le travail mathématique traditionnel et le nouveau travail mathématique, incluant des perspectives telles que les preuves instrumentales (Richard, Venant & Gagnon, 2019) ou les dialectiques induites par l'IA (Emprin & Richard, 2023).
- L'implication précoce des utilisateurs, élèves ou enseignants, dans le développement et la mise en œuvre des modèles informatiques, en suivant le principe de la conception dans l'usage (*design-in-use*).

Chaque problème ou situation-problème issu du patrimoine de l'enseignant constitue une occasion d'apprentissage précieuse qui, une fois dévolue à l'élève, éclaire la nature même de l'apprentissage et des connaissances construites. C'est surtout à travers la résolution de problèmes et la modélisation que l'on peut surmonter des blocages, dépasser des obstacles, clarifier des concepts complexes, poser des questions adaptées au contexte et à sa logique, et formuler de nouveaux problèmes.

Alors que l'IA démontre déjà sa valeur dans l'utilisation de techniques traditionnelles (Lagrange, Richard, Vélez, & Van Vaerenbergh, 2023), son plein potentiel repose sur des pratiques et des environnements d'apprentissage renouvelés. En s'imposant comme un outil capable d'enrichir la pensée humaine grâce au principe d'une adaptation mutuelle entre l'humain et la machine, intégrée dès la conception de cette dernière et des interactions qu'elle permet, l'IA peut non seulement transformer durablement le travail mathématique, mais aussi ouvrir des perspectives inédites pour la pensée mathématique.

Approches fondamentales en IA

L'intelligence artificielle (IA) soulève depuis longtemps des questions fondamentales sur sa nature. Dans sa préface intitulée *AI for the Learning of Mathematics*, Balacheff (2022) explique :

> Il aurait été souhaitable de disposer d'une définition précise et claire de l'intelligence artificielle (IA) unanimement acceptée. Malheureusement, ce n'est pas le cas aujourd'hui, tout comme ce ne l'était pas auparavant. Le critère commun, selon lequel l'IA est une propriété des machines « présentant certains comportements perçus comme intelligents »,

nous rappelle qu'il s'agit d'un jugement soutenu par une forme d'empathie humaine. En y regardant de plus près, il apparaît que ce jugement évalue à la fois la tâche accomplie par la machine et la manière dont elle a été réalisée : un comportement est perçu comme remarquable parce que la tâche est reconnue comme complexe ou que la manière de l'accomplir semble astucieuse.

L'IA peut être perçue comme une simple extension des capacités humaines, une collaboration humain-machine ou une interaction antagoniste. Parmi ces perspectives, l'idée de coopération est celle qui s'aligne le plus naturellement avec le concept de travail mathématique, où l'interaction entre l'humain et la machine enrichit les processus de réflexion et de résolution.

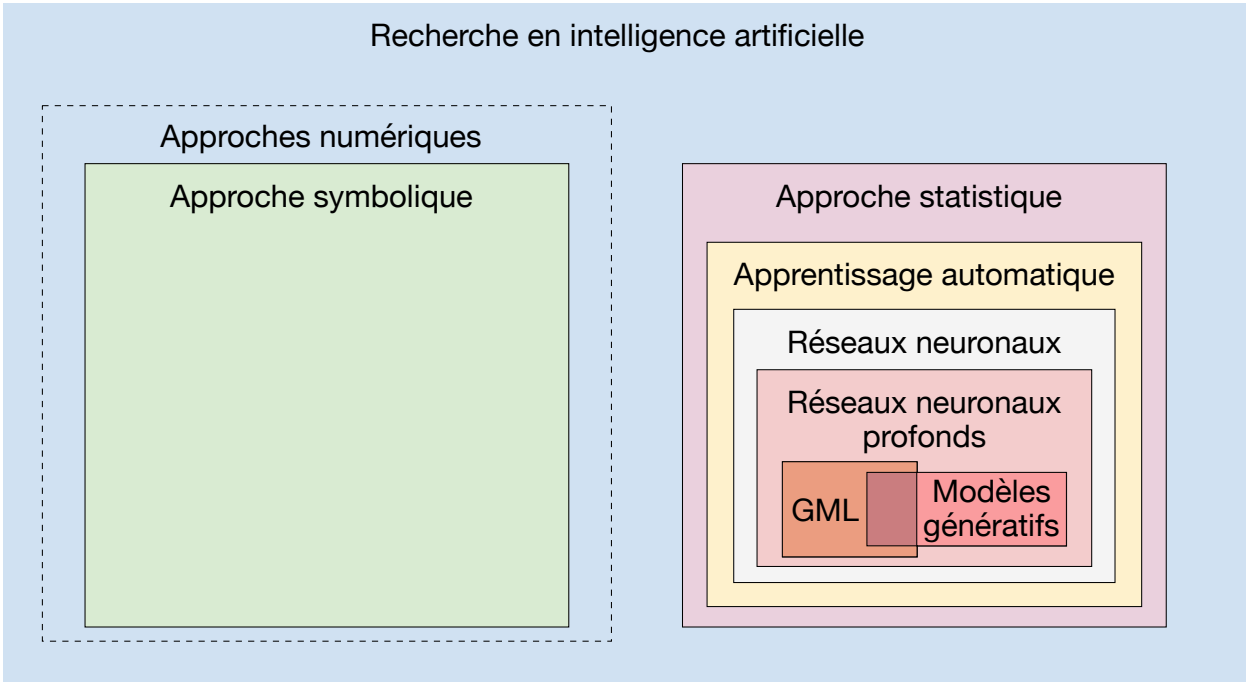


Figure 1. Adaptation du diagramme original de l'OCDÉ (2019) dans lequel nous avons ajouté l'*approche numérique* en lignes pointillées autour de l'approche symbolique, et les *GML* et *modèles génératifs* dans les réseaux neuronaux profonds.

Traditionnellement, l'IA repose sur une dualité d'approches fondamentales (Fig. 1). Les approches symboliques, fondées sur des règles et des symboles, modélisent la pensée humaine à travers des processus logiques, générant des résultats vérifiables. Elles sont particulièrement adaptées aux démonstrations formelles, aux calculs, à l'analyse symbolique (dérivées, résolution d'équations) et au traitement de données statistiques pour établir des corrélations théoriques. Cependant, elles peinent à gérer l'incertitude, les variations inattendues ainsi que les grandes quantités de données.

Les approches statistiques, en revanche, s'appuient sur des données et des techniques d'apprentissage machine pour reconnaître des motifs et établir des prédictions. Elles excellent dans les tâches prédictives et la modélisation probabiliste, mais leurs décisions manquent de transparence (effet de boîte noire) et ne fournissent pas de démonstrations formelles. Par ailleurs, elles sont incapables de produire des

raisonnements déductifs, sauf en réutilisant des segments déductifs extraits des données d'apprentissage et articulés selon des mécanismes fréquentiels. Cette approche, qui repose essentiellement sur des corrélations statistiques, tend à brouiller le lien causal entre les variables, ce qui peut s'avérer particulièrement trompeur pour un usager peu conscient de leur logique, fondée sur des inférences inductives (généralisation à partir des données) et abductives (meilleure explication plausible).

Contrepoint technologique

Le concept de *contrepoint technologique* émerge pour répondre à une problématique clé : comment décrire l'interaction entre humains et intelligence artificielle (IA) sans réduire cette relation à une simple fusion ou à une opposition stérile. Comme nous l'avons développé dans nos travaux antérieurs (Richard, 2024a), il s'agit d'adopter un terme opérant à deux niveaux : d'une part, il doit refléter l'intégration des approches symboliques et statistiques de l'IA, témoignant d'une synthèse technologique novatrice ; d'autre part, il doit capturer l'interaction émergente entre humains et IA, envisagée comme un système complexe et cohérent, tels un humain instrumenté ou une intelligence augmentée.

Les termes couramment utilisés, comme *hybridation* ou *synergie technologique*, bien qu'évocateurs, ne suffisent pas à rendre compte de ces dynamiques. L'*hybridation* peut suggérer un mélange qui efface les spécificités des entités impliquées, tandis que la *synergie* évoque une collaboration harmonieuse qui ne traduit pas fidèlement la tension critique et productive propre à l'interaction humain-IA.

Le *contrepoint technologique*, inspiré de la musique, répond à ces enjeux en décrivant une relation où humains et IA coexistent comme des entités distinctes, mais complémentaires. Cette notion illustre une tension dynamique, où chaque entité enrichit l'autre tout en conservant son individualité ou ses spécificités fonctionnelles. Dans le cadre des approches symboliques et statistiques, le *contrepoint* reflète avec justesse deux courants distincts qui coexistent et s'enrichissent mutuellement, ouvrant des perspectives inédites sans pour autant se fondre dans une intégration indistincte.

Nouveau travail mathématique et IA

L'intégration de l'intelligence artificielle dans le nouveau travail mathématique dépasse la simple automatisation de tâches : elle transforme les fondements mêmes des pratiques didactiques, redéfinissant les interactions entre les acteurs et les objets de savoir, tout en ouvrant la voie à de nouvelles formes d'interaction humain-machine. Ce que nous désignons par le nouveau travail repose sur le contrepoint technologique, où les approches symboliques et statistiques de l'IA coexistent et interagissent dans une tension qui peut devenir constructive lorsque l'usager mobilise pleinement ses capacités de questionnement et d'adaptation, exploitant les potentialités et valences de la machine dans ses dynamiques d'apprentissage.

Cette transformation s'accompagne de phénomènes majeurs qui en révèlent les paradoxes. D'une part, l'effet « boîte noire » des systèmes d'IA statistique masque

les mécanismes internes à l'origine des résultats, ce qui limite le contrôle sur les connaissances produites par la machine et pose des défis pour la transparence et la validation épistémologique. Ainsi, l'usager doit non seulement posséder des compétences spécifiques, comme la capacité d'interpréter les résultats en tenant compte des limites inhérentes au système, mais aussi une culture approfondie du contexte pour distinguer, par exemple, une réponse nécessaire d'une réponse simplement plausible. Cet autre paradoxe, bien connu en didactique, souligne la tension entre la nécessité de faire produire des réponses adéquates par l'élève et le fait qu'il n'en maîtrise pas encore pleinement les savoirs sous-jacents, qui sont précisément l'objet de l'enseignement.

D'autre part, les artefacts numériques, en tant qu'instruments d'apprentissage, étendent les capacités humaines tout en imposant leurs propres logiques et contraintes. Cette double dynamique, à la fois enrichissante et limitative, demande une relecture des notions de référentiel et de vigilance épistémologique. Pour les concepteurs, il s'agit de créer des environnements numériques cohérents et rigoureux, conçus dans l'usage. Pour les usagers, qu'ils soient enseignants ou apprenants, cela exige une adaptation constante et une réflexion critique pour interpréter les résultats de la machine et ajuster leur usage des outils, à défaut de pouvoir intervenir directement dans les modèles informatiques sous-jacents.

Des outils comme AlphaGeometry, ChatGPT + Wolfram, GeoGebra et QED-Tutrix illustrent concrètement ce potentiel transformateur (Richard, 2024a). Ces artefacts numériques enrichissent la pratique mathématique en offrant des possibilités inédites :

- AlphaGeometry excelle dans la résolution de problèmes géométriques complexes, surpassant parfois les performances humaines lors d'épreuves d'olympiades.
- ChatGPT+ Wolfram associe une interface conversationnelle avancée à des capacités de calcul symbolique et numérique sophistiquées, permettant une interaction dynamique et contextualisée avec des concepts mathématiques variés.
- GeoGebra, grâce à ses outils de raisonnement automatisé, facilite la génération et la démonstration de conjectures pertinentes dans un domaine de validité donné, soutenant ainsi l'exploration mathématique.
- Enfin, QED-Tutrix guide les élèves dans la construction de démonstrations lisibles en s'appuyant sur leur référentiel habituel de propriétés et de définitions, jouant un rôle d'agent didactique pour toute une classe dans le respect des contrats didactiques.

Cependant, ces outils soulèvent des défis majeurs, notamment dans la manière dont le milieu numérique est perçu par les utilisateurs. Est-il un tuteur compétent, un partenaire collaboratif amplifiant les capacités humaines, ou un adversaire critique confrontant l'apprenant à ses limites ? Ce questionnement met en évidence l'importance d'une interaction non fusionnelle, où l'usager ajuste son questionnement pour tirer parti des potentialités des artefacts tout en respectant leurs contraintes. Dans cette tension, entre enrichissement et limitation, le nouveau travail mathématique émerge comme une démarche essentielle. En cohérence avec la ThETM, il propose un cadre pour orienter

la pratique mathématique dans un environnement façonné par l'IA, les technologies numériques et les approches classiques.

Intelligence augmentée et idonéité

Inspirée des travaux de Douglas Engelbart (1962), l'intelligence augmentée peut être envisagée comme l'amplification des capacités cognitives humaines par l'utilisation d'artefacts numériques et de technologies interactives. En didactique des mathématiques, elle permet de rendre compte d'une interaction dynamique entre l'utilisateur et ces artefacts, favorisant une exploration approfondie des concepts, une modélisation enrichie et des approches innovantes pour résoudre des problèmes complexes. Elle repose sur une complémentarité essentielle : l'humain initie le questionnement et oriente l'action, tandis que les artefacts offrent des ressources, des rétroactions dynamiques et une adaptabilité contextuelle, renforçant ainsi les processus d'apprentissage, de réflexion et d'action.

L'idonéité, concept fondamental issu de l'idonéisme de Ferdinand Gonseth (1945-1955/2022), était initialement définie comme ce qui est approprié à la science actuelle, impliquant un ajustement constant entre les principes établis et l'expérience en cours. Dans le contexte de l'enseignement des mathématiques, ce concept est adapté pour désigner un processus d'ajustement continu et récursif entre deux systèmes distincts : un sujet apprenant ou réalisant un travail mathématique, et un milieu numérique, aboutissant à une stabilité adaptée et durable dans une perspective donnée. Cependant, cette stabilité, bien que pertinente pour les conditions actuelles, reste provisoire, nécessitant une évolution face à l'apparition de nouvelles variables, connaissances ou contextes.

Ce paradoxe, inhérent au processus idonéique, réside dans le fait que toute solution adaptée et stable reste temporaire. Dès qu'un changement significatif survient — l'introduction d'une nouvelle variable, l'atteinte des limites du domaine de validité des connaissances ou l'émergence d'une nouvelle conception chez le sujet —, la solution devient obsolète. Ce paradoxe s'applique à un vaste ensemble d'« expérience en cours », allant de la conception d'artefacts numériques, de matériel didactique et de dispositifs de recherche, à l'exercice de modélisation et à la résolution de problèmes. L'idonéité implique ainsi une remise en question et un réajustement constants, que l'on peut appeler *bonification*, indispensables tant pour la conception que pour l'usage des artefacts numériques et des supports didactiques, tels que les notes de cours, les séquences d'activités ou les bases de problèmes. Ce cycle d'ajustement permanent, à la fois local et continu dans le temps, constitue un principe clé pour garantir la pertinence du travail mathématique, qu'il s'agisse de la conception des milieux numériques par les informaticiens, de leur intégration par les enseignants ou de leur appropriation par le sujet qui les interroge.

L'intelligence augmentée, qui met en lumière le caractère émergent du système sujet-milieu, et l'idonéité, en tant que principe d'ajustement continu, redéfinissent notre compréhension des interactions avec un milieu numérique conçu pour le nouveau

travail mathématique. Ces interactions peuvent être interprétées à travers le concept de contrepoint technologique, qui souligne la tension constructive entre les approches symboliques et statistiques de l'IA, permettant une coopération enrichissante sans fusionner leurs spécificités. Dans ce cadre, les rétroactions du milieu, enrichies par l'IA, gagnent en complexité et s'adaptent aux objectifs du sujet, stimulant l'apprentissage tout en exigeant une vigilance épistémologique nécessaire, constante et accrue. Tandis que l'humain conserve l'initiative et guide l'interaction, les artefacts numériques dotés d'IA offrent des solutions partielles, des suggestions et des pistes d'exploration, renforçant ainsi les processus cognitifs. Ces cadres théoriques constituent des outils essentiels pour répondre aux enjeux de l'intégration de l'IA dans la pratique mathématique contemporaine, que ce soit pour guider les expériences en cours, préciser les modalités de communication avec la machine ou analyser les interactions à travers les projets et les tâches qu'elles sous-tendent.

Enfin, les interactions, amplifiées par l'IA, qu'elles soient finalisées ou ouvertes, invitent à reconsidérer les notions de contrôle, de nécessité et de collaboration dans la construction des connaissances, et à explorer la face lumineuse de l'incertitude comme un levier d'apprentissage et d'innovation pour le nouveau travail mathématique. En mobilisant les principes de contrepoint technologique, d'intelligence augmentée, et d'idonéité, il devient possible de mieux comprendre l'émergence des interactions au sein du système sujet-milieu et d'anticiper les effets des « expériences en cours ». Nous proposons ainsi une approche flexible et dynamique, centrée sur l'ajustement continu entre l'humain et un milieu numérique qui tire parti de l'action conjointe des acteurs humains et artificiels. Cette démarche apparaît indispensable pour relever les défis contemporains en didactique des mathématiques, qu'il s'agisse d'activités de formation, de pratiques en classe ou de recherches en cours. Par ailleurs, comme indiqué au paragraphe *Nouveau travail mathématique et IA*, les approches statistiques peuvent s'avérer particulièrement trompeuses en raison de l'absence de logique déductive, un manque dont les effets délétères sont évidents face aux exigences du travail mathématique. Pourtant, la grande popularité d'outils comme ChatGPT, Gemini ou Copilot, ainsi que leur accessibilité, les place déjà entre les mains des élèves. Il devient donc impératif de disposer d'outils de recherche et de réflexion adaptés à cette nouvelle réalité, comme le démontrent les travaux présentés dans le cadre de l'ETM8 par García-Honrado, Fortuny-Aymemi, Recio et Richard (2025), ainsi que par Danguy-Pichette et Richard (2025).

3. CLASSIFICATION DES SYSTÈMES D'IA POUR L'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES

La diversité croissante des systèmes d'intelligence artificielle (IA) appliqués au travail mathématique appelle une clarification conceptuelle. Pour ce faire, nous proposons une typologie fonctionnelle, inspirée du chapitre de Van Vaerenbergh & Pérez-Suay (2022) dans l'ouvrage collectif *Mathematics Education in the Age of Artificial Intelligence* (Richard, Vélez & Van Vaerenbergh, 2022), en continuité avec les analyses proposées dans les sections précédentes.

Cette classification distingue quatre classes de systèmes, selon leur architecture fonctionnelle dominante :

1. les extracteurs d'information,
2. les moteurs de raisonnement,
3. les systèmes explicatifs,
4. et les systèmes de modélisation pilotée par les données.

Chacune de ces classes se caractérise par le type de traitement qu'elle applique aux représentations, par sa logique de fonctionnement interne, et par les formes d'interaction qu'elle rend possibles dans un espace de travail mathématique instrumenté.

Il est également possible d'adopter une typologie fondée sur la fonction dans les dispositifs : on distinguerait alors des IA à visée tutrice, collaborative, exploratoire ou d'assistance. Bien que cette approche soit pertinente pour caractériser les rôles joués par les artefacts dans certaines dynamiques d'interaction entre un sujet et le milieu, notre choix ici est de nous concentrer sur leur structure technique et leurs effets sur le nouveau travail mathématique lui-même. Des recoupements entre ces typologies restent possibles.

Classe 1 : Extracteurs d'information

La première classe regroupe les systèmes d'IA que nous appelons *extracteurs d'information*. Ces systèmes sont conçus pour transformer des données issues du monde réel — comme du texte écrit, des images, de la parole ou des vidéos — en représentations manipulables dans un espace de travail mathématique (Fig. 2). Par exemple, la reconnaissance optique de caractères (ROC) permet de convertir un texte manuscrit ou imprimé en une forme numérique ou un énoncé exploitable. Les systèmes de vision par ordinateur (SVO) peuvent, quant à eux, identifier des objets, des positions relatives ou des figures, en lien avec des formes sémiotiques variées — iconiques, symboliques ou gestuelles — souvent mobilisées dans l'activité mathématique. Certains systèmes analysent également des séquences vidéo pour extraire de l'information dynamique, comme des gestes associés à une manipulation instrumentée ou un raisonnement exprimé dans l'action. D'autres sont capables de traiter directement les interactions du sujet avec l'interface, en interprétant ses actions — constructions, déplacements, choix d'outils, invariances — comme autant d'indices d'un raisonnement en cours ou d'une stratégie de résolution. Enfin, la reconnaissance automatique de la parole (RAP) transcrit des énoncés oraux en texte, c'est-à-dire en contenus discursifs ou en formes sémiotiques susceptibles d'entrer dans une activité mathématique. Une illustration typique serait la conversion d'un énoncé de problème formulé oralement en un système d'équations, une figure ou un graphique. Notons toutefois que les données transformées peuvent aussi provenir d'un environnement virtuel, par exemple dans un monde modélisé en réalité immersive, où les gestes, déplacements ou interactions de l'utilisateur sont autant de sources d'information traduisibles en représentations mathématiques (Rodríguez, 2022). On assiste alors à

une dialectique particulière entre réalité virtuelle et modélisation mathématique, où les artefacts eux-mêmes deviennent générateurs de données, mais, dans ce cas, l'information extraite est peut-être déjà modélisée et reprise telle qu'elle, sans interprétation qui émerge des données.

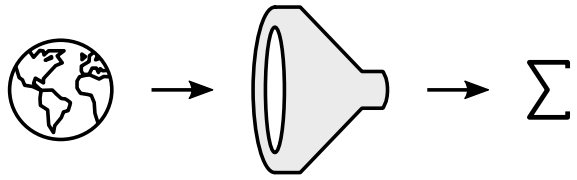


Figure 2. ***Extracteurs d'information*** **: systèmes d'IA transformant des données issues du monde réel (texte, image, parole, vidéo, geste, action) en représentations mathématiques manipulables. Ils jouent un rôle clé dans l'entrée du travail mathématique ou de l'apprentissage, en articulant captation, traitement sémiotique et reformulation.**

Les extracteurs d'information relèvent en général de l'IA statistique, en particulier des architectures d'apprentissage profond entraînées sur des ensembles de données massifs. Leur principal atout réside dans leur capacité à détecter des motifs complexes dans des données visuelles, textuelles, sonores ou interactionnelles. Toutefois, ces systèmes fonctionnent généralement comme des boîtes noires : les processus décisionnels internes demeurent opaques et leur interprétation devient difficile, voire inaccessible, pour l'usager.

Ces artefacts interviennent dès les premières étapes du nouveau travail mathématique, en contribuant à formuler, transposer ou structurer un énoncé dans un format manipulable. Ils jouent un rôle crucial à l'interface entre l'environnement du sujet et le milieu épistémologique, en rendant possible l'entrée dans une activité mathématique. Cependant, l'opacité de leur fonctionnement soulève d'importantes questions de vigilance épistémologique, notamment quant à la fiabilité des représentations produites et à leur conformité avec les intentions du sujet, et invite souvent l'usager à entrer dans un processus d'idonéité. D'une certaine façon, cela rejoint les situations d'action et de formulation dans la théorie des situations didactiques, où l'élève est confronté à un milieu qu'il doit adapter à ses intentions, tout en l'interrogeant et en le réinterprétant.

Classe 2 : Moteurs de raisonnement

La deuxième classe regroupe les systèmes d'IA que nous appelons *moteurs de raisonnement*. Contrairement aux extracteurs d'information, ces systèmes n'ont pas pour fonction de transformer des données du monde réel, mais plutôt de traiter des représentations déjà formalisées dans le cadre d'un travail mathématique, en mobilisant des procédures logiques ou symboliques (Fig. 3). Ils sont conçus pour effectuer des opérations algébriques, résoudre des équations, calculer des dérivées, ou encore démontrer des propriétés à partir d'hypothèses, selon une logique contrôlée, explicite et rigoureuse. À une extrémité du spectre, on trouve des algorithmes classiques, comme l'élimination de Gauss-Jordan, utilisés pour résoudre des systèmes linéaires ; à l'autre,

des environnements plus complexes de raisonnement automatisé intégrant preuve formelle et modélisation symbolique.

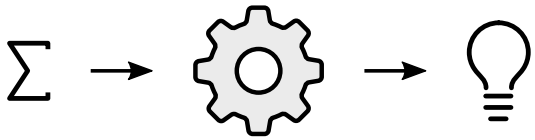


Figure 3. ***Moteurs de raisonnement*** **: systèmes reposant sur des procédures symboliques (calcul, démonstration, inférence) pour produire des solutions ou valider des propriétés. Leur transparence favorise la compréhension logique et la rigueur formelle dans le nouveau travail mathématique.**

Ces moteurs s'appuient sur des approches symboliques de l'intelligence artificielle. Ils reposent sur des règles formelles, des inférences déductives et des manipulations symboliques, souvent explicites et traçables. Cela les distingue des systèmes statistiques, dont les mécanismes d'apprentissage sont souvent opaques, en offrant une transparence structurelle : les règles de raisonnement sont accessibles et les résultats peuvent, en principe, être reconstruits étape par étape. Toutefois, lorsque les procédures deviennent longues ou complexes, cette transparence reste théorique, difficilement exploitable dans la pratique. Leur interprétabilité n'en demeure pas moins un atout pour soutenir la vigilance épistémologique et la compréhension des enchaînements logiques. Ils permettent en effet de produire du vrai à partir du vrai, selon une logique déductive respectant les fondements formels des mathématiques.

Parmi les exemples courants, on trouve des moteurs de calcul symbolique intégrés à des logiciels tels que Maple, SageMath, Mathematica ou GeoGebra, capables de traiter des expressions algébriques complexes, de résoudre des systèmes d'équations, ou de calculer des dérivées et des intégrales sous forme exacte, lorsque cela est mathématiquement possible. Certains systèmes combinent calcul symbolique et calcul numérique, notamment en analyse, pour explorer des fonctions, manipuler des objets paramétrés ou résoudre des équations différentielles, comme le propose la plateforme Wolfram Language. Dans d'autres cas, ces moteurs s'intègrent à des outils de raisonnement automatisé, comme les assistants de preuve ou les modules de vérification géométrique, qui permettent de statuer sur la vérité d'une conjecture dans un domaine donné. Ils peuvent également déterminer ou démontrer les équations de lieux géométriques construits dynamiquement, en reliant des invariants issus de l'action instrumentée à des représentations symboliques validées — un exemple notable étant celui de GeoGebra Discovery (Kovács *et al.*, 2021), qui combine interaction dynamique et démonstration automatique pour générer et prouver des conjectures en géométrie.

Dans une perspective didactique, ces moteurs interviennent au cœur du nouveau travail mathématique, notamment dans une phase de validation formelle ou de démonstration, mais aussi dans l'exploration systématique de cas particuliers, l'explicitation de liens invariants ou l'automatisation de procédures complexes. Ils soutiennent une modélisation plus rigoureuse et facilitent l'articulation entre conjecture, preuve et généralisation. Toutefois, leur usage requiert une maîtrise suffisante du référentiel mathématique

mobilisé, ainsi qu'une capacité à interpréter les résultats selon les intentions du sujet et les contraintes du milieu. Dans certains contextes, ces moteurs peuvent également compenser les limites des approches statistiques : en permettant de vérifier si une conjecture, induite ou abduite à partir de données d'apprentissage, est effectivement démontrable, ils contribuent à assurer une validation épistémique de niveau élevé dans la découverte de propriétés mathématiques, dans un esprit proche de celui des systèmes experts fondés sur des règles de raisonnement explicites.

Classe 3 : Systèmes explicatifs

La troisième classe regroupe des systèmes d'IA que nous désignons sous le terme de *systèmes explicatifs*. Contrairement aux moteurs de raisonnement, leur objectif ne se limite pas à produire un résultat exact ou à démontrer la validité d'une solution : ils visent à rendre les démarches lisibles ou compréhensibles pour les apprenants, en explicitant les étapes intermédiaires de la résolution sous une forme interprétable, souvent inspirée de pratiques pédagogiques (Fig. 4).

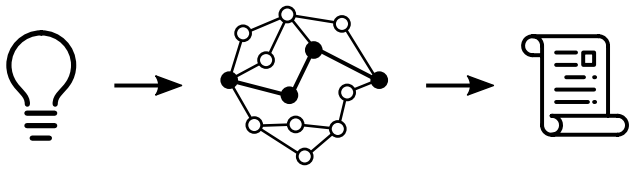


Figure 4. *Systèmes explicatifs* : systèmes conçus pour rendre les démarches de résolution compréhensibles, en organisant les étapes selon des formes discursives et sémiotiques adaptées à l'apprentissage. Ils soutiennent la coconstruction des conceptions en jouant un contrepoint technologique au cours d'une interaction sujet-milieu potentiellement idonéique, susceptible de faire émerger de nouveaux sens ou parcours interprétatifs.

Il est important de distinguer ces systèmes explicatifs, centrés sur l'utilisateur, des approches relevant de l'intelligence artificielle explicable. Alors que cette dernière se concentre sur la transparence des processus internes des algorithmes d'IA pour en faciliter l'appréhension par les experts, les systèmes explicatifs sont conçus pour accompagner les élèves en détaillant les étapes de résolution, favorisant ainsi leur apprentissage et leur autonomie.

Plutôt que de se contenter d'une réponse ou d'un calcul symbolique, ces systèmes s'efforcent de traduire la logique sous-jacente d'une solution en une séquence cohérente d'étapes, exprimées en langage naturel ou à l'aide de systèmes de représentation sémiotique souvent visuels, en coordination avec le registre discursif. Ils s'inscrivent ainsi dans une perspective où l'intelligibilité et la progressivité de l'explication priment sur l'efficacité ou la rapidité du calcul. En cela, ils peuvent jouer un rôle important dans le soutien à l'apprentissage humain, en imitant la structure des exemples résolus ou des démarches guidées familières en classe.

Parmi les systèmes explicatifs les plus connus, on peut citer Photomath, WolframAlpha, Minerva ou le cadre MathSteps développé par Google. Ces outils génèrent des solutions étape par étape, souvent accompagnées de commentaires en

langage naturel ou de représentations intermédiaires, afin de favoriser la compréhension progressive des procédures. Leur fonctionnement repose généralement sur une combinaison d'approches symboliques — pour organiser les étapes de résolution — et de techniques issues du traitement automatique du langage naturel (TAL) ou de grands modèles de langage (GML), afin de formuler des explications lisibles et pertinentes.

Les systèmes explicatifs jouent un rôle de médiation entre le langage formel de la machine et celui de l'élève, à condition que les explications fournies soient cohérentes avec le référentiel mathématique de l'espace de travail. Cette capacité explicative peut soutenir la vigilance épistémologique en aidant les apprenants à comprendre les enchaînements logiques et à identifier des invariants dans les démarches. Cependant, l'efficacité pédagogique de ces systèmes dépend de la qualité des explications générées, de leur alignement avec les attentes institutionnelles et de leur capacité à s'adapter au niveau de l'utilisateur. De plus, ces systèmes sont particulièrement performants pour des processus de résolution bien définis, souvent associés à des calculs routiniers ou à des modes de représentation spécifiques. Toutefois, ils rencontrent des défis lorsqu'il s'agit de coordonner les genèses sémiotique et discursive, notamment lors de la conversion ou de la traduction des significations entre différentes représentations. Cette coordination est essentielle pour une compréhension approfondie des concepts mathématiques et mérite une attention particulière dans la conception même de ces systèmes.

Enfin, dans une perspective instrumentale, ces systèmes illustrent une forme d'intelligence augmentée tournée vers la clarification, où l'artefact ne se limite pas à produire un résultat, mais agit comme un vecteur d'explication. Lorsqu'ils s'insèrent dans une activité finalisée portée par un projet — comme la résolution de problème, la démonstration ou la modélisation —, ils peuvent renforcer l'autonomie des apprenants, en appui à la coconstruction du sens. Leur efficacité repose alors sur l'idonéité de l'interaction sujet-milieu, comprise comme un processus dynamique d'ajustement entre les intentions du sujet, les contraintes du milieu et les rétroactions de l'artefact. Cette interaction devient féconde lorsqu'elle suscite un questionnement structurant le travail mathématique, dans une perspective où chaque tâche s'inscrit dans un projet plus large. L'introduction d'un explicateur peut alors réorienter ou déstabiliser les démarches engagées. On pourrait parler ici d'une valence contrapontique dans le nouveau travail mathématique, lorsque cet apport externe ouvre de nouveaux parcours interprétatifs ou permet une recomposition productive des genèses — sémiotique, discursive, instrumentale — à l'œuvre dans l'espace de travail ou au fil de l'apprentissage. Cet enrichissement n'est effectif que si le sujet demeure actif, capable d'interroger, d'assumer ou de rejeter les explications proposées, en fonction des exigences du projet.

Classe 4 : Modélisation pilotée par les données

La quatrième classe regroupe des systèmes d'IA fondés sur la modélisation pilotée par les données. Ces systèmes mobilisent des techniques d'intelligence artificielle

statistique — apprentissage automatique, classification, analyse prédictive — pour interpréter des données empiriques issues de l'activité des élèves, souvent dans des environnements numériques d'apprentissage. Leur objectif est d'optimiser les conditions d'apprentissage, en fournissant des rétroactions personnalisées ou en identifiant en temps réel des profils d'élèves à risque (Fig. 5).

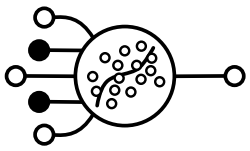


Figure 5. ***Modélisation pilotée par les données*** **: systèmes exploitant les traces d'activité des élèves pour produire des rétroactions ou moduler les parcours d'apprentissage. Leur efficacité dépend de leur intégration dans un processus de raisonnement, en évitant les dérives prescriptives ou en aidant à surmonter les obstacles instrumentaux.**

Parmi les exemples emblématiques figurent les plateformes dotées de modules d'analyse de l'apprentissage, comme Moodle, ASSISTments ou MindMath, capables de prédire le risque d'échec à partir de fichiers journaux, de traces d'activité interprétées comme marqueurs d'engagement (temps passé, fréquence des interactions, navigation), ou de séquences de réponses. Ces outils peuvent soutenir des interventions pédagogiques plus ciblées, ou alimenter des environnements adaptatifs qui ajustent la difficulté des tâches, la nature des rétroactions ou la progression des contenus en fonction des profils ainsi inférés. Comme le soulignent Emprin et Richard (2023), ces systèmes sont principalement mobilisés pour la correction automatisée, l'analyse des progrès, la personnalisation de l'enseignement ou encore la recommandation d'activités, dans une logique de régulation basée sur des traces numériques.

Si ces systèmes peuvent contribuer à faire émerger certains motifs récurrents dans l'activité, leur intégration soulève plusieurs questions didactiques majeures. En particulier, ces modèles sont souvent construits hors du référentiel mathématique explicite de la situation : ils s'appuient sur des données comportementales ou sur des marqueurs indirects (temps de réponse, nombre de tentatives, taux de clics), sans prise en compte systématique des problèmes de référence, des conceptions mobilisées, ni des obstacles rencontrés. Le risque est alors de dériver vers une logique prescriptive fondée sur la moyenne des comportements passés, au détriment de l'analyse du raisonnement mathématique en cours ou des concepts en jeu. Cela peut entraîner une hybridation incontrôlée du référentiel, où les fondements didactiques de l'activité sont éclipsés par des modèles corrélatifs.

Dans ce contexte, la notion d'obstacle instrumental prend tout son sens : les modèles statistiques intégrés à ces systèmes peuvent renforcer des représentations erronées ou incomplètes du travail mathématique, en « répondant à la place » du sujet ou en orientant l'activité selon des motifs extraits de contextes hétérogènes. Ces obstacles ne sont pas uniquement épistémologiques ou didactiques : ils sont liés aux conditions de

production de la donnée, à sa structuration et à son interprétation automatisée, parfois en contradiction avec les logiques propres au travail mathématique.

Un exemple didactiquement plus ambitieux est offert par QED-Tutrix, un environnement d'aide à la démonstration géométrique qui modélise non seulement les données comportementales, mais surtout la structure du raisonnement mathématique. Ce système combine une base de démonstrations valides, un moteur d'inférence logique et une interface d'exploration géométrique, permettant d'interpréter les démarches des élèves dans leur complexité sémiotique, discursive et instrumentée. Contrairement aux plateformes adaptatives fondées sur des corrélations statistiques, QED-Tutrix intègre un référentiel mathématique explicite et cherche à soutenir l'activité démonstrative comme projet structurant, en identifiant les blocages, en soutenant l'engagement dans la preuve et en respectant la diversité des parcours de pensée. Il illustre ainsi une forme de modélisation didactique instrumentée, où les données servent la compréhension plutôt que le pilotage automatisé des apprentissages. Ce système témoigne aussi d'une intelligence augmentée contextualisée (Emprin & Richard, 2023), en ce qu'il soutient le raisonnement mathématique sans jamais se substituer à lui.

Du point de vue du nouveau travail mathématique, ces systèmes peuvent jouer un rôle précieux s'ils sont intégrés dans l'esprit d'un processus idonéique du système sujet-milieu, où les rétroactions ne se substituent pas au raisonnement, mais soutiennent un questionnement mathématique fondé sur la situation et sur les choix interprétatifs du sujet. Ils peuvent ainsi alimenter la construction d'un référentiel explicite, favoriser l'identification de conceptions à discuter ou déclencher un débat sur la validité d'une stratégie. Mais, encore une fois, cela suppose que le sujet soit actif dans l'analyse des recommandations, capable de les confronter aux définitions, propriétés et structures du milieu. En ce sens, ces systèmes n'ont de valeur que s'ils participent à un projet où la compréhension est au centre de la démarche, et non à une simple régulation comportementale. D'ailleurs, cette distinction avec les approches comportementalistes ou béhavioristes est au cœur de la théorie des situations didactiques de Brousseau, qui insiste sur le fait que l'initiative du questionnement — donc du projet — appartient au sujet, ainsi que de la Théorie de l'Espace de Travail Mathématique (ThETM), qui prolonge et approfondit cette idée dans le cadre de l'interaction avec des artefacts numériques.

4. EXEMPLES DE TRAVAIL MATHÉMATIQUE AVEC L'IA

Dans cette section, nous présentons un éventail de pratiques émergentes qui illustrent comment l'intelligence artificielle transforme en profondeur la nature du travail mathématique, en modifiant les formes d'engagement, les ressources mobilisées et les processus de validation. Pour y arriver, nous nous appuyons sur la typologie des quatre classes de systèmes exposée dans la section précédente. Chaque exemple mobilise une composition formée à partir des extracteurs d'information, moteurs de raisonnement, systèmes explicatifs ou dispositifs de modélisation pilotée par les données, selon des

configurations variables. Cet outil d'analyse permet d'observer comment l'IA s'insère dans l'activité mathématique, selon les finalités visées, les milieux engagés et les dynamiques d'interaction.

Il ne s'agit pas d'un simple transfert de compétences vers les machines, mais d'une reconfiguration des rôles et d'une redistribution des opérations au sein du système sujet-milieu. Les exemples proposés permettent ainsi de mieux comprendre comment l'IA intervient dans l'exécution du travail mathématique, en soutenant l'exploration, la validation, l'explicitation ou l'apprentissage. Ils illustrent également le rôle des artefacts comme contrepoints technologiques, capables de susciter de nouveaux parcours interprétatifs, d'infléchir les démarches engagées, ou de reconfigurer les conditions d'un questionnement mathématique.

Résolution assistée par l'IA et art de l'explication

Certaines pratiques émergentes mobilisent des systèmes d'IA pour offrir un soutien immédiat au calcul, en combinant les fonctions d'extraction d'information, de raisonnement symbolique et d'explication destinée à l'usager. C'est notamment le cas des calculatrices avec caméra, telles que Photomath (lancée en 2014), qui permettent à l'élève de pointer une expression mathématique imprimée ou manuscrite avec son téléphone, d'en obtenir la reconnaissance par traitement optique des caractères (ROC), puis de suivre une résolution étape par étape commentée, incluant des représentations graphiques.

Ces artefacts intègrent généralement trois classes de systèmes : un extracteur d'information (classe 1), qui identifie le texte ou les symboles mathématiques à l'aide de la ROC ; un moteur de raisonnement (classe 2), qui effectue les opérations algébriques (factorisation, résolution de systèmes, etc.) ; et un système explicatif (classe 3), qui présente les étapes de la solution selon une structuration discursive proche des démonstrations au tableau ou des explications de manuels scolaires. Ils illustrent ainsi une composition instrumentale articulant extraction, traitement symbolique et mise en forme discursive au sein d'un même outil (Fig. 6).

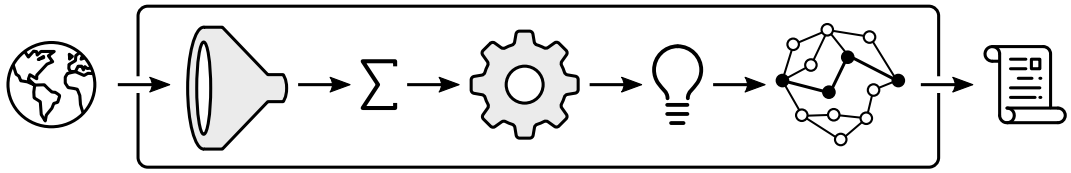


Figure 6. ***Composition de classes dans les calculatrices par caméra*** **: exemple d'artefact combinant un extracteur d'information, un moteur de raisonnement et un système explicatif. L'interaction entre ces modules permet de passer d'une captation visuelle à une résolution symbolique, puis à une présentation structurée des étapes, dans une forme adaptée à l'apprentissage.**

Au cours de la dernière décennie, ces dispositifs sont devenus omniprésents dans les applications de mathématiques, suscitant parfois des inquiétudes quant au contournement des apprentissages fondamentaux (tels que la maîtrise du calcul, la

manipulation algébrique ou la communication à l'aide du langage mathématique). Toutefois, ils incarnent un changement de paradigme dans la résolution de problèmes : au lieu de viser uniquement l'efficience, ils intègrent l'explication comme vecteur de compréhension — à condition que le sujet demeure actif, tant dans l'interprétation du processus que dans l'initiative du questionnement propre au travail mathématique.

Plus récemment, l'émergence des grands modèles de langage (GML), tels que ceux véhiculés par ChatGPT, a introduit une nouvelle forme d'assistance à la résolution. En apparence, ces outils peuvent répondre à une kyrielle de questions mathématiques, en proposant une démarche discursive, une solution mathématique, et parfois même des considérations métamathématiques — comme des corollaires, des rappels ou des prolongements non demandés, mais générés dans une logique d'élargissement explicatif, à la manière d'un élève qui voudrait manifester tout ce qu'il sait sur un sujet. Toutefois, ces outils reposent sur des modèles statistiques fondés sur la prédiction de mots, et non sur une logique formelle ou une inférence rigoureuse. Comme l'ont souligné Shah et Bender (2022), cette prédiction s'appuie sur des régularités textuelles apprises, sans compréhension réelle du contenu. Cette nature probabiliste les rend vulnérables à des erreurs subtiles — voire à des hallucinations, où des raisonnements ou résultats erronés sont produits avec une apparence de cohérence, comme l'ont confirmé plusieurs études empiriques récentes (Mirzadeh *et al.*, 2024).

Une étude bien connue de Bubeck *et al.* (2023) montre que GPT-4 parvient à identifier correctement les nombres premiers entre 150 et 250 uniquement si l'usager l'invite explicitement à les énumérer au préalable. Cette stratégie, appelée *chaînage de pensées* (Chain-of-Thought)[2], a été formalisée par Wei *et al.* (2022) comme une manière d'induire un raisonnement étape par étape en demandant explicitement au modèle d'articuler des étapes intermédiaires avant de produire une réponse finale. Bien que ces étapes puissent sembler suivre une logique déductive, elles ne reposent pas sur une inférence symbolique rigoureuse : le modèle effectue une prédiction linguistique guidée par la reproduction de régularités textuelles apprises. Ce n'est donc pas tant le GML qui raisonne que l'interaction instrumentée avec l'usager — lorsqu'elle est idoine — qui permet d'orienter la production vers une réponse interprétable. En prenant l'initiative de reformuler la demande, de guider la démarche ou de questionner les réponses, le sujet engage une activité conjointe avec l'artefact, jouant un contrepoint

[2] Cette appellation évoque, sans l'égaler ni la revendiquer, les chaînes de raisons dont parlait Descartes dans le *Discours de la méthode* (1637) : « Ces longues chaînes de raisons, toutes simples et faciles, dont les géomètres ont coutume de se servir pour parvenir à leurs plus difficiles démonstrations, m'avaient donné occasion de m'imaginer que toutes les choses qui peuvent tomber sous la connaissance des hommes s'entre-suivent en même façon, et que, pourvu seulement qu'on s'abstienne d'en recevoir aucune pour vraie qui ne le soit, et qu'on garde toujours l'ordre qu'il faut pour les déduire les unes des autres, il n'y en peut avoir de si éloignées auxquelles enfin on ne parvienne, ni de si cachées qu'on ne découvre. » Contrairement à cette exigence cartésienne de rigueur déductive, les chaînes de pensée générées par les GML relèvent d'une simulation discursive, fondée sur la reproduction de régularités textuelles apprises, et non sur un raisonnement formel construit par enchaînements logiques.

technologique capable de faire émerger un questionnement mathématique. Dans ce cadre, l'efficacité de la réponse produite tient autant à la structure du modèle qu'à la dynamique d'interaction dans laquelle il s'insère.

Pour dépasser ces limites, plusieurs approches hybrides ont été proposées. Par exemple, Wolfram (2023) suggère un couplage entre un grand modèle de langage (GML), chargé d'interpréter les requêtes en langage naturel, et un moteur de calcul symbolique (classe 2) garantissant la rigueur mathématique des réponses. Dans cette configuration, le GML assume les fonctions d'extraction d'information et d'explication (classes 1 et 3), tandis que le traitement formel est délégué à un module distinct. Cette distribution des rôles préfigure les architectures neurosymboliques, fondées sur l'articulation — plutôt que la fusion — des capacités génératives et symboliques. Cette configuration est illustrée à la Figure 7, qui met en évidence le rôle complémentaire du plugiciel Wolfram dans l'amélioration du traitement mathématique. Des exemples comparatifs illustrant les apports et les limites d'un GML seul par rapport à un système combinant ChatGPT et Wolfram sont présentés dans Richard (2024a). Bien que cette présentation semble imiter une démarche scolaire — comme on en retrouve en géométrie ou en analyse, par exemple —, elle ne constitue pas un raisonnement discursivo-graphique au sens strict, faute d'une articulation contrôlée entre registres discursifs, figuraux et autres registres de représentation sémiotique.

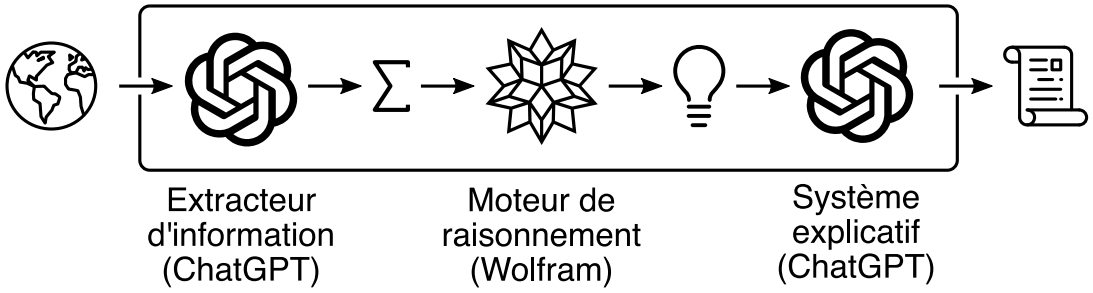


Figure 7. ***Intégration de Wolfram à ChatGPT dans un système de contrepoint technologique*** **: le GML interprète et reformule la requête en langage naturel, délègue le calcul à un moteur de raisonnement symbolique, puis restitue le résultat sous une forme discursive adaptée à l'apprentissage ou au projet mathématique en cours.**

Les systèmes AlphaGeometry et AlphaProof (Trinh *et al.*, 2024) prolongent cette logique : un moteur de preuve formelle y est combiné à un grand modèle de langage (GML) qui propose des pistes heuristiques lorsque le moteur symbolique atteint une impasse dans le raisonnement déductif. Les suggestions du GML sont ensuite validées par le module symbolique, assurant la correction du résultat. La figure 8 illustre cette architecture neurosymbolique, dans laquelle l'exploration générative de l'espace des énoncés s'articule à une validation rigoureuse par raisonnement formel, dans un équilibre délicat entre créativité computationnelle et rigueur logique. Ces dispositifs incarnent un contrepoint technologique à deux niveaux : entre les composantes symboliques et génératives, d'une part, et dans l'interaction instrumentée entre l'usager et l'artefact, d'autre part. Toutefois, l'efficacité de ce contrepoint repose sur la

cohérence sémantique : le modèle génératif doit interpréter fidèlement l'intention de l'usager, et le moteur symbolique la traduire dans un cadre formel adéquat. Ce défi, à la fois technologique et humain, appelle un processus d'interaction suffisamment convergent — c'est-à-dire idoine — pour que les significations produites s'alignent sur les finalités du travail mathématique engagé.

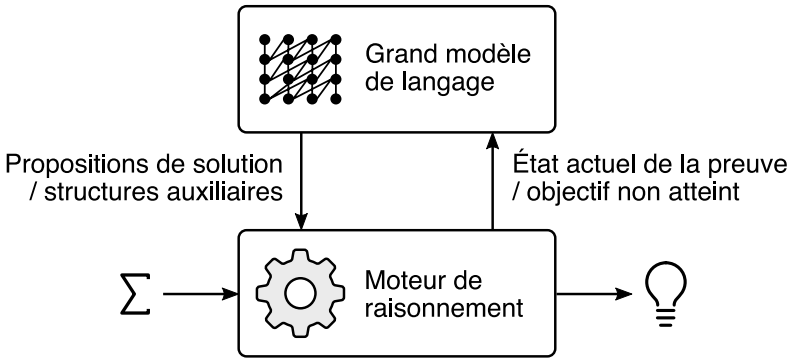


Figure 8. *Systèmes AlphaProof et AlphaGeometry* : un moteur génératif explore l'espace des énoncés et propose des conjectures (AlphaProof) ou des structures auxiliaires (AlphaGeometry) à partir d'un vaste référentiel de propriétés. Ces propositions sont soumises à un moteur de raisonnement symbolique qui les vérifie rigoureusement, leur validité dépendant de l'interprétation qu'il en fait et de leur adéquation avec l'intention de l'utilisateur. Ce processus est guidé de façon itérative par l'état actuel de la preuve (AlphaProof) ou par les objectifs géométriques non atteints (AlphaGeometry).

D'un point de vue didactique, ces artefacts peuvent contribuer à enrichir l'espace de travail mathématique, en introduisant une dynamique interprétative nouvelle. Lorsqu'ils s'insèrent dans une interaction sujet-milieu orientée par un projet — que ce soit pour résoudre un problème, construire une démonstration ou élaborer un modèle —, ils peuvent relancer une démarche en cours, décaler la perspective ou suggérer une reformulation inattendue. Leur efficacité ne repose pas uniquement sur leur contenu explicatif, mais sur la capacité de l'usager à les intégrer activement dans le fil du travail engagé, en ajustant ou en discutant les significations produites au regard des exigences du projet. Ils peuvent ainsi soutenir partiellement un raisonnement, stimuler un questionnement ou renforcer une prise d'initiative, pour autant que le sujet conserve la possibilité de valider, d'ajuster ou de rejeter ce qui lui est proposé.

Apprentissage personnalisé et guidé

Depuis les travaux de Bloom (1984), qui ont mis en évidence l'efficacité du tutorat individuel, les chercheurs ont exploré des moyens d'adapter cette approche à grande échelle. Cette quête a donné naissance aux systèmes de tutorat intelligent (STI), qui cherchent à reproduire certains aspects de l'enseignement personnalisé en utilisant l'intelligence artificielle pour adapter le soutien aux besoins spécifiques de chaque apprenant. Par exemple, un agent tuteur peut observer un étudiant résolvant des problèmes d'algèbre et, en détectant une impasse ou des erreurs récurrentes, intervenir en posant des questions ciblées, en proposant des sous-problèmes simplifiés ou des problèmes connexes. Cette approche favorise l'autonomie de l'élève en l'engageant

activement dans le processus d'apprentissage, ce qui s'inscrit dans ce que l'on pourrait appeler l'*art de la dévolution*. Dans la théorie des situations didactiques, la dévolution du problème, en tant qu'occasion d'apprentissage et de travail mathématique, consiste à confier à l'élève la responsabilité du processus de résolution tout en le soutenant dans cette quête, sans lui donner les réponses en même temps que les questions.

Bien des concepts didactiques qui se posent naturellement lorsque le milieu est matériel, social ou symbolique se transposent de façon particulièrement exigeante lorsqu'ils doivent s'appliquer à un artefact numérique, comme c'est le cas dans la conception d'un système tuteur intelligent, où ils doivent être traduits en formes opératoires et calculables par une machine. Cela implique, entre autres, de modéliser l'analyse a priori de manière à ce qu'elle puisse être interprétée automatiquement — une tâche qui prolonge une « composante classique de la didactique des mathématiques » (Balacheff & Margolinas, 2005, p. 75). Avant de montrer où se situe le travail mathématique lorsqu'un STI s'intègre au milieu instrumenté d'une situation didactique, nous commençons par examiner les composantes fonctionnelles d'un tel système à partir de la classification proposée à la section 3. Cela permettra, dans un second temps, d'en proposer une relecture didactique plus complète, en articulant ces composantes non seulement aux dynamiques du milieu et à l'analyse des productions de l'élève, mais aussi aux dimensions de l'enseignement, telles que la planification, la dévolution, l'institutionnalisation et les formes de guidage rendues possibles par l'IA.

Un système tuteur intelligent (STI) classique repose sur quatre composantes fonctionnelles principales : une interface pour l'interaction avec l'élève, un modèle de l'apprenant pour suivre l'évolution de ses connaissances et comportements d'apprentissage, un agent tuteur chargé de sélectionner les interventions didactiques les plus pertinentes, et un référentiel du domaine qui encode les contenus mathématiques et les logiques de résolution (Fig. 9). Ces composantes mobilisent différentes formes d'intelligence artificielle. L'interface peut inclure des capteurs d'entrée, des extracteurs d'information et des modules de restitution. Le modèle de l'apprenant repose sur une modélisation dynamique des données, qui actualise en continu son profil pour permettre une personnalisation adaptative de l'accompagnement. L'agent tuteur, quant à lui, utilise des moteurs de raisonnement pour proposer les prochaines étapes de résolution. Enfin, le référentiel du domaine regroupe des représentations symboliques, des exemples résolus et des schémas d'erreurs fréquentes, utilisés pour ajuster les interventions à la situation de l'élève.

La personnalisation assurée par les STI repose sur des mécanismes adaptatifs qui ajustent le contenu, le niveau de difficulté et les rétroactions en fonction des interactions observées. À mesure que l'élève interagit avec le système, ses actions sont enregistrées, interprétées, puis intégrées au modèle de l'apprenant. Ce profil évolutif permet de recommander des tâches plus ciblées, de détecter certaines conceptions erronées, voire des obstacles, ou de déclencher des soutiens spécifiques. Si certains systèmes se fondent sur des règles explicites, les plus récents recourent à des modèles prédictifs pour anticiper les besoins d'apprentissage et optimiser l'enchaînement, le

rythme et l'individualisation des itinéraires d'apprentissage. Ces ajustements visent à concilier le guidage algorithmique avec le maintien d'une autonomie significative dans le processus de résolution.

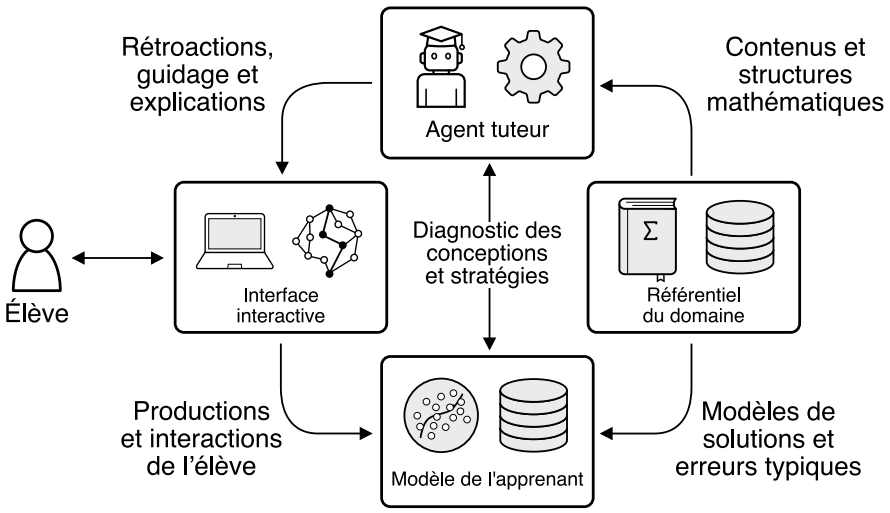


Figure 9. Schéma fonctionnel d'un système tuteur intelligent (STI), illustrant les principaux flux d'information entre l'élève, l'interface, le modèle de l'apprenant, le domaine de connaissances et le module tuteur. Cette structuration technique sert de point d'appui à une relecture didactique plus complète du travail mathématique.

Plusieurs plateformes développées par le secteur privé illustrent aujourd'hui la mise en œuvre à grande échelle des principes des systèmes tutoriels intelligents. Par exemple, Squirrel AI s'appuie sur une modélisation fine du profil de l'apprenant pour adapter en temps réel ses interventions didactiques instrumentées, tout en déléguant certaines fonctions complexes à des tuteurs humains. Ce dispositif automatise l'évaluation, détecte des erreurs conceptuelles et propose des itinéraires d'apprentissage personnalisés. Des systèmes similaires pourraient également intégrer des modèles multimodaux avancés capables d'analyser les réponses manuscrites des élèves, fournissant ainsi des rétroactions précises sur leur raisonnement, c'est-à-dire en référence au processus de pensée de l'élève.

Plus récemment, l'intégration de l'IA générative a considérablement enrichi les capacités interactives des STI. Khanmigo, lancé par Khan Academy en 2023, associe une interface conversationnelle propulsée par GPT-4 à une logique adaptative. Il simule l'action tutrice d'un enseignant expérimenté, guidant l'élève au moyen d'indices, de relances et de questions ouvertes, sans jamais fournir directement la réponse, afin de favoriser la réflexion et l'élaboration autonome des solutions. Khanmigo propose également un mode dédié aux enseignants, les assistant dans la création de plans de cours, la préparation de matériel pédagogique et la génération de rapports de progression, leur permettant ainsi de se concentrer davantage sur l'enseignement personnalisé. Cela dit, l'intégration de ces outils dans un véritable projet didactique demeure tributaire d'une réflexion approfondie sur les finalités visées, les interactions humaines et les conditions concrètes du travail mathématique.

Les systèmes tuteurs intelligents reproduisent, de manière instrumentée, certaines fonctions traditionnellement associées au rôle de l'enseignant, à travers des dispositifs algorithmiques et des structures d'interaction automatisées. Si cette reproduction permet une personnalisation guidée par l'analyse des données, elle transforme en profondeur la nature des interactions didactiques — centrées sur l'enseignement explicite — et adidactiques, où l'élève apprend en résolvant de manière autonome des situations conçues pour susciter l'émergence de savoirs. Il est essentiel de prendre du recul pour interroger les capacités techniques du STI, en lien avec la situation générale, ainsi que les modalités selon lesquelles il contribue aux projets où l'enseignement et l'apprentissage s'articulent dans une dynamique de nouveau travail mathématique. Cette mise en perspective implique de dépasser la seule architecture fonctionnelle pour considérer son rôle dans la configuration du milieu, les formes de validation mobilisées, et les genèses sémiotique, instrumentale et discursive engagées.

La Figure 10 propose une telle lecture, en articulant les composantes techniques d'un STI aux deux grandes dimensions du travail mathématique à l'école : l'une tournée vers l'enseignement, l'autre vers l'apprentissage. Le schéma s'inspire de la théorie des situations didactiques, en plaçant l'enseignant et le système élève-milieu dans un double rapport d'interactions : les interactions didactiques (enseignant— [élève-milieu]) et les interactions adidactiques (élève-milieu). Dans un système instrumenté par l'IA, ces deux types d'interactions sont simulées sous forme d'interactions didactiques et adidactiques instrumentales, encapsulées dans les médiations algorithmiques assurées par les quatre composantes du STI : le milieu virtuel (MV), le modèle de l'apprenant (MA), le référentiel du domaine (RD) et l'agent tuteur (AT).

Chacune de ces composantes joue un rôle fonctionnel dans la structuration du milieu et l'accompagnement du travail mathématique. L'AT interprète les productions de l'élève (évaluation instrumentale) et génère les messages d'accompagnement, simulant ainsi une intervention didactique. Le MA encode les conceptions, stratégies et obstacles identifiés à partir des données d'interaction. Le RD structure les savoirs, les problèmes et les itinéraires possibles. Quant au MV, il articule les interactions entre l'élève et le système tuteur en reproduisant, de manière instrumentée, les conditions d'une interaction adidactique dans un cadre où la réactivité algorithmique peut infléchir l'initiative du sujet, en la soutenant ou en la limitant selon les configurations.

Dans cette interaction sujet-milieu ainsi instrumentée, l'élève conserve l'initiative du questionnement et ne reçoit pas simplement des réponses comme des oracles, mais bien des échos à ses actions, sous forme de résonances cognitives et de signaux épistémiques. Ces échos, dont il lui revient d'interpréter la portée dans son projet, contribuent à une régulation autonome de son activité, où les genèses engagées peuvent parfois se brouiller, mais aussi se renforcer mutuellement, à condition que l'interaction soit idoine. Ce déplacement du centre de gravité du travail mathématique invite à penser la personnalisation non comme une délégation automatisée du geste enseignant, mais comme un processus d'accompagnement renouvelé, enraciné dans la configuration du milieu et orienté vers l'autonomie épistémique du sujet.

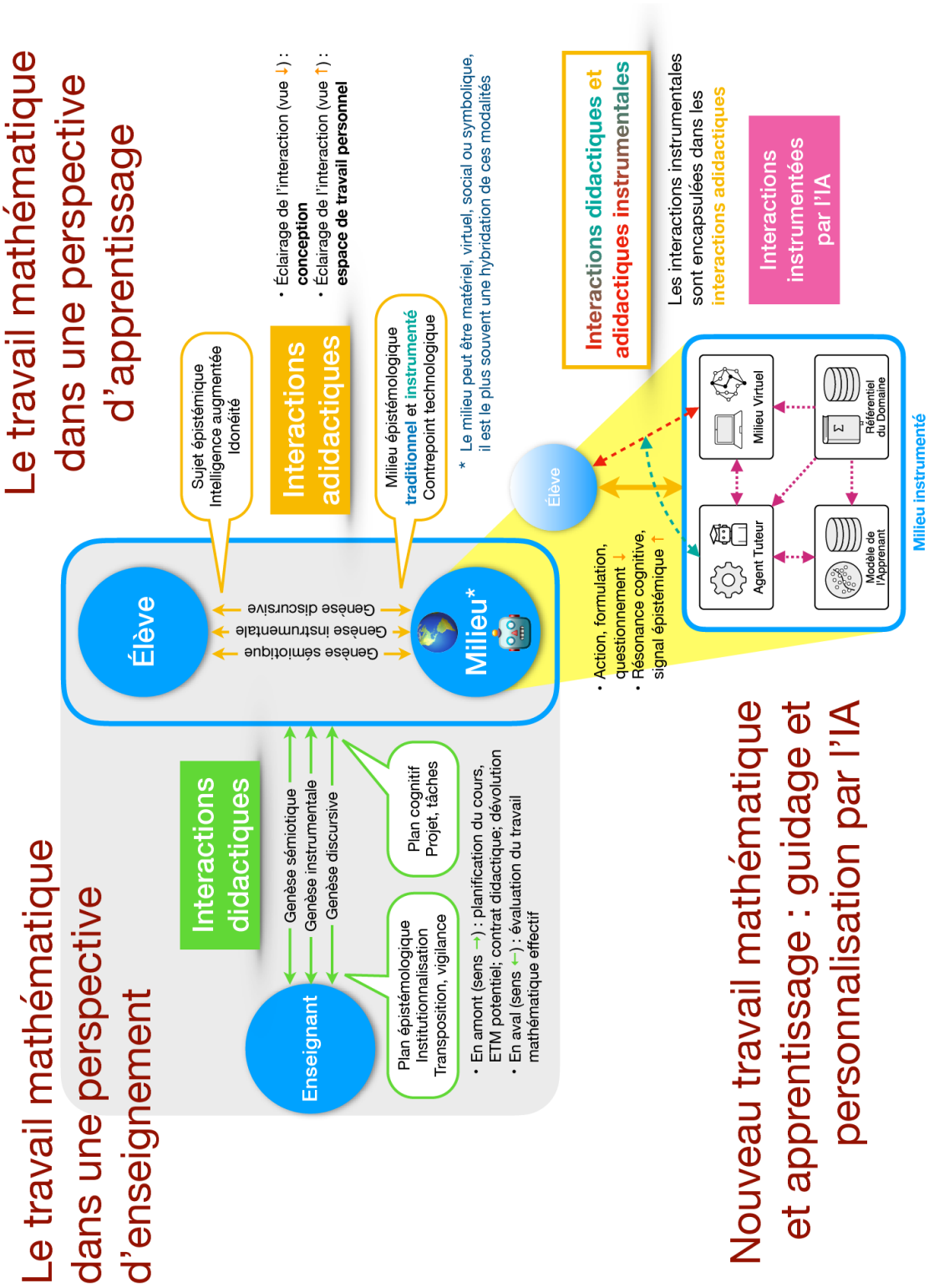


Figure 10. Articulation des rôles, fonctions et types d'interactions dans un milieu instrumenté avec un STI, en lien avec le travail mathématique, selon une lecture conjointe des TSD et The TM, avec clés de lecture épistémologiques et cognitives.

Pratique mathématique et découverte de théorèmes

Alors que de nombreuses applications mathématiques basées sur l'IA se concentrent sur le soutien à l'apprentissage ou le calcul automatisé, un nombre croissant d'outils émergents facilitent directement la découverte mathématique et la construction de preuves. Bien que ces outils soient principalement expérimentaux, ils offrent des perspectives prometteuses, que ce soit pour l'enseignement des mathématiques ou dans la recherche, aussi bien en didactique qu'en mathématiques. Un exemple notable est l'utilisation de Lean, un langage de programmation fonctionnel et un assistant de preuve interactif conçu pour formaliser et vérifier les preuves mathématiques. Bien que Lean ne puisse pas résoudre de manière autonome les problèmes ouverts, il joue un rôle central dans la formalisation collaborative des mathématiques. Ainsi, les mathématiciens utilisant Lean contribuent à *mathlib*, une bibliothèque communautaire de résultats formalisés, qui s'élargit progressivement pour constituer un répertoire numérique exhaustif de connaissances mathématiques.

Le travail de formalisation nécessite souvent une compréhension approfondie des structures logiques et des dépendances, et l'acte d'encoder un résultat dans Lean est devenu une forme significative de travail mathématique en soi. Lean intègre également des formes de base d'automatisation grâce à des fonctionnalités qui agissent comme des moteurs de raisonnement, allégeant ainsi les utilisateurs des manipulations de routine. Un bel exemple de contrepoint technologique et de flux de travail conjoint émerge : le mathématicien fournit des orientations stratégiques et de l'intuition, tandis que le système gère les étapes plus petites et formellement vérifiables.

Au-delà des systèmes formels comme Lean, qui reposent sur une formalisation rigoureuse des théorèmes, des expériences récentes en recherche mathématique ont exploré une utilisation plus spéculative des GML (grands modèles de langage) pour la découverte de preuves. Une anecdote notable vient du mathématicien Robert Ghrist, qui a raconté avoir utilisé les agents conversationnels GML Claude-3.5, GPT-4 et Gemini pour conjecturer et prouver un nouveau théorème[3]. La preuve correcte a finalement été livrée par le GPT-4o1 mini, à peine après son lancement. Malgré ce succès, Ghrist a noté que le processus avait pris plus de temps que de résoudre le problème sans IA, ce qui reflète la nature expérimentale et tâtonnante des systèmes actuels. Cet exemple illustre un autre type de contrepoint technologique sur le plan travail humain-AI, dans lequel le mathématicien explore un « espace de preuve » latent généré par les GML, sélectionne ou affine des directions prometteuses, et engage une forme de *curation*[4] et d'interprétation des résultats, distincte de la vérification formelle.

---

[3] Ghrist, R. (2024, octobre). Utilisation des chatbots LLM pour la découverte de théorèmes. [Tweet]. X. https://x.com/robertghrist/status/1841462507543949581

[4] La curation désigne le processus de sélection, d'organisation et de présentation de contenus pertinents sur un sujet donné. Dans le contexte des agents conversationnels, elle fait référence à leur capacité à choisir, organiser et analyser les informations pour fournir des réponses adaptées aux besoins de l'utilisateur.

Cette interaction entre l'humain et les GML ouvre de nouvelles perspectives pour l'exploration et la construction des connaissances mathématiques, en particulier dans la recherche de conjectures et de stratégies, sans remplacer les processus rigoureux de validation que permettent les systèmes formels comme Lean.

Les récentes avancées dans les grands modèles de langage (GML) ont encore brouillé la frontière entre outil et collaborateur. Terence Tao, commentant le modèle o1 d'OpenAI, a noté[5] que, bien que le système ait encore des difficultés avec des tâches mathématiques avancées, on pourrait dire qu'il tente « de conseiller un étudiant de 1er cycle universitaire, moyen, mais pas complètement incompétent ». Dans cette optique, le GML ne se substitue pas au raisonnement humain, mais devient un assistant spéculatif : il génère des conjectures, propose des stratégies et esquisse des arguments informels qui peuvent, ou non, s'avérer corrects. Alors que beaucoup de ses résultats échouent à répondre aux exigences formelles, l'interaction avec ces modèles stimule néanmoins une exploration productive. Ce processus d'interaction entre l'humain et l'intelligence artificielle ouvre de nouvelles perspectives pour la recherche mathématique, notamment pour la génération d'hypothèses et l'application d'heuristiques, sans toutefois remplacer les processus rigoureux de validation formelle assurés par des systèmes tels que Lean.

L'intégration de l'IA peut également mener à des outils spécifiquement conçus pour la découverte de nouveaux théorèmes. GeoGebra Discovery illustre cette approche dans le domaine de la géométrie. Construit sur les outils de raisonnement automatisé de GeoGebra, il permet de détecter des propriétés invariantes et de générer — et prouver des conjectures basées sur des constructions créées par l'utilisateur. Bien que les méthodes algébriques sous-jacentes restent invisibles pour l'utilisateur, l'interface favorise une forme d'expérimentation interactive, où les relations géométriques émergent par manipulation et observation. Dans ce cadre, l'IA fonctionne comme un moteur de raisonnement qui interprète les configurations en évolution, offrant des suggestions qui peuvent inciter à de nouvelles investigations ou tester des hypothèses. Cette dynamique d'interaction s'inscrit dans une démarche d'idonéité, où l'utilisateur ajuste son approche en fonction des suggestions de l'outil tout en restant vigilant quant à la validité des résultats et à la cohérence avec les fondements mathématiques.

Rencontres didactiques avec l'IA et développement de la pensée critique

À mesure que les grands modèles de langage (GML), tels que ChatGPT, se déploient et sont largement utilisés pour l'apprentissage et le travail mathématiques, les élèves les rencontrent de plus en plus à la fois en tant qu'outils d'assistance et, paradoxalement, en tant que sources significatives d'erreurs. Comme mentionné dans les sections précédentes, les versions de base de ces modèles produisent des combinaisons linguistiquement plausibles à partir de régularités textuelles, sans

[5] Tao, T. (2024, septembre). Commentaires sur les modèles GPT-o1 d'OpenAI. [Message]. Mathstodon. https://mathstodon.xyz/@tao/113132502735585408

mobiliser une logique mathématique explicite ni une structuration formelle rigoureuse. Cela les amène fréquemment à induire des erreurs, notamment lorsqu'il s'agit d'enchaîner correctement les étapes intermédiaires entre les hypothèses et la conclusion d'un raisonnement.

Du point de vue didactique, cette tension entre fluidité discursive et validité épistémique constitue une occasion précieuse pour développer la pensée critique. Dans un cadre scolaire, les enseignants peuvent mettre à profit les limites des GML comme point de départ d'un questionnement. Une activité typique consiste à présenter une solution mathématique générée par un système d'IA — souvent entachée d'erreurs subtiles — et à inviter les élèves à les repérer, en discuter, puis à proposer des corrections. Ce faisant, les élèves renforcent leur compréhension conceptuelle tout en développant une littératie en IA : la capacité à distinguer la vraisemblance linguistique de la rigueur mathématique attendue dans une solution valide. Bien que de manière encore émergente, cette approche a commencé à être explorée avec rigueur dans certaines pratiques de classe et dans quelques travaux de recherche récents (Rojano, 2024 ; Walkington, 2024).

Dans certains cas, les élèves sont amenés à débattre de la validité de solutions produites par un GML ou à comparer leur raisonnement avec celui de la machine (Richard, 2024a). Ces interactions font émerger des enjeux fondamentaux : le rôle de la justification, la structure des inférences, les critères de validité, ou encore la distinction entre un résultat exact et un raisonnement acceptable. Loin d'être de simples confrontations, ces activités ouvrent un espace de travail dialectique, dans lequel l'élève s'exerce à questionner, argumenter et valider, en interaction avec un artefact qui devient un partenaire imparfait, mais stimulant.

L'enseignant, dans ce contexte, agit comme médiateur d'une interaction sujet-milieu transformée, soutenant une lecture critique des productions de l'IA et guidant les élèves vers une évaluation épistémique des stratégies de résolution. Cette posture rejoint la logique du contrepoint technologique : l'IA, ici, ne se substitue pas au raisonnement humain, mais devient tour à tour déclencheur, partenaire, brouilleur ou opposant dans un processus visant à établir une interaction idoine. En mobilisant des artefacts comme ChatGPT seul ou en combinaison avec Wolfram, ou encore dans des environnements plus autonomes comme AlphaGeometry, l'interaction gagne en fécondité lorsque le sujet assume l'initiative du questionnement et parvient à interpréter, valider ou mettre à distance les réponses de l'IA, à la lumière du projet mathématique en cours.

Au-delà des initiatives menées en classe, des questions plus larges émergent quant à l'usage acceptable de l'IA à l'école. À mesure que les outils d'intelligence artificielle s'intègrent aux pratiques d'apprentissage et d'évaluation, plusieurs chercheurs se penchent sur la création de cadres opérationnels permettant aux enseignants de baliser cette intégration. Parmi ceux-ci, Perkins, Furze et Roe (2024) proposent une Échelle d'Évaluation de l'IA (AI Assessment Scale), qui offre une typologie en cinq niveaux pour situer l'usage de l'IA générative dans les tâches d'évaluation, allant de l'interdiction complète à une exploration librement assumée. De tels outils visent à

aligner l'usage de l'IA sur les finalités d'apprentissage, tout en assurant transparence, cohérence institutionnelle et respect de l'intégrité académique. En contribuant à clarifier les attentes et les possibilités, ce type de cadre peut soutenir une appropriation critique et contextualisée des technologies d'IA, en cohérence avec les projets de formation et les dynamiques du travail mathématique.

Dans l'enseignement des mathématiques, où le raisonnement, la démonstration et la précision sont essentiels, ces questions revêtent une importance particulière. Une prise de conscience grandissante émerge quant à la distinction entre un raisonnement mathématique authentique et les réponses fluides, mais parfois superficielles, générées par les modèles linguistiques d'IA. En aidant les élèves à reconnaître cette différence, les enseignants favorisent non seulement une compréhension rigoureuse des mathématiques, mais encouragent également la pensée critique, une compétence clé dans une ère où le nouveau travail mathématique redéfinit les genèses sémiotique, instrumentale et discursive sous l'influence croissante des systèmes dits « intelligents ». Dans ce contexte, la notion de genèse discursive artificielle (Font, Leduc & Richard, 2023) souligne le rôle de l'IA dans la coconstruction des discours mathématiques, transformant les interactions didactiques (avec l'enseignant) et adidactiques (au sein du système sujet-milieu), et appelant une réflexion approfondie sur l'intégration de ces technologies dans la pratique enseignante.

5. RETOUR THÉORIQUE ET CONCLUSIONS

L'intégration de l'intelligence artificielle dans l'enseignement des mathématiques constitue une occasion unique pour renouveler le travail mathématique et les pratiques éducatives. Cependant, cette évolution s'accompagne de défis majeurs. Comme l'a montré Tainter dans *L'Effondrement des sociétés complexes* (2023), la durabilité des systèmes repose sur la capacité des institutions à résoudre efficacement les problèmes qu'elles rencontrent. Lorsqu'une solution mal adaptée accroît la complexité sans répondre aux besoins essentiels, le système risque de devenir instable, voire de s'effondrer sous le poids de sa propre complexité. Jusqu'ici, les innovations technologiques, comme les modèles informatiques et la rapidité des calculs, peuvent sembler suffisantes au premier abord, mais elles ne peuvent pas croître indéfiniment. Il est impératif de simplifier les processus et de repenser les systèmes pour qu'ils répondent à la fois aux exigences de durabilité et aux défis posés par la complexité croissante.

À l'école, cette problématique prend une tournure particulière, car l'introduction de l'IA dans le système didactique redéfinit les interactions au sein de l'espace de travail mathématique. En transformant la nature même de ce travail, elle soulève inévitablement de nouvelles tensions entre la complexité des interactions et l'efficacité didactique. Ce nouveau travail mathématique, caractérisé par l'interaction dynamique entre l'humain et les artefacts numériques, enrichit l'apprentissage tout en posant des défis épistémologiques et cognitifs spécifiques.

Dans ce contexte, l'introduction de l'IA sans une adaptation rigoureuse pourrait exacerber les tensions entre la complexité des interactions essentielles au sein du système sujet-milieu et l'efficacité didactique, notamment dans les relations qu'entretient l'enseignant avec ce système en constante évolution. Cette efficacité repose, en grande partie, sur la négociation d'un équilibre harmonieux entre le temps didactique (linéaire et finalisé, orienté vers l'enseignement) et le temps d'apprentissage (adaptatif et itératif, permettant l'appropriation progressive des notions).

Pour éviter cet écueil, il faut que les interactions humain-machine soient pertinentes, en prenant en considération les besoins spécifiques du travail mathématique. Ces interactions, qu'elles soient vécues par un sujet qui agit sur la machine, évaluées par un enseignant, interprétées par un chercheur ou anticipées par un concepteur informatique, doivent s'appuyer sur des principes tels que l'intelligence augmentée, l'idonéité et le contrepoint technologique. Ces approches permettent de maintenir une dynamique constructive entre le sujet et les contraintes du milieu, en intégrant les artefacts numériques de manière cohérente et épistémologiquement valable.

Le contrepoint technologique, en particulier, offre un cadre conceptuel précieux lorsqu'il s'agit d'équilibrer la coopération entre les approches symboliques et statistiques de l'IA, au regard du système sujet-milieu. En mettant en avant la complémentarité plutôt qu'une fusion des entités, cette approche invite à tirer parti des spécificités des artefacts numériques tout en préservant les fondements du travail mathématique. Ainsi, l'IA ne doit pas se limiter à un rôle d'outil d'automatisation, mais devenir un partenaire dans l'apprentissage, capable de stimuler le raisonnement, d'enrichir le questionnement et de favoriser l'exploration.

En adoptant une posture critique et adaptative, enseignants, formateurs, chercheurs et concepteurs peuvent concevoir des environnements d'apprentissage et des espaces de travail capables de rester opérationnels face aux imprévus, qu'ils soient techniques, cognitifs ou dus à une surcharge instrumentale. Ces dispositifs doivent aller au-delà de la simple gestion de l'incertitude : ils gagnent à ouvrir de nouvelles perspectives sur le travail mathématique, tout en respectant les fondements épistémologiques et les exigences didactiques. Si la transformation du travail mathématique par l'intelligence artificielle dépasse une évolution purement technologique, c'est parce qu'elle offre une occasion unique de réinventer en profondeur l'enseignement et l'apprentissage, en bâtissant des systèmes capables de s'adapter, d'enrichir les interactions entre apprenants, enseignants et artefacts numériques, et de faire de l'incertitude une véritable source d'opportunités.

En terminant, dans un cours en formation des enseignants de mathématiques, nous avons utilisé l'article de Bruillard et Richard (2024). De façon inattendue, la phrase suivante a retenu l'attention : « L'expert n'est pas forcément un bon enseignant ». La discussion a alors pris une tournure intrigante : avec l'IA moderne, nous avons un enseignant capable d'expliquer clairement, de s'adapter aux erreurs et de guider les élèves, mais qui, paradoxalement, ne comprend rien à ce qu'il enseigne. C'est un retournement fascinant. Cela rappelle le cas d'un lecteur de nouvelles : s'il se concentre

exclusivement sur la clarté de son élocution, il peut livrer un message impeccable sans nécessairement en saisir la profondeur. À l'inverse, un lecteur qui marque des hésitations ou trébuche sur certains mots montre qu'il est en train de réfléchir à ce qu'il dit. Ce contraste illustre bien le défi posé par l'IA en éducation : un enseignant artificiel peut exposer des savoirs avec clarté et cohérence, mais sans l'ancrage cognitif et épistémologique qui donne sens au travail mathématique.

Ce phénomène illustre ce que l'on pourrait appeler le *paradoxe de la fonction comme justification* : dans certains cas, le fait qu'un modèle génératif remplisse une fonction assignée — expliquer, guider, corriger — suffit à légitimer son autorité, indépendamment de toute compréhension conceptuelle réelle. Ce glissement, où la forme prime sur le fond, peut engendrer une forme subtile d'autoritarisme technologique : la machine est crue non parce qu'elle pense, mais parce qu'elle parle bien et paraît bien — à l'interface comme dans la structure du discours. Pourtant, dans le cadre du travail mathématique, les fonctions explicatives, démonstratives ou exploratoires doivent rester au service du projet qui les motive et des tâches qui leur donnent sens, au sein d'une interaction sujet-milieu informée sur le plan épistémologique. Sans cette articulation fine, la fonction risque de devenir une justification en soi, alors qu'elle doit demeurer au service d'un processus de questionnement, d'exploration et d'appropriation mathématique mené par le sujet.

Cependant, dans un cadre didactique rigoureux, même un artefact imparfait, comme un modèle génératif, peut devenir un partenaire d'apprentissage stimulant lorsque les interactions qu'il suscite amènent l'élève à interroger, argumenter et valider les connaissances avec lesquelles il travaille. Il convient toutefois de distinguer ces usages de ceux où la fonction, bien exécutée — comme dans les démonstrateurs automatiques ou les outils de diagnostic — ne vise pas à simuler une activité d'enseignement, mais à soutenir un processus plus large, à condition d'être intégrée avec lucidité dans le milieu didactique. Ainsi, le paradoxe de la fonction comme justification concerne avant tout les situations où une opération algorithmique est interprétée comme un acte éducatif en soi, sans médiation critique.

Un enjeu fondamental réside dans l'interprétation spontanée, par le sujet humain, de productions purement syntaxiques comme porteuses de sens : l'élève reconstruit une cohérence sémantique là où la machine n'opère qu'un traitement probabiliste des formes. Ce transfert de sens, rendu possible par l'activité interprétative du sujet, donne parfois à l'artefact une profondeur qu'il ne possède pas intrinsèquement. Il en résulte un curieux renversement : c'est le sujet, en prêtant sens aux productions du système, qui comble les lacunes de celui-ci — et non l'inverse. Ce phénomène, aussi puissant que fragile, mérite d'être reconnu non comme un miracle, mais comme une exigence du nouveau travail mathématique à l'ère de l'IA.

L'enjeu est donc d'exploiter les forces de l'intelligence artificielle tout en préservant la richesse du raisonnement humain et la profondeur de l'apprentissage. Cela implique, entre autres, d'imaginer des systèmes qui rendent visibles leurs propres limites, de soutenir les enseignants dans l'équilibre entre efficacité fonctionnelle et rigueur

épistémologique, et d'ouvrir des espaces de formation où enseignants et élèves puissent apprendre à interagir avec les artefacts numériques de manière critique, réflexive et mathématiquement signifiante.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

Balacheff, N. (1994). *Didactique et intelligence artificielle*. Grenoble : La Pensée Sauvage.

Balacheff, N. (2022). Foreword. In P. R. Richard, M. P. Vélez, & S. Van Vaerenbergh (Eds.), *Mathematics Education in the Age of Artificial Intelligence: How Artificial Intelligence Can Serve Mathematical Human Learning* (pp. v-x). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-86909-0

Balacheff, N., & Kaput, J. J. (1996). Computer-based learning environments in mathematics. In A. J. Bishop *et al.* (Eds.), *International Handbook of Mathematics Education* (pp. 469-501). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-009-1465-0_14

Balacheff, N., & Margolinas, C. (2005). cK¢ : Modèle de connaissances pour le calcul de situations didactiques. In A. Mercier & C. Margolinas (Eds.), *Balises pour la didactique des mathématiques* (pp. 75-106). La Pensée Sauvage.

Bloom, B. S. (1984). The 2 sigma problem: The search for methods of group instruction as effective as one-to-one tutoring. *Educational Researcher, 13*(6), 4-16. https://doi.org/10.3102/0013189X013006004

Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. Grenoble : La Pensée Sauvage.

Bruillard, É., & Richard, P. R. (2024). Informatique, mathématiques, conception et usage des technologies numériques. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, Thématique 2*, 173-208. https://doi.org/10.4000/11sga

Bubeck, S., Chandrasekaran, V., Eldan, R., Gehrke, J., Horvitz, E., Kamar, E., Lee, P., Lee, Y. T., Li, Y., Lundberg, S., Nori, H., Palangi, H., Ribeiro, M. T., & Zhang, Y. (2023, mars). *Sparks of artificial general intelligence: Early experiments with GPT-4*. arXiv. https://doi.org/10.48550/arXiv.2303.12712

Chevallard, Y. (1991). *La transposition didactique : Du savoir savant au savoir enseigné*. Grenoble : La Pensée Sauvage.

Coutat, S., Laborde, C., & Richard, P. R. (2016). L'apprentissage instrumenté de propriétés en géométrie : propédeutique à l'acquisition d'une compétence de démonstration. *Educational Studies in Mathematics, 93*(2), 195-221. https://doi.org/10.1007/s10649-016-9684-9

Danguy-Pichette, E., & Richard, P. R. (2025). Étude préliminaire de l'IA hybride pour un meilleur contrôle du référentiel dans la réalisation du travail mathématique. À paraître dans les actes de l'ETM8. Disponible sur : https://etm8.unican.es/

Emprin, F., & Richard, P. R. (2023). Intelligence artificielle et didactique des mathématiques : état des lieux et questionnements. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 28*, 131-181. https://doi.org/10.4000/adsc.2678

Engelbart, D. C. (1962). *Augmenting Human Intellect: A Conceptual Framework*. Summary Report, Stanford Research Institute, on Contract AF 49(638)-1024, October 1962, 134 pages. Disponible sur : https://www.dougengelbart.org/pubs/augment-3906.html

Flores Salazar, J. V., Gaona, R. M., & Richard, P. R. (2022). Mathematical Work and Beyond. In A. Kuzniak, E. Montoya-Delgadillo, & P. R. Richard (Eds.), *Mathematical Work in Educational Context: The Perspective of the Theory of Mathematical Working Spaces* (pp. 267-286). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-90850-8_12

Font, L., Leduc, N., & Richard, P. R. (2023). Genèse discursive artificielle : l'IA au service de la didactique des mathématiques. In C. Derouet, A. Nechache, P. R. Richard, L. Vivier, I. M. Gómez-Chacón, A. Kuzniak, M. Maschietto, & E. Montoya Delgadillo (Eds.), *Actes du septième symposium d'Étude sur le Travail Mathématique* (pp. 225-233). IREM de Strasbourg.

García-Honrado, I., Fortuny-Aymemi, J. M., Recio, T., & Richard, P. R. (2025). Émergence de l'art de l'argumentation : L'instrumentation de l'IA dans la formation des enseignants de mathématiques. À paraître dans les actes de l'ETM8. Disponible sur : https://etm8.unican.es/

Gonseth, F. (2022). *La géométrie et le problème de l'espace* (Réédition en un volume des ouvrages publiés entre 1945 et 1955). St-Imier, Suisse : Association F. Gonseth.

Kovács, Z., Recio, T., & Vélez, M. P. (2021). Automated reasoning tools in GeoGebra discovery. *ACM Communications in Computer Algebra, 55*(2), 39-43. https://doi.org/10.1145/3493492.3493495

Kuzniak, A., Montoya-Delgadillo, E., & Richard, P. R. (Eds.). (2022). *Mathematics Education in the Age of Artificial Intelligence*. Mathematics Education in the Digital Era, Vol. 18. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-90850-8

Lagrange, J.-B., Richard, P. R., Vélez, M. P., & Van Vaerenbergh, S. (2023). Artificial Intelligence Techniques in Software Design for Mathematics Education. In B. Pepin, G. Gueudet, & J. Choppin (Eds.), *Handbook of Digital Resources in Mathematics Education* (pp. 969-999). Springer International Handbooks of Education. https://doi.org/10.1007/978-3-031-45667-1_37

Mirzadeh, I., Alizadeh, K., Shahrokhi, H., Tuzel, O., Bengio, S., & Farajtabar, M. (2024). *GSM-Symbolic: Understanding the limitations of mathematical reasoning in large language models*. arXiv. https://doi.org/10.48550/arXiv.2410.05229

OCDÉ. (2019). *L'intelligence artificielle dans la société*. Éditions OCDE. https://doi.org/10.1787/b7f8cd16-fr

Perkins, M., Furze, L., Roe, J., & MacVaugh, J. (2024). The Artificial Intelligence Assessment Scale (AIAS): A framework for ethical integration of generative AI in educational assessment. *Journal of University Teaching and Learning Practice, 21*(6), 49-66. https://doi.org/10.53761/q3azde36

Richard, P. R. (2024a). The challenges of AI in shaping mathematical work: From human hybridization to automation through synergies of symbolic AI and generative models. In K. W. Kosko, J. Caniglia, S. A. Courtney, M. Zolfaghari, & G. A. Morris (Eds.), *Proceedings of the Forty-Sixth Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 2213-2226). Kent State University.

Richard, P. R. (2024b). El nuevo trabajo matemático: Un desafío en constante renovación para la educación matemática. *UCMaule*, *67*(1), 9-30. Éditions UCMaule. https://doi.org/10.29035/ucmaule.v67i1.9

Richard, P. R., Vélez, M. P., & Van Vaerenbergh, S. (Eds.). (2022). *Mathematics Education in the Age of Artificial Intelligence: How Artificial Intelligence Can Serve Mathematical Human Learning*. Mathematics Education in the Digital Era, Vol. 17. Cham: Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-86909-0

Richard, P. R., Venant, F., & Gagnon, M. (2019). Issues and Challenges in Instrumental Proof. In G. Hanna, D. Reid, & M. de Villiers (Eds.), *Proof Technology in Mathematics Research and Teaching*. Mathematics Education in the Digital Era, Vol. 14, pp. 139-172. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-030-28483-1_7

Rodríguez, J. L. (2022). Exploring Dynamic Geometry Through Immersive Virtual Reality and Distance Teaching. In P. R. Richard, M. P. Vélez, & S. Van Vaerenbergh (Eds.), *Mathematics Education in the Age of Artificial Intelligence* (pp. 343-363). Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-030-86909-0_15

Rojano, T. (2024). Research and the new AI tools meet face to face: Taking advantage of what we know about the learning of mathematics. In K. W. Kosko, J. Caniglia, S. A. Courtney, M. Zolfaghari, & G. A. Morris (Eds.), *Proceedings of the Forty-Sixth Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 2236-2248). Kent State University.

Shah, C., & Bender, E. M. (2022, mars). *Situating search*. Dans *Proceedings of the 2022 Conference on Human Information Interaction and Retrieval* (pp. 221-232). Association for Computing Machinery. https://doi.org/10.1145/3498366.3505816

Sheth, A., Roy, K., & Gaur, M. (2023). Neurosymbolic artificial intelligence (why, what, and how). *IEEE Intelligent Systems, 38*(3), 56-62. https://doi.org/10.1109/MIS.2023.3268724

Tainter, J. A. (2023). *L'effondrement des sociétés complexes*. Culture et Racines.

Trinh, T. H., Wu, Y., Le, Q. V., He, H., & Luong, T. (2024). Solving olympiad geometry without human demonstrations. *Nature, 625*(7995), 476-482. https://doi.org/10.1038/s41586-023-06747-5

Van Vaerenbergh, S., & Pérez-Suay, A. (2022). A classification of artificial intelligence systems for mathematics education. In P. R. Richard, M. P. Vélez, S. Van Vaerenbergh, & A. Pérez-Suay (Eds.), *Mathematics education in the age of artificial intelligence: How artificial intelligence can serve mathematical human learning* (pp. 89-106). Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-030-86909-0_5

Walkington, C. (2024). The implications of generative artificial intelligence for mathematics education. In K. W. Kosko, J. Caniglia, S. A. Courtney, M. Zolfaghari, & G. A. Morris (Eds.), *Proceedings of the Forty-Sixth Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 2249-2262). Kent State University.

Wei, J., Wang, X., Schuurmans, D., Bosma, M., Ichter, B., Xia, F., Chi, E., Le, Q. V., & Zhou, D. (2022). Chain-of-thought prompting elicits reasoning in large language models. *Advances in Neural Information Processing Systems, 35*, 24824-24837. https://doi.org/10.48550/arXiv.2201.11903

Wolfram, S. (2023, 23 mars). ChatGPT gets its "Wolfram superpowers"! *Stephen Wolfram Writings*. Consulté le 12 octobre 2024, à l'adresse https://writings.stephenwolfram.com/2023/03/chatgpt-gets-its-wolfram-superpowers/

THÈME 1 : PERSPECTIVES ET APPROCHES THÉORIQUES SUR LE TRAVAIL MATHÉMATIQUE

Assia Nechache[*], Patrick Gibel[**]

[*]CY Cergy Paris Université, LDAR (France)

[**]Université de Bordeaux, LAB-E3D (France)

Depuis ETM3, le thème 1 s'intéresse aux aspects théoriques et méthodologiques du travail mathématique liés à la définition, à la construction et à la mise en œuvre de connaissance mathématique. Originellement centré sur l'approfondissement des perspectives propres à la théorie des Espaces de Travail Mathématique (ETM), depuis ETM5, ce thème vise à étudier le travail mathématique par le prisme d'autres cadres théoriques de référence ; de ce fait, les études présentées par les participants réfèrent à différentes approches théoriques.

SUJET DES CONTRIBUTIONS

Lors d'ETM8, huit communications ont été retenues. Voici la liste des communications retenues avec l'ordre et la date de leur présentation.

Date	Présenté par	Titre
Lundi 21 octobre après midi : Thème ETM de probabilités et de statistiques	Pédro Vidal-Szabó	1. Espacio de trabajo estadistico y el paradigma E1 : nuevas perspectivas didacticas
	Assia Nechache	2. L'évolution de l'ETM probabiliste de référence au cours de l'enseignement secondaire en France A. Nechache & B. Parzysz
Mardi 22 octobre matin Thème: Qualité du travail et le networking	Alain Kuzniak Assia Nechache	3. Évaluer la qualité du travail mathématique des étudiants à travers le regard de la théorie des ETM : La perspective du chercheur A. Kuzniak & A. Nechache
	Katherine Machuca	4. Implementacion de un diseno didactico para introducir la integral definida en estudiantes de ingenieria desde dos perspectivas teoricas : ETM y TAD Machuca, K & Carrasco, P

Mardi 22 octobre après midi Thème : enseignement supérieur	Philippe Hoppenot	5. Paradigmes de l'algèbre élémentaire pour l'étude du travail mathématique- Exemples significatifs P. Hoppenot
	Fabrice Vandebrouck	6. Visualizaciones, construcciones: ¿De qué actividades matematicas se trata? Límites de funciones en 1er año de universidad F. Vandebrouck, F & M.Flores González
Mercredi 23 octobre: Fin des présentations	Norma Segura-Corella	7. Vers l'ETM de référence entre les nombres et la géométrie : le cas du système éducatif costaricien N. Segura-Corella
	Alejandro Cabrera-Baquedano	8. Conceptualized mathematical work Cabrera-Baquedano, A; Montoya, E; Vandebrouck, F; Vivier, L
Jeudi 24 octobre après midi Synthèse Thème 1.		

Les recherches présentées et débattues dans le cadre du thème 1 sont en lien étroit avec plusieurs concepts théoriques en lien avec la question du développement du travail mathématique dans le contexte éducatif :

Le premier porte sur *les paradigmes* qui sont essentiels dans la théorie des ETM et qui ont déjà fait l'objet de maintes contributions lors des précédents symposiums. Dans le domaine de l'algèbre, Philippe Hoppenot propose de scinder le deuxième paradigme, habituellement vu comme un ensemble homogène, en deux parties distinctes, offrant ainsi une vision plus nuancée et détaillée. Du côté des statistiques, une réflexion est engagée par Pédro Vidal-Szabó, sur le premier paradigme avec une distinction entre statistiques et mathématiques en tant que disciplines indépendantes. Il introduit la notion de genèse discursive de la preuve, qui met en lumière l'importance du contexte dans lequel une démonstration prend forme, suggérant que la nature même de la preuve dépend du contexte dans lequel elle est produite.

La deuxième porte sur *l'ETM de référence* avec la nécessité de prendre en compte le contexte culturel pour mieux saisir cet ETM. Dans le domaine des probabilités, Assia Nechache et Bernard Parzysz analysent, en prenant appui sur des tâches

emblématiques, la façon dont l'ETM probabiliste de référence se construit à partir des paradigmes épistémologiques. Norma Segura-Corella pose la question de savoir si l'on doit considérer un ETM de référence unique qui intègre à la fois les deux domaines : nombre et la géométrie, ou bien si cette connexion entre ces deux domaines doit être perçue comme une interaction ou une connexion entre deux ETM de référence distincts: celui du Nombre et celui de la Géométrie.

Le troisième est celui du *networking* et les divers niveaux d'intégration locale soulignent la complexité des relations entre le travail mathématique et la construction des connaissances. À travers la perspective de la TA, Alejandro Cabrera-Baquedano a exploré le lien essentiel entre le travail mathématique et la manière dont les connaissances se construisent. Cela a ouvert un espace pour interroger la dynamique des apprentissages, une réflexion menée par Fabrice Vandebrouck. Ces deux approches, ont donc permis de poser des questions cruciales sur la manière dont les apprenants acquièrent et conceptualisent les notions mathématiques. Katherine Machucca pose la question de la mise en réseau des deux approches théoriques : TAD et ETM, en se centrant sur la complémentarité potentielle entre les organisations mathématiques et le travail mathématique. L'objectif est alors de rendre compte de la dimension cognitive du travail mathématique effectif des étudiants.

Le quatrième est inhérent à **la notion de contrôle**, une notion qui a emergé dans les symposiums des ETM 6 et ETM7 avec les travaux de Kuzniak et Nechache. A travers, la TA, Fabrice Vandebrouck a précisé le rôle du contrôle dans le processus d'enseignement-apprentissage, soulignant notamment l'importance de la régulation entre le formalisme des mathématiques et la compréhension des concepts. Cette réflexion a été enrichie par la convergence des points de vue entre Assia Nechache et Fabrice Vandebrouck, qui ont mis en lumière les interactions entre les contrôles syntaxiques (qui concernent la structure des raisonnements mathématiques) et sémantiques (relatifs à la signification et à l'interprétation des concepts).

Nous remercions particulièrement Norma Segura-Corella et Alejandro Cabrera-Baquedano d'avoir permis les échanges au sein de ce groupe, en faisant les traductions Espagnol-Français.

TEMA 1: PERSPECTIVAS Y ENFOQUES TEÓRICOS SOBRE EL TRABAJO MATEMÁTICO

Assia Nechache[*], Patrick Gibel[**]

[*]CY Cergy Paris Université, LDAR (France)

[**]Université de Bordeaux, LAB-E3D (France)

Desde el ETM3, el tema 1 se centra en los aspectos teóricos y metodológicos del trabajo matemático relacionados con la definición, la construcción y la aplicación de los conocimientos matemáticos. Centrado inicialmente en la profundización de las perspectivas propias de la teoría de los Espacios de Trabajo Matemático (ETM), desde el ETM5 este tema tiene como objetivo estudiar el trabajo matemático a través del prisma de otros marcos teóricos de referencia. Por ello, los estudios presentados por los participantes hacen referencia a diferentes enfoques teóricos.

TEMA DE LAS CONTRIBUCIONES

En ETM8 se seleccionaron ocho comunicaciones. A continuación, se incluye la lista de las comunicaciones seleccionadas con el orden y la fecha de su presentación.

Fecha	Presentado por	Título
Lunes 21 de octubre por la tarde: Tema: ETM de probabilidades y estadística.	Pédro Vidal-Szabó	1. Espacio de trabajo estadístico y el paradigma E1: nuevas perspectivas didácticas
	Assia Nechache	2. L'évolution de l'ETM probabiliste de référence au cours de l'enseignement secondaire en France A. Nechache & B. Parzysz
Martes 22 de octubre por la mañana Tema: Calidad del trabajo y networking	Alain Kuzniak Assia Nechache	3. Évaluer la qualité du travail mathématique des étudiants à travers le regard de la théorie des ETM : La perspective du chercheur A. Kuzniak & A. Nechache
	Katherine Machuca	4. Implementación de un diseño didáctico para introducir la integral definida en estudiantes de ingeniería desde dos perspectivas teóricas: ETM y TAD Machuca, K & Carrasco, P

Martes 22 de octubre por la tarde Tema: formación superior	Philippe Hoppenot	5. Paradigmes de l'algèbre élémentaire pour l'étude du travail mathématique- Exemples significatifs P. Hoppenot
	Fabrice Vandebrouck	6. Visualizaciones, construcciones: ¿De qué actividades matemáticas se trata? Límites de funciones en 1er año de universidad F. Vandebrouck, F & M.Flores González
Miércoles 23 de octubre: Fin de las presentaciones.	Norma Segura-Corella	7. Vers l'ETM de référence entre les nombres et la géométrie : le cas du système éducatif costaricien N. Segura-Corella
	Alejandro Cabrera-Baquedano	8. Conceptualized mathematical work Cabrera-Baquedano, A; Montoya, E; Vandebrouck, F; Vivier, L
Jueves 24 de octubre por la tarde Resumen Tema 1.		

Las investigaciones presentadas y las discusiones que suscitaron en el marco del tema 1 están estrechamente relacionadas con varios conceptos teóricos vinculados al desarrollo del trabajo matemático en el contexto educativo:

El primero se refiere a *los paradigmas* que son esenciales en la teoría de las ETM y que ya han sido objeto de numerosas contribuciones en simposios anteriores. En el ámbito del álgebra, Philippe Hoppenot propone dividir el segundo paradigma, que suele considerarse un conjunto homogéneo, en dos partes distintas, ofreciendo así una visión matizada y detallada. En cuanto a la estadística, Pedro Vidal-Szabó reflexiona sobre el primer paradigma, distinguiendo la estadística y las matemáticas como disciplinas independientes. Introduce el concepto de génesis discursiva de la prueba, que pone de relieve la importancia del contexto en el que se forma una demostración, sugiriendo que la naturaleza misma de la prueba depende del contexto en el que se produce.

El segundo se centra en *el ETM de referencia* y en la necesidad de tener en cuenta el contexto cultural para comprender mejor este ETM. En el ámbito de las probabilidades, Assia Nechache y Bernard Parzysz analizan, basándose en tareas emblemáticas, cómo

se construye el ETM probabilístico de referencia a partir de paradigmas epistemológicos. Norma Segura-Corella plantea la cuestión de si se debe considerar un ETM de referencia único que integre ambos dominios matemáticos: números y geometría, o bien, si esta conexión entre ambos debe percibirse como una interacción entre dos ETM de referencia distintos: el de números y el de geometría.

El tercero es el del *networking*, los diversos niveles de integración local subrayan la complejidad de las relaciones entre el trabajo matemático y la construcción del conocimiento. Desde la perspectiva de la TA, Alejandro Cabrera-Baquedano ha explorado el vínculo esencial entre el trabajo matemático y la forma en que se construye el conocimiento. Esto ha abierto un espacio para cuestionar la dinámica del aprendizaje, una reflexión llevada a cabo por Fabrice Vandebrouck. Estos dos enfoques han permitido plantear preguntas cruciales sobre la forma en que los estudiantes adquieren y conceptualizan los conceptos matemáticos. Katherine Machucca, por su parte, plantea la cuestión de la interconexión entre los dos enfoques teóricos: TAD y ETM, centrándose en la complementariedad potencial entre las organizaciones matemáticas y el trabajo matemático. El objetivo es dar cuenta de la dimensión cognitiva del trabajo matemático efectivo de los estudiantes.

El cuarto es inherente a **la noción de control**, una noción que surgió en los simposios ETM6 y ETM7 con los trabajos de Kuzniak y Nechache. A través de la TA, Fabrice Vandebrouck precisó el rol del control en el proceso de enseñanza-aprendizaje, subrayando en particular la importancia de la regulación entre el formalismo de las matemáticas y la comprensión de los conceptos. Esta reflexión se ha enriquecido con la convergencia de puntos de vista entre Assia Nechache y Fabrice Vandebrouck, que han puesto de relieve las interacciones entre los controles sintácticos (que se refieren a la estructura del razonamiento matemático) y semánticos (relativos al significado y la interpretación de los conceptos).

Agradecemos particularmente a Norma Segura-Corella y Alejandro Cabrera-Baquedano por haber facilitado los intercambios dentro de este grupo, realizando las traducciones español-francés.

ESPACIO DE TRABAJO ESTADÍSTICO Y EL PARADIGMA *E1*: NUEVAS PERSPECTIVAS DIDÁCTICAS

Pedro Vidal-Szabó

Departamento de Ciencias Exactas, Campus Osorno; Universidad de los Lagos

La estadística no es una rama de la matemática, sino una disciplina independiente con fundamentos propios; diferenciación crucial en el ámbito educativo, ya que enriquece el análisis didáctico vinculado a la educación estadística al reconocer la singularidad del trabajo estadístico. El propósito de esta contribución es analizar los avances conceptuales del modelo Espacio de Trabajo Estadístico (ETE) y del paradigma E1, mediante una revisión de la literatura. Se busca responder: ¿qué características tiene el espacio de trabajo estadístico? ¿Qué características tiene el paradigma E1? Estas implicaciones promueven el desarrollo del pensamiento estadístico desde una temprana formación escolar, integrando el análisis exploratorio de datos (EDA) como una herramienta clave para la toma de decisiones basada en datos.

INTRODUCCIÓN

"[La estadística] es un método fundamental porque los datos, la variación y el azar están omnipresentes en la vida moderna. Esta es una disciplina independiente con sus propias ideas centrales (...)" (Moore, 1998, p. 1254); no obstante, persisten definiciones que caracterizan a la estadística como una rama de la matemática. En palabras de Cobb y Moore (1997), "como la economía y la física, la estadística hace un uso intensivo y esencial de las matemáticas, pero tiene su propio territorio que explorar y sus propios conceptos básicos para guiar la exploración" (p. 814). Los datos —esenciales para la estadística al igual que sus representaciones— permiten la comunicación de información de interés y fundamentan decisiones en base a hechos reales. Una persona con conocimientos sobre datos puede identificarlos, recopilarlos, evaluarlos, analizarlos, interpretarlos, presentarlos y protegerlos (Oceans of Data Institute, 2015).

La Educación Estadística ha ido consolidándose como disciplina (Zieffler *et al.*, 2018), centrándose en la enseñanza, el aprendizaje y la evaluación de la estadística con un enfoque interdisciplinario. Su comienzo puede situarse en el año 1982, pues se celebró la Primera Conferencia Internacional de Enseñanza de la Estadística (ICOTS9).

En la presente contribución se lleva a cabo una síntesis del pasaje al modelo Espacio de Trabajo Estadístico y se caracteriza el paradigma *E1* como propuesta teórica, mediante una revisión de la literatura en el área. Se busca responder, ¿qué características tiene el espacio de trabajo estadístico? ¿Qué características tiene el paradigma *E1*?

MODELO ETM Y PARADIGMAS

Desde hace más de dos décadas, el modelo ETM ha evolucionado como una herramienta teórica y metodológica clave en el análisis didáctico del trabajo matemático, permitiendo examinar el espacio de trabajo que manifiestan personas al enfrentar tareas que privilegian instituciones para fomentar el desarrollo de ciertas competencias matemáticas durante la formación educacional. Asimismo, la construcción del modelo ETM está basada en marcos teóricos y conceptuales de la Didáctica de la Matemática y proporciona posibilidades de análisis del trabajo matemático, bajo aspectos semióticos, instrumentales y discursivos.

Houdement y Kuzniak (1999) introdujeron la noción de paradigmas en el dominio geométrico para dar cuenta de significados que pueden tener objetos geométricos, lo cual influye en el estilo de trabajo geométrico que despliega una persona. Kuzniak *et al.* (2016) definen que un paradigma representa "una combinación de creencias, convicciones, técnicas, métodos y valores compartidos por un grupo científico" (p. 723). En el contexto matemático, desde el nivel preescolar al universitario, los paradigmas dan cabida al análisis y al quehacer de distintos tipos de resolución de problemas, permitiendo enriquecer el análisis didáctico.

No obstante, el modelo ETM es insuficiente para dar cuenta del trabajo estadístico, ya que existen aspectos epistemológicos y cognitivos que son propios de la disciplina estadística, en cuyo caso, tanto la matemática como la computación son herramientas que permiten convertir a los datos en visiones del mundo real (Wild *et al.*, 2018). Especialmente, la estadística es definida como la ciencia de aprender desde los datos, y también, de medir, controlar y comunicar la incertidumbre, según la Asociación Estadística Americana (ASA, 2014).

TRABAJO ESTADÍSTICO ESCOLAR

La estadística, desde algunos currículos, es concebida como un tópico de la asignatura matemática, lo cual es inconsistente al reconocimiento de la estadística como disciplina con sus propias ideas fundamentales (Ben-Zvi y Garfield, 2004) y al avance en el posicionamiento científico de la Educación Estadística (Zieffler *et al.*, 2018). Hay que destacar que existen variados esfuerzos de diferentes países que han promovido considerar los contenidos de estadística distintos a los de matemática.

Un ejemplo notable es el caso de Nueva Zelanda (NZ), reconocida internacionalmente por la integración educativa de la estadística a la formación escolar de niñas, niños y jóvenes (Burgess, 2007). En el año 2004, el Ministerio de Educación de NZ cambió la asignación del sector curricular a *Mathematics and Statistics*, dando visibilidad a la Estadística como un dominio de aprendizaje distinto (New Zealand Ministry of Education, 2007). También, en USA, la ASA recomienda iniciar el aprendizaje estadístico de niñas y niños desde pre-K (Bargagliotti *et al.*, 2020).

En los primeros niveles educativos se espera que niñas y niños desarrollen habilidades básicas e importantes que pueden ser usadas para la comprensión de la información estadística o de los resultados de una investigación empírica, tales como ser capaz de organizar datos, construir y trabajar con diferentes representaciones de datos, incluyendo también una comprensión de conceptos, vocabulario y símbolos, además de comprender la probabilidad como medida de incertidumbre. A su vez, se espera que disciernan con ideas estadísticas para otorgar sentido a la información estadística, esto es, entender y ser capaz de explicar los procesos estadísticos e interpretar completamente los resultados obtenidos; lo cual se logra haciendo interpretaciones basadas en datos, sus representaciones o resúmenes estadísticos de datos, estableciéndose conexiones de un concepto con otro (e.g., medidas de centro con las medidas de dispersión), o puede coordinar ideas sobre los datos y azar.

En el currículo chileno, desde hace más de 14 años (MINEDUC, 2009), introdujo el eje temático *Datos y Azar* para el tratamiento de datos y modelos para el razonamiento en situaciones de incertidumbre, iniciándose en primer año básico los conocimientos y capacidades para recolectar, organizar, representar y analizar datos tanto del mundo real como de experimentos aleatorios. Desde el año 2012, rige en la asignatura matemática el eje temático *Datos y Probabilidades*, descrito como sigue:

> Este eje responde a la necesidad de que todos los estudiantes registren, clasifiquen y lean información dispuesta en tablas y gráficos, y que se inicien en temas relacionados con las probabilidades. Estos conocimientos les permitirán reconocer gráficos y tablas en su vida cotidiana. Para lograr este aprendizaje, es necesario que conozcan y apliquen encuestas y cuestionarios por medio de la formulación de preguntas relevantes, basadas en sus experiencias e intereses, y después registren lo obtenido y hagan predicciones a partir de ellos. (MINEDUC, 2018, p. 219).

La Tabla 1 muestra la progresión y clasificación de los objetivos de aprendizaje (OA) del eje temático *Datos y Probabilidades* desde 1° a 6° año básico, bajo los criterios de investigación empírica, representaciones de datos y experimentos aleatorios.

Criterio	Nivel educativo (año básico)	Descripción del objetivo de aprendizaje
Investigación empírica	1°	OA19. Recolectar y registrar datos para responder preguntas estadísticas sobre sí mismo y el entorno (…).
	2°	OA 20. Recolectar y registrar datos para responder preguntas estadísticas sobre juegos con monedas y dados (…).
	3°	OA23. Realizar encuestas y clasificar y organizar los datos obtenidos en tablas (…).
	4°	OA25. Realizar encuestas, analizar los datos (…).
	6°	OA25. Realizar encuestas, analizar los datos (…).
Representaciones de datos	1°	OA20. Construir, leer e interpretar pictogramas
	2°	OA22. Construir, leer e interpretar pictogramas con escala y gráficos de barra simple.

	3°	OA23. (…) clasificar y organizar los datos obtenidos en tablas y visualizarlos en gráficos de barra. OA25. Construir, leer e Interpretar pictogramas y gráficos de barra simple con escala, en base a información recolectada o dada. OA26. Representar datos usando diagramas de puntos.
	4°	OA25. (…), comparar con los resultados de muestras aleatorias, usando tablas y gráficos. OA26. Leer e interpretar pictogramas y gráficos de barra simple con escala, y comunicar sus conclusiones.
	5°	OA26. Leer, interpretar y completar tablas, gráficos de barra simple y gráficos de línea y comunicar sus conclusiones. OA27. Utilizar diagramas de tallo y hojas para representar datos provenientes de muestras aleatorias OA23. Calcular el promedio de datos e interpretarlo en su contexto.
	6°	OA23. Leer e interpretar gráficos de barra doble y circulares y comunicar sus conclusiones. OA25. Realizar encuestas, analizar los datos, comparar con los resultados de muestras aleatorias, usando tablas y gráficos.
Experimentos aleatorios	2°	OA21. Registrar en tablas y gráficos de barra simple, resultados de juegos aleatorios con dados y monedas
	3°	OA24. Registrar y ordenar datos obtenidos de juegos aleatorios con dados y monedas, encontrando el menor, el mayor y estimando el punto medio entre ambos.
	4°	OA27. Realizar experimentos aleatorios lúdicos y cotidianos, y tabular y representar mediante gráficos de manera manual y/o con software educativo.
	5°	OA24. Describir la posibilidad de ocurrencia de un evento, empleando los términos seguro - posible - poco posible -imposible. OA25. Comparar probabilidades de distintos eventos sin calcularlas.
	6°	OA24. Conjeturar acerca de la tendencia de resultados obtenidos en repeticiones de un mismo experimento con dados, monedas u otros, de manera manual y/o usando software educativo

Tabla 1: Progresión y clasificación de los OA de acuerdo con una investigación empírica, representaciones de datos y experimentos aleatorios.

FENÓMENOS DIDÁCTICOS

La estadística *aritmetizada*, *algoritmizada* o *algebrizada*, como fenómenos didácticos, provocan un desmedro de la comprensión conceptual que podría desfavorecer los aprendizajes de la estadística. Hawkins (1996) citado por Pfannkuch y Wild (2004) sugiere que una persona educada matemáticamente puede ser estadísticamente analfabeta. El hecho de ser la estadística una disciplina separada de la disciplina matemática (Cf., Ben-Zvi, 2016; Cobb y Moore, 1997; Moore, 1997, 1998; Pfannkuch y Wild, 2000; Watson *et al.*, 2018; Wild y Pfannkuch, 1999; Wild *et al.*, 2018) tiene implicaciones para los diseños de enseñanza.

Ben-Zvi y Garfield (2004, p. 4) sugieren que los estudiantes se sienten "incómodos con el desorden de los datos, las diferentes interpretaciones posibles basadas en diferentes suposiciones, y el extenso uso de habilidades de escritura y comunicación", ya que los estudiantes esperan tratar los contenidos estadísticos homólogamente como lo hacen con los contenidos matemáticos. En tal sentido, la Tabla 2 muestra una comparación no-exhaustiva entre matemática y estadística, considerando el rol de los conceptos: modelos, razonamiento, contexto y representaciones bidimensionales

Concepto	Matemática	Estadística
Modelos	Los modelos matemáticos generalmente usan representaciones algebraicas y geométricas para describir cierta estructura.	Los modelos estadísticos se basan en modelos matemáticos e incluyen descripciones con énfasis en la omnipresencia de la variabilidad y la cuantificación de la incertidumbre para tomar decisiones.
Razonamiento	Es principalmente deductivo. Un argumento deductivo es inherentemente válido; la conclusión necesariamente se desprende de las premisas y debe ser verdadera si las premisas son verdaderas.	Es inductivo, pues las conclusiones se obtienen a partir de datos, y no necesariamente son ciertas de manera absoluta, pues existe un margen de error.
Contexto	Existe un proceso de descontextualización para lograr un estatus de saber académico en el quehacer matemático.	Existe un proceso de contextualización permanente que dota a los datos de significado y sentido en el quehacer estadístico
Representaciones bidimensionales	Los objetos matemáticos representados en el plano cartesiano son generalmente relaciones numéricas entre abscisas y ordenadas, esto es, entre números del sistema numérico **R**, las que pueden o no tener una relación funcional	Las representaciones en estadística relacionan datos entre sí, y existen representaciones exclusivamente estadísticas como el diagrama de cajas, diagrama de tallo-y-hoja, entre otros.

Tabla 2: Comparación no-exhaustiva entre matemática y estadística.

La naturaleza del trabajo estadístico es distinta a la naturaleza del trabajo matemático, en tanto, las prácticas de la matemática y las prácticas de la estadística difieren. Cobb y Moore (1997) indican que Bertrand Russell comparó las matemáticas con la escultura por la austeridad de su abstracción y, al contrario, se podría pensar que el análisis de datos es como la poesía, donde el patrón y el contexto son inseparables. También Kuzniak y colaboradores (2016) vislumbran cómo la concepción de análisis aplicado en la estadística generaría perder significados estadísticos, en sus palabras:

> La relación entre Probabilidad, Estadística y otros dominios, en particular el Cálculo Integral y la Teoría de la Medida, es una fuente de preocupación didáctica, ya que desde el estricto punto de vista matemático que consiste en ver la Probabilidad y la Estadística como "Análisis aplicado", generalmente provoca una pérdida de significado para la mayoría de los estudiantes involucrados en esta situación. (Kuzniak *et al.*, 2016, p. 735).

Ello supone precisar un espacio de trabajo propio de la estadística desde un enfoque epistemológico y cognitivo; además de caracterizar paradigmas de la estadística existentes en el ámbito educativo.

TRABAJO ESTADÍSTICO DESDE LOS PRIMEROS AÑOS ESCOLARES

En la educación estadística, Ben-Zvi (2016) ha identificado tres tipos de trabajo estadístico: el Análisis Exploratorio de Datos (*EDA*), la Estadística Inferencial Informal (*ISI*) y el *Modeling*. En el *EDA* se anima a los estudiantes a convertirse en "detectives" para interpretar qué dice el comportamiento de los datos con base en una pregunta estadística. En la *ISI* se busca una declaración de generalización "más allá de los datos", tal que existe un uso de datos como evidencia para apoyar dicha generalización e incluye un lenguaje probabilístico que expresa cierta incertidumbre sobre dicha generalización. En el *Modeling* consta del mundo de los datos y del mundo de los modelos (e.g., una distribución de probabilidad) para aprender sobre la relación entre muestra y población.

Parte del trabajo estadístico consiste en construir representaciones de datos. En educación básica, niñas y niños construyen representaciones de datos bajo distintos formatos representaciones. En la Tabla 3 se ilustran algunos formatos representacionales, cuyo común contexto de los datos tiene relación con el tipo de colación o la calidad nutricional de las colaciones del curso al que pertenecían los estudiantes; situación estadística abordada en Vidal-Szabó y colaboradores (2020).

Estrella y colaboradores (2018) sostienen que los escolares que cursaban de 1° a 4° año básico (224 estudiantes de 6 a 9 años de edad) utilizaron ciertos recursos cognitivos como clasificación, conteo, subitización y colinealidad, en tanto fueron útiles para conseguir representar datos. Por ejemplo, la variable estadística fue observada en la manifestación de sus categorías, surgiendo desde la clasificación realizada sobre los datos, en tanto, la frecuencia asociada a la estructura numérica en las representaciones se evidenció en los cardinales alineados y separados de las categorías de la variable, mediante conteo y/o subitización sobre la cantidad de datos por categoría.

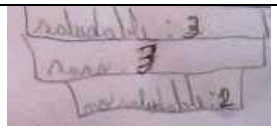
Formatos Representacionales	Representación de datos producida	Descripción
Agrupación de datos	*Niño, 10 años*	Esta agrupación de datos es una representación icónica con un texto escrito en la parte superior que representa la calidad nutricional de la colación (categorías de la variable) en que los íconos no están dispuestos en un orden lineal, ni poseen un mismo tamaño y espaciado entre ellos.
Lista	*Niña, 9 años*	En esta lista se registraron los datos verticalmente por medio de texto escrito separados en dos categorías principales y, al interior de estas, hay subcategorías representadas como texto escrito con la primera letra mayúscula y en rojo proseguido de la cantidad de datos para cada una.
Diagrama	*Niña, 10 años*	Este diagrama es una representación icónica sin eje Y graduado, ni cardinal. El texto escrito en la parte superior representa el tipo de colación (categorías de la variable) y los íconos se presentan linealmente ordenados.
Tabla	 *Niño, 9 años*	Esta tabla de datos posee tres filas y dos columnas y presenta el trazado de líneas para demarcar filas. La primera columna presenta en forma de texto la calidad de colación (categorías de la variable) y su cardinal está claramente separada por ":" en la segunda columna (frecuencia absoluta).

Tabla 3: Caracterización de algunos formatos representacionales de datos.

ESPACIO DE TRABAJO ESTADÍSTICO

Considerando que el ETM es una herramienta analítica que tiene la flexibilidad para interactuar con otros enfoques teóricos, se presenta el modelo Espacio de Trabajo Estadístico (modelo ETE, ver Figura 1), cuyo espacio de trabajo está situado en la disciplina estadística, siendo fundamental el rol del *contexto de los datos*, ya que "sin contexto, el modelado estadístico no puede ocurrir." (Pfannkuch *et al.*, 2018, p. 1115)

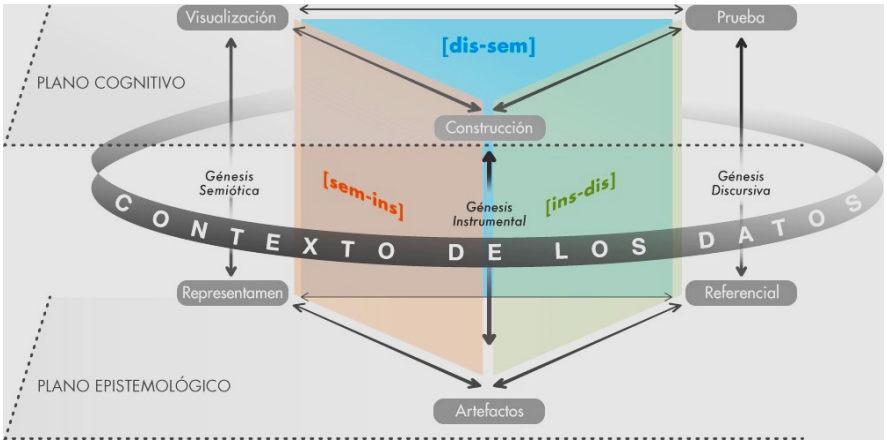


Figura 1: Modelo ETE.

El modelo ETE introduce una caracterización renovada de las génesis que vinculan componentes epistemológicos y procesos cognitivos propios de la estadística (Vidal- Szabó *et al.*, 2020):

- *Génesis semiótica:* Da cuenta de la dialéctica entre lo semántico y lo sintáctico de los datos en contexto, en tanto significado y representación, permitiendo el análisis de los signos involucrados en las acciones de leer o escribir en estadística y que se relacionan a los procesos de decodificación y codificación de signos;
- *Génesis instrumental*: Da acceso a explicar la acción de un sujeto al operar con artefactos, materiales o simbólicos, ya sean herramientas (valor epistemológico) o instrumentos (valor cognitivo) involucrados en un proceso de construcción en estadística, esto es, representar datos, determinar resúmenes numéricos de los datos en contexto, entre otros;
- *Génesis discursiva*: Se enmarca en actividades que demandan justificación basadas en propiedades y definiciones de la estadística, considerando la evidencia en los datos para tomar decisiones en contexto, integrando el razonamiento estadístico que contempla la vinculación entre los procesos de prueba con datos y referentes teóricos usados en estadística (conceptos de medidas de tendencia central, de dispersión, de posición, de forma, entre otros), coherentes al conocimiento contextual involucrado. Permite examinar cómo los estudiantes justifican sus elecciones al interpretar datos en términos de evidencia y propiedades estadísticas.

Para ilustrar la aplicación del modelo ETE se analiza la producción de una estudiante (ver Figura 3) que cursaba 2° año básico (7 años de edad) que da cuenta de una respuesta a una situación estadística que fue propuesta por cuatro docentes de un grupo de Lesson Study —apoyado por cuatro investigadores— y se enfocó en la siguiente pregunta: *¿de qué manera podemos ayudar a Matías a organizar los datos para reducir el consumo de agua en su hogar?* Durante el diseño de la situación estadística, los profesores eligieron datos reales del consumo diario de agua de una familia en Chile. Cada estudiante contaba con la hoja de trabajo con datos icónicos, en que unitariamente simbolizaba 1 L de consumo de agua en el hogar de una familia genérica (ver Figura 2).

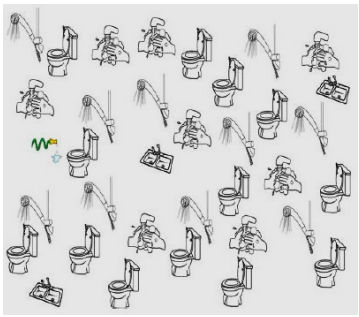


Figura 2: Datos entregados referidos al consumo de agua.

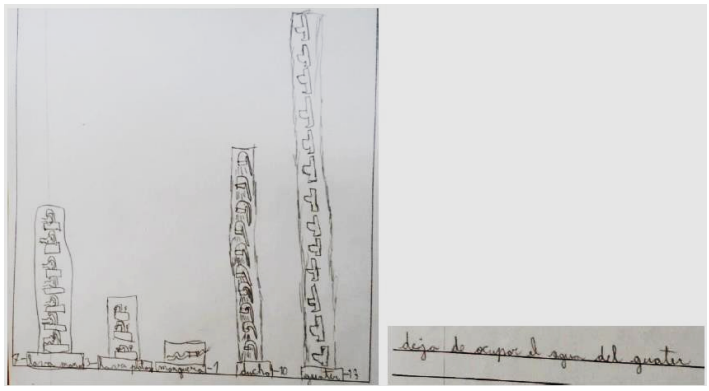


Figura 3: Representación de datos de la estudiante.

A continuación, se describe la activación de las génesis que involucró su trabajo estadístico desde la perspectiva del modelo ETE:

Génesis semiótica. Se activó al decodificar el representamen (ver Figura 2), mediante los datos entregados en forma icónica y asociados a la variable "fuentes de consumo de agua en un hogar". Después codifica los datos en íconos de similar dimensionalidad referidos a las fuentes de consumo (íconos de inodoro, ducha, manguera, lavaplatos y lavamanos), en que activó una visualización de la frecuencia de los datos categorizados mediante la altura de la barra y/o el dígito que explicita en la base de su representación de datos, permitiendo una exploración de los datos.

Génesis instrumental. Se activó al construir su representación mediante íconos que dibuja —i.e., artefactos que agrupa para representar los datos en cada una de las categorías de la variable— en particular, replica los datos icónicos como dibujos en su hoja de trabajo que organiza tanto desde una base-lineal como desde un cierto criterio de linealidad gráfica para cada subconjunto de datos de las categorías de la variable establecidas representacionalmente. La producción de la estudiante permite construir un diagrama compuesto por listas de datos enmarcadas en barras, cuyas alturas son proporcionales a la frecuencia absoluta de las categorías de la variable representadas en forma de texto.

Génesis discursiva. Se activó al clasificar los datos en categorías de la variable y al contar los datos de una misma categoría emerge el cardinal respectivo de dicho subconjunto que adquiere el estatus de frecuencia absoluta de la categoría. Asimismo, para cada categoría verifica su frecuencia volviendo a contar los datos desde la hoja de trabajo, verificando que ningún dato falte ni que exista un dato extra, a modo de prueba pragmática para justificar la distribución de frecuencias construidas. La estrategia de conteo permitió trabajar con todos los datos y la coordinación entre la organización y clasificación de los datos que representa es coherente al contexto del consumo de agua.

La estudiante logra identificar la moda e indica como consejo: "deja de ocupar el agua del *guater* [inodoro]", lo cual evidencia que, si bien identifica la fuente de suministro de agua donde más se consume, aún debe matizar sus conclusiones en virtud del contexto de los datos.

EL PARADIGMA *E1*

Los ejemplos anteriormente abordados (ver Figura 3 y Tabla 3) están situados en el paradigma *E1*, ya que la estadística es fuertemente descriptiva y se trabaja con una baja cantidad de datos poblacionales o muestrales (*Small Data*) —dicha cantidad es relativa al contexto de los datos y al contexto de la persona en un rol de estadístico en ciernes— recolectados del mundo real y/o simulados en algún procesador de datos. En el *Small Data* se pone énfasis en datos de alta relevancia para el entorno local y específico, en este caso, de niñas y niños en formación estadística. Con ello, se facilitan decisiones prácticas y concretas, ya que el análisis suele ser más directo y está orientado a resolver problemas específicos.

En *E1* es posible formular preguntas estadísticas de tipo resumen de un conjunto de datos y de tipo comparación entre conjuntos de datos. La construcción de las representaciones de datos (representaciones semióticas) pueden ejecutarse de forma tangible (técnica de lápiz-y-papel) o de forma digital (mediante softwares como GeoGebra, Excel, entre otros).

Históricamente, el paradigma *E1* se manifestó en los primeros censos que se realizaron localmente en ciertos territorios. Por ejemplo:

> En el contexto de la administración romana, existían dos maneras para censar, una correspondía al censo de los ciudadanos en que solo se registraba a los individuos que tenían ciudadanía romana (similar al censo electoral actual), otra manera de censar era por censos de población, en que se registraba a los habitantes de las provincias del imperio que incluía frecuentemente registros de propiedades [catastro]. (Vidal-Szabó, 2022, p. 44)

A su vez, De Foville (1885)[6] muestra en una alocución en Londres cómo ciertas negligencias pueden descubrirse a partir de un censo. En particular, remite a un censo de monedas y de sus fechas de emisión, el cual acusaba a los agentes por haber indicado fechas en que excepcionalmente no había tenido lugar acuñación alguna. Ello se relaciona a la actitud escéptica de quienes trabajan estadísticamente en el ámbito del análisis exploratorio de datos (Tukey, 1977).

En el paradigma *E1* es cobra relevancia la excelencia gráfica que consiste en una presentación bien diseñada de datos interesantes, articulando su contenido a los aspectos de diseño y de estadística que en conjunto permiten comunicar hechos complejos, según Tufte (2001). En otras palabras, proporciona al espectador de un mayor número de ideas en el menor tiempo y con la menor cantidad de tinta en el menor espacio posible. Por ejemplo, O. Neurath y G. Arntz idearon el Método de Viena para Estadísticas Pictóricas (*Wiener Bildstatistik*) a principios del siglo XX (Jansen, 2009), cuyo propósito era comunicar al público datos estadísticos sobre temas sociales, económicos y políticos de forma intuitiva y pictórica.

REFLEXIONES FINALES

El modelo ETE y el paradigma *E1* representan una contribución innovadora al análisis didáctico del trabajo estadístico, ofreciendo herramientas analíticas para, por ejemplo, diseñar experiencias de aprendizaje que vinculen la estadística con diversos contextos reales. Su implementación no solo enriquece la comprensión de cómo se desarrolla el pensamiento estadístico, sino que sustenta la examinación del trabajo estadístico tanto de las personas —que inician su formación en estadística— como el que fomenta las instituciones educativas.

La necesaria diferenciación entre matemática y estadística permite situar a la matemática como un conjunto de herramientas útiles para el desempeño estadístico arraigado al contexto de los datos, el cual abarca una perspectiva epistemológica (propia del conocimiento contextual involucrado) y una perspectiva cognitiva (propia de los procesos de pensamiento de los sujetos y su experiencia con el contexto de los datos) integradas en el modelo ETE.

---

[6] Fuente: http://www.numdam.org/item/JSFS_1885__26__448_0.pdf

Es requerido avanzar en la caracterización de otros paradigmas estadísticos, los que coexisten en la formación de personas como estadísticos profesionales o usuarios de la estadística en sus roles de productores y consumidores de datos. Asimismo, otra proyección es seguir caracterizando el modelo ETE en situaciones estadísticas tipo *ISI* o *Modeling* con uso de procesadores de datos como herramienta computacional. Especialmente, futuras investigaciones podrían centrarse en la interacción del modelo ETE con otros paradigmas estadísticos, explorando cómo la tecnología para procesar datos masivos reconfigura las dinámicas en el aprendizaje estadístico.

REFERENCIAS

American Statistical Association. [ASA]. (2014). *Curriculum guidelines for undergraduate programs in statistical science.* Author. https://www.amstat.org/asa/education/home.aspx/curriculumguidelines.cfm

Bargagliotti, A., Franklin, C., Arnold, P., Gould, R., Johnson, S., Perez, L., & Spangler, D. (2020). *The Pre-K-12 Guidelines for Assessment and Instruction in Statistics Education II (GAISE II)*. ASA. https://www.amstat.org/asa/files/pdfs/GAISE/GAISEIIPreK-12_Full.pdf

Ben-Zvi, D. (2016). Three paradigms in developing students' statistical reasoning. En S. Estrella *et al.* (Eds.), *Actas de las Jornadas Nacionales de Educación Matemática* (pp. 13-22). Sociedad Chilena de Educación Matemática. http://ima.ucv.cl/congreso/xxjnem/

Ben-Zvi, D., & Garfield, J. (2004). Statistical literacy, reasoning, and thinking: goals, definitions, and challenges. In D. Ben-Zvi & J. Garfield (Eds.), *The challenge of developing statistical literacy, reasoning, and thinking* (pp. 3-15). Springer. https://philarchive.org/archive/CAPTEO

Burgess, T. A. (2007). Investigating the nature of teacher knowledge needed and used in teaching statistics (Unpublished doctoral dissertation). Massey University, Auckland. https://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications/dissertations/07.Burgess.Dissertation.pdf

Cobb, G., & Moore, D. (1997). Mathematics, Statistics, and Teaching. *The American Mathematical Monthly, 104*(9), 801-823. https://www.jstor.org/stable/2975286

Estrella, S., Olfos, R., Vidal-Szabó, P., Morales, S., y Estrella, P. (2018). Competencia metarrepresentacional en los primeros grados: representaciones externas de datos y sus componentes. *Revista Enseñanza de las Ciencias, 36*(2), 143-163. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2143

Houdement, C., y Kuzniak, A. (1999). Un exemple de cadre conceptuel pour l'étude de l'enseignement de la géométrie en formation des maîtres. *Educational Studies in Mathematics, 40*(3), 283-312. https://doi.org/10.1023/A:1003851228212

estadística. *Journal of Design History, 22*(3), 227-242. https://doi.org/10.1093/jdh/epp015

Kuzniak, A., Tanguay, D., & Elia, I. (2016). Mathematical Working Spaces in schooling: an introduction. *ZDM Mathematics Education, 48*(6), 721-737. https://doi.org/10.1007/s11858-016-0812-x

Ministerio de Educación de Chile [MINEDUC]. (2009). *Objetivos Fundamentales y Contenidos Mínimos Obligatorios de la Educación Básica y Media, Actualización 2009.* Autor. https://www.curriculumnacional.cl/614/articles-34641_bases.pdf

Ministerio de Educación de Chile. [MINEDUC]. (2018). *Bases curriculares Primero a Sexto Básico.* Autor. https://www.curriculumnacional.cl/614/articles-22394_bases.pdf

Moore, D. (1997). New pedagogy and new content: The case of statistics. *International Statistical Review, 65*(2), 123-165. https://iase-web.org/documents/intstatreview/97.Moore.pdf

Moore, D. (1998). Statistics among the liberal arts. *Journal of the American Statistical Association, 93*(444), 1253-1259. https://www.stat.purdue.edu/~dsmoore/articles/LibArts.pdf

New Zealand Ministry of Education. (2007). *The New Zealand curriculum.* Learning Media. https://nzcurriculum.tki.org.nz/The-New-Zealand-Curriculum

Oceans of Data Institute (2015). *Building global interest in data literacy: a dialogue.* Educational Development Center. http://oceansofdata.org/ourwork/building-global-interest-data-literacy- dialogue-workshop-report

Pfannkuch, M., Ben-Zvi, D., & Budgett, S. (2018). Innovations in statistical modeling to connect data, chance and context. *ZDM Mathematics Education, 50*(7), 1113-1123. https://doi.org/10.1007/s11858-018-0989-2

Pfannkuch, M., & Wild, C. (2004). Towards an Understanding of Statistical Thinking. In D. Ben-Zvi & J. Garfield (Eds.), *The Challenge of Developing Statistical Literacy, Reasoning and Thinking* (pp. 17-46). Springer. https://doi.org/10.1007/1-4020-2278-6_2

Pfannkuch, M., & Wild, C. (2000). Statistical thinking and statistical practice: Themes gleaned from professional statisticians. *Statistical science, 15*(2), 132-152. https://doi.org/10.1214/ss/1009212754

Tufte, E. R. (1997). *Visual Explanations.* Graphics Press. https://archive.org/details/visualexplanatio00tuft/page/10/mode/thumb?view=theater

Tukey, J. (1977). *Exploratory Data Analysis.* Addison-Wesley. https://archive.org/details/exploratorydataa0000tuke_7616

Vidal-Szabó, P., Kuzniak, A., Estrella, S., y Montoya, E. (2020). Análisis cualitativo

de un aprendizaje estadístico temprano con la mirada de los espacios de trabajo matemático orientado por el ciclo investigativo. *Revista Educación Matemática, 32*(2), 217-246. https://doi.org/10.24844/EM3202.09

Vidal-Szabó, P. (2022). Representaciones de datos en situaciones de exploración, análisis y comunicación: una contribución a la Estadística Temprana (tesis de doctoral inédita). Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile. https://catalogo.pucv.cl/cgi-bin/koha/opac- detail.pl?biblionumber=436178

Watson, J., Fitzallen, N., Fielding-Wells, J., & Madden, S. (2018). The Practice of Statistics. In D. Ben-Zvi, K. Makar & J. Garfield, *International Handbook of Research in Statistics Education* (pp. 105-137). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-66195-7_4

Wild, C., & Pfannkuch, M. (1999). Statistical thinking in empirical enquiry. *International Statistical Review, 67*(3), 223-265. https://doi.org/10.1111/j.1751-5823.1999.tb00442.x

Wild, C., Utts, J., & Horton, N. (2018). What Is Statistics? In D. Ben-Zvi, K. Makar & J. Garfield (Eds.), *International Handbook of Research in Statistics Education* (pp. 5-36). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-66195-7_1

Zieffler, A., Garfield, J., & Fry, E. (2018). What is Statistics Education? In D. Ben-Zvi, K. Makar &_J. Garfield (Eds.), *International Handbook of Research in Statistics Education* (pp. 37-70). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-66195-7_2

L'ÉVOLUTION DE L'ETM PROBABILISTE DE RÉFÉRENCE AU COURS DE L'ENSEIGNEMENT SECONDAIRE EN FRANCE

Assia Nechache[*], Bernard Parzysz[**]

[*]CY Cergy Paris Université et LDAR

[**]Université d'Orléans et LDAR

Dans le cadre de cette communication nous traiterons la question de l'évolution de l'Espace de Travail Mathématique probabiliste (ETMP) de référence au niveau de l'enseignement secondaire en France. L'étude de la trajectoire d'un type de tâches dites emblématique à ce niveau de scolarité, nous a permis d'identifier des éléments caractéristiques de l'ETMP. Ces éléments portent en particulier sur les paradigmes probabilistes qui guident le travail, les connexions ou les glissements entre les différents domaines mathématiques ou algorithmique, et sur la place allouée au domaine des probabilités dans l'enseignement des mathématiques au niveau secondaire.

INTRODUCTION

Cette communication fait suite à notre communication au symposium ETM7 faisant objet sur la question de l'ETMP de référence au niveau des classes de 3e (14-15 ans) et 2nde (15-16 ans) en France (Nechache et Parzysz, 2023). Cette étude, nous a alors permis de mettre en évidence des caractéristiques de l'ETMP de référence à ces deux niveaux d'enseignement. Une d'entre elles, porte sur les outils sémiotiques qui sont utilisés, soit comme des signes pour modéliser l'expérience aléatoire (par exemple un arbre), soit comme artefacts (sur lesquels on produit des calculs), soit comme outils théoriques (pour justifier et valider les résultats). Une deuxième caractéristique est celle du référentiel théorique de l'ETMP de référence, qui est organisé comme une juxtaposition d'énoncés sans aucune structuration cohérente ce qui peut rendre complexe la construction de l'ETMP idoine. Une dernière caractéristique concerne la place privilégiée donnée à l'expérimentation et de la modélisation en lien avec la simulation dans le travail probabiliste impliquant une forte mobilisation de la genèse instrumentale et la mise en place d'une dialectique entre celle-ci et la genèse discursive.

Dans le cadre de cette communication, nous proposons de poursuivre l'étude initiée dans le symposium ETM7 en examinant l'évolution de l'ETMP de référence dès la mise en place de l'enseignement des probabilités au niveau secondaire en France jusqu'à en classe de Terminale. Nous observons cette évolution à partir de l'analyse d'un type de tâche emblématique dans l'enseignement des probabilités celui du **schéma d'urne** que nous présenterons plus loin.

L'analyse du traitement de ce type de tâche depuis le cycle 4 (12 ans-14 ans) jusqu'en Terminale nous permettra de dégager des éléments pertinents caractérisant l'évolution de l'ETMP de référence au niveau de l'enseignement secondaire. Cette analyse de

tâches prend appui, à la fois sur les composantes de la théorie des ETM (Kuzniak *et al.*, 2022) et sur la notion de paradigme probabiliste (Nechache et Parzysz, 2019, 2022). Il s'agit donc de « suivre » la trajectoire de ce type de tâche emblématique tout au long de l'enseignement secondaire, en s'attachant en particulier à observer : les paradigmes mis en jeu, la place et le rôle de chacune des composantes du plan épistémologique de l'ETMP, les domaines mathématiques mobilisés, les formes de validation mises en œuvre dans le traitement de ce type de tâche.

ENSEIGNEMENT DES PROBABILITÉS ET LA QUESTION DES PARADIGMES PROBABILISTES

L'une des spécificités de l'enseignement des probabilités porte sur le fait que c'est, avec la géométrie, le seul domaine où la situation de départ – en principe tout au moins – appartient à la réalité matérielle, *a priori* source possible de difficulté d'apprentissage liée au risque de confusion entre la réalité et le modèle, comparable à celle que l'on rencontre au collège en géométrie avec les paradigmes G1 et G2. Une autre difficulté se situe au niveau du choix – ou de l'élaboration – d'un modèle adéquat à l'expérience aléatoire étudiée. Or, proposer des situations faisant appel à la modélisation permet de donner du sens aux connaissances enseignées. Ainsi, et toujours comme en géométrie, l'apprentissage des probabilités évolue à travers plusieurs niveaux de modélisation qui caractérisent chacun des paradigmes probabilistes (Nechache et Parzysz, 2019, 2022).

Dans ces travaux autour de l'enseignement des probabilités en France, on a pu mettre en évidence (Parzysz, 2014) la manière dont chacun des paradigmes probabilistes influence l'ETMP de référence au niveau de l'enseignement secondaire. On a ainsi pu faire le constat qu'au début de l'apprentissage des probabilités (au niveau collège), l'enseignement est basé sur un premier paradigme probabiliste (P1). Ce dernier vise à décrire un protocole expérimental précis, ainsi qu'une liste de couples (issue, chance d'apparition) associés à une expérience donnée, et fait appel à l'usage de diagrammes divers (arbres, tableaux à double entrée, diagrammes utilisés en statistique descriptive). Dès l'entrée au lycée, un second paradigme (P2) est privilégié. Il s'agit cette fois d'approfondir l'étude de la notion de probabilité et d'étudier l'algèbre de ses propriétés, notamment à l'aide de notions ensemblistes. Divers outils sont associés à ce paradigme, tels que : les techniques de calcul intégrées aux modèles ou spécifiques des différents registres de représentation (schémas ensemblistes, arbres pondérés, tableaux à double entrée, etc.). Y sont également adjoints les outils usuels de la statistique descriptive (SD) et de la statistique inférentielle (SI).

SCHÉMA D'URNE : UNE TÂCHE EMBLÉMATIQUE

Nous avons fait le choix d'analyser une tâche dite *emblématique* (au sens de Kuzniak et Nechache). Les tâches emblématiques peuvent aider à mieux interpréter les ETM de référence et aider à comprendre la constitution des ETM idoines. Les tâches emblématiques sont utilisées comme outils méthodologiques pertinents pour identifier

le travail mathématique scolaire. Elles contribuent à une meilleure identification des ETM de référence et à une meilleure compréhension de la constitution des ETM idoines (ibid, p. 148). Elles jouent un rôle significatif dans les classes, à la fois pour construire et fréquenter les objets mathématiques, mais aussi pour asseoir une culture et une mémoire communes (ETM5, p.145). Ce sont

> Des tâches qui bénéficient d'une large mise en œuvre dans les classes, mais il peut aussi s'agir de tâches relativement récentes qui sont portées par l'institution dans les documents ressources et disponibles dans les ETM idoines potentiels décrits par les manuels.

Les tâches emblématiques doivent remplir trois conditions. La première est qu'elles sont disponibles dans l'ETM de référence, et sont de ce fait reconnues comme adéquates au travail mathématique visé par l'institution scolaire. La deuxième condition est qu'elles doivent faire partie des tâches proposées dans les ETM idoines potentiels (par exemple les manuels scolaires) et dans les ETM idoines effectifs mis en œuvre dans les classes par les enseignants. La dernière condition est qu'elles doivent permettre de produire un travail mathématique complet (Kuzniak et Nechache).

Les tâches choisies pour cette étude remplissent ces trois conditions, et font intervenir la notion de tirage de boules dans une (ou plusieurs) urne(s). Notre choix est justifié du fait que ces tâches sont présentes dès le début de l'apprentissage des probabilités en classe de 5e, et jusqu'à la terminale.

CRITÈRES D'ANALYSE DES TÂCHES DANS LES MANUELS

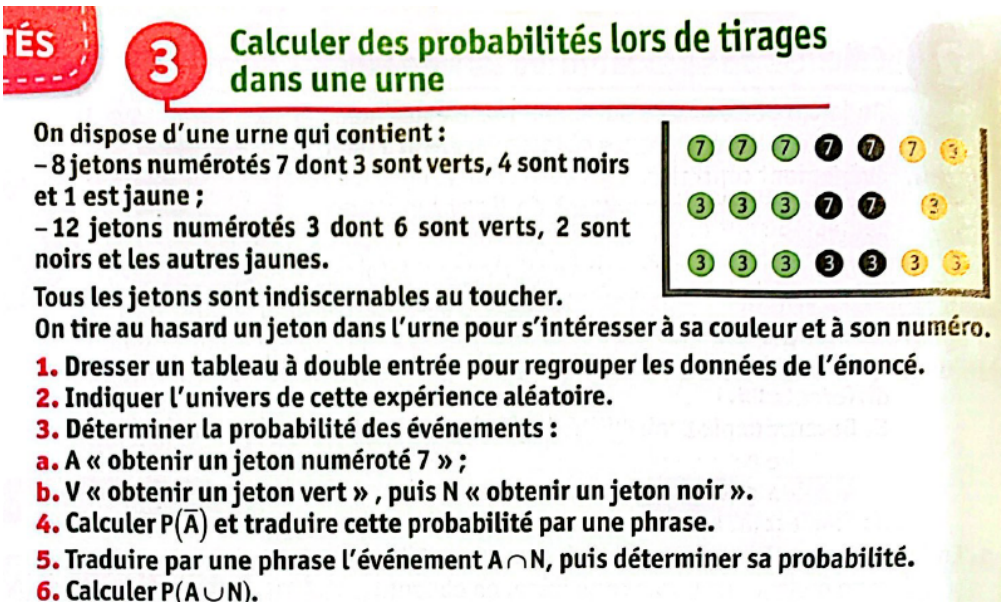
Du point de vue méthodologique, le choix du type de tâche schéma d'urne est pertinent, car son analyse dans le cadre de la théorie des ETM, nous donnera accès à des éléments caractéristiques de l'ETMP de référence à chaque niveau de classe. En effet, à travers l'étude de la trajectoire de la mise en œuvre de la tâche (et de la façon dont elle est déclinée) nous allons pouvoir suivre l'évolution de l'ETMP de référence. Nous utilisons les indicateurs de l'évolution suivants : les différentes *composantes* du plan épistémologique en lien avec les processus cognitifs potentiellement en jeu, la *circulation* du travail mathématique (confiné sur une dimension ou un plan de l'ETM, ou complet), les formes de *validation* attendues, les *domaines* mathématiques mobilisés, le ou les *paradigmes* probabilistes qui orientent le travail mathématique. Dans le cadre restreint de cette communication, nous avons fait le choix d'étudier la trajectoire de ce type de tâche à partir de l'analyse d'une collection de manuels pour chaque niveau de classe, à savoir la collection *Transmath* pour le cycle 4 (5e à 3e) et la classe de seconde, la collection *Sésamath* pour la classe de 1re, et la collection *Hatier* pour la classe de Terminale.

Le schéma d'urne (Figure 1) est un objet d'étude essentiel dès le début de l'apprentissage des probabilités, comme le précise un document édité par le Ministère :

> Les situations de tirages dans des sacs ou des urnes permettent aux élèves d'appréhender le hasard en lien avec le vocabulaire des probabilités (expérience aléatoire, issue, événement, probabilité) introduit au début du cycle 4. Les situations rencontrées en classe de 5e sont

l'occasion de placer un événement sur une échelle de probabilités et de déterminer des probabilités dans des situations très simples d'équiprobabilité (Collectif, 2021)

Ce modèle théorique correspond à un espace probabilisé fini muni d'une loi uniforme. L'urne imaginée, opaque, est supposée contenir des boules – ou d'autres objets – de plusieurs couleurs, et/ou portant des numéros ; les objets sont supposés « indiscernables au toucher » ; l'univers est l'ensemble des objets, et les événements élémentaires correspondent aux tirages d'un objet particulier ; on s'intéresse à la couleur, ou au numéro, de l'objet tiré, et les tirages successifs peuvent être réalisés sans remise (schéma exhaustif) ou avec remise (schéma non exhaustif) :


TÉS

3 Calculer des probabilités lors de tirages dans une urne

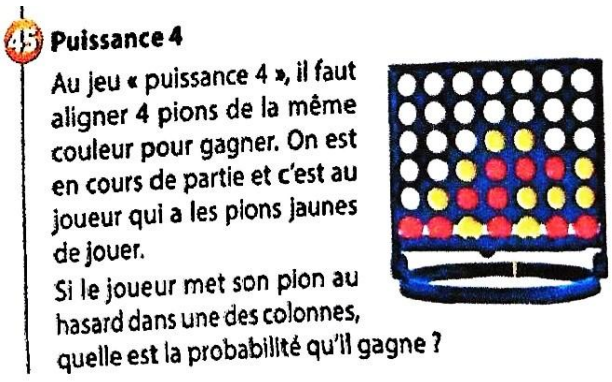
On dispose d'une urne qui contient :
– 8 jetons numérotés 7 dont 3 sont verts, 4 sont noirs et 1 est jaune ;
– 12 jetons numérotés 3 dont 6 sont verts, 2 sont noirs et les autres jaunes.

Tous les jetons sont indiscernables au toucher.
On tire au hasard un jeton dans l'urne pour s'intéresser à sa couleur et à son numéro.

1. Dresser un tableau à double entrée pour regrouper les données de l'énoncé.
2. Indiquer l'univers de cette expérience aléatoire.
3. Déterminer la probabilité des événements :
a. A « obtenir un jeton numéroté 7 » ;
b. V « obtenir un jeton vert » , puis N « obtenir un jeton noir ».
4. Calculer $P(\overline{A})$ et traduire cette probabilité par une phrase.
5. Traduire par une phrase l'événement $A \cap N$, puis déterminer sa probabilité.
6. Calculer $P(A \cup N)$.

Figure 1 : Exemple de schéma d'urne (Collection Transmaths Lycée, 2019, p. 311).

Beaucoup d'expériences aléatoires correspondent à ce schéma général : lancer d'une pièce « bien équilibrée », d'un dé « non pipé », tirage d'une carte dans un jeu, voire des situations qui en paraissent *a priori* éloignées (Figure 2).


45 Puissance 4

Au jeu « puissance 4 », il faut aligner 4 pions de la même couleur pour gagner. On est en cours de partie et c'est au joueur qui a les pions jaunes de jouer.
Si le joueur met son pion au hasard dans une des colonnes, quelle est la probabilité qu'il gagne ?

(Berger *et al.*, 2017, p. 329)

54 Problème ouvert

Modéliser • Représenter • Communiquer

Yasmine tire à l'arc. Elle touche la cible une fois sur deux.

Elle effectue trois tirs successifs. Quelle est la probabilité qu'elle touche la cible au moins une fois ?

(Collectif Transmath, 2016, p. 264)

Figure 2 : D'autres schémas d'urne.

La première de ces situations peut être modélisée par une urne contenant une boule blanche et 6 boules noires, d'où l'on tire une boule. La seconde correspond à une urne contenant des boules blanches (= succès) et des boules noires (= échec) en nombre égal, de laquelle on extrait successivement trois boules avec remise, en notant leur couleur.

L'une des compétences visées par l'enseignement des probabilités au niveau secondaire est précisément de développer chez les élèves la capacité d'identifier ces situations diverses avec des schémas d'urne, capacité qui aboutira en particulier, en classe terminale, à l'étude du modèle de la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$, correspondant à n tirages successifs d'une boule de l'urne, avec remise, dans une urne contenant des boules noires et des boules blanches, celles-ci dans la proportion p.

LA PERMÉABILITÉ DE L'ETMP : LES CONNEXIONS AVEC D'AUTRES DOMAINES DES MATHÉMATIQUES

Historiquement, et dès son origine, le domaine des probabilités est lié à celui de la statistique, puisque ce sont des problèmes liés aux jeux de hasard qui l'ont fait naître (Galilée et le Grand-duc de Toscane, correspondance entre Pascal et Fermat, entre les frères Huygens, etc.). Il l'est aussi épistémologiquement, par le biais de la simulation, que sous-tend la « loi des grands nombres ». C'est pourquoi, dans l'enseignement de ce domaine, il arrive fréquemment que les manières de résoudre une tâche probabiliste donnée nécessitent des allers-retours entre le domaine probabiliste et celui de la statistique, en particulier lorsqu'il s'agit d'utiliser la simulation (réelle ou numérique) en relation avec la modélisation pour réaliser cette tâche. Afin de saisir le sens du travail probabiliste qui en résulte, il apparaît nécessaire de clarifier les relations et les frontières entre le domaine des probabilités et celui de la statistique, mais aussi avec d'autres domaines mathématiques dans l'enseignement des probabilités au niveau secondaire en France.

L'ETM d'un domaine mathématique donné n'est pas un ensemble clos et parfaitement défini : selon la tâche à réaliser, il peut éventuellement incorporer, en tant qu'outils, des éléments issus d'autres domaines. Comme le stipule par exemple le programme du cycle 4 :

> Les mathématiques sont également intimement liées aux autres disciplines. Elles fournissent en effet des outils de calcul et de représentation et des modèles qui permettent de traiter des situations issues de toutes les autres disciplines enseignées au cycle 4.[7]

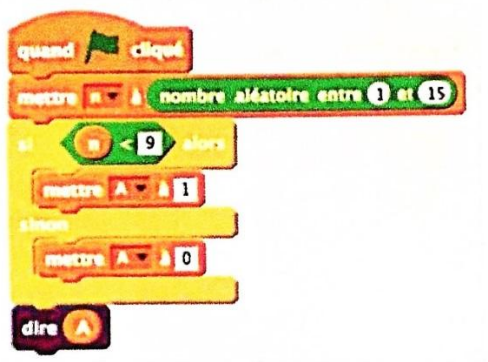
7 BOEN n° 31 du 30 juillet 2020.

C'est ainsi que, dans l'ETMP, l'estimation de la probabilité d'un événement lié à une expérience aléatoire à l'aide d'une simulation informatique conduit à mettre en œuvre des notions d'algorithmique, appliquées à un langage de programmation ou à l'utilisation d'un tableur (Figure 3).

50 **Comprendre un programme** ALGO

Raisonner • Calculer • Communiquer

Voici un programme écrit avec le langage Scratch.



a. Quelle valeur le lutin énonce-t-il à la fin du programme lorsque la valeur affectée à n est :
• 2 ? • 10 ? • 3 ? • 9 ? • 15 ?

b. On considère l'expérience aléatoire qui consiste à lire le nombre énoncé par le lutin à la fin du programme. Donner les issues de cette expérience et déterminer leurs probabilités.

Figure 3a: (Collectif Transmath, 2016, p. 264)

3 TICE Quatre cartons portant chacun une lettre du mot TUTU sont placés dans un sac.
On tire au hasard un carton du sac et on lit la lettre obtenue.

a. Dans la cellule A1, saisir la formule :

=SI(ALEA.ENTRE.BORNES(1;4)<=2;"T";"U") .

Quelle est sa signification ?

b. Simuler 1 000 fois cette expérience aléatoire et afficher la fréquence de chaque lettre.

c. Que remarque-t-on pour ces fréquences ?

Figure 3b (Collectif Transmath, 2016, p. 246)

71 Un lycée compte 1 000 élèves suivant la répartition d'âge suivante :

Âge	14	15	16	17	18	19
Effectif	26	232	259	227	216	40

On choisit au hasard un élève dans ce lycée et on lui demande son âge.

1. Écrire une fonction `age_aleatoire()` qui simule cette expérience aléatoire.

2. On écrit dans la console la commande

```
echantillon=[age_aleatoire() for i in range(10)].
```

Que permet de faire cette instruction ?

Figure 3c : (Bau, D., 2019, p. 314)

Figure 3 : Trois exemples d'interventions de l'algorithmique en probabilités.

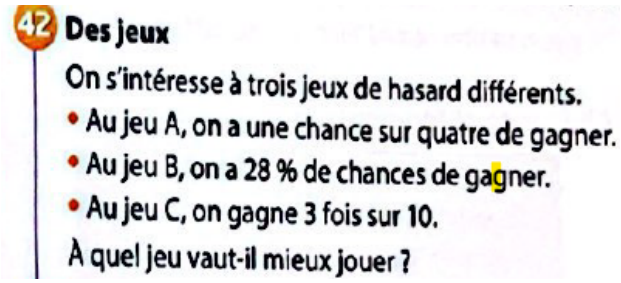
On peut citer d'autres domaines mathématiques qui interviennent dans la résolution de problèmes probabilistes. C'est ainsi que les solutions des problèmes classiques de « l'aiguille de Buffon », et du « spaghetti coupé en trois », de même que la « méthode de Monte-Carlo », font intervenir la géométrie du plan euclidien. C'est ainsi que, de façon plus fondamentale, la mise en place du paradigme P2 conduit à faire usage d'éléments de théorie des ensembles. Inversement, les modèles probabilistes sont couramment utilisés dans les sciences utilisant des outils statistiques : physique, biologie, sociologie, etc.

Le cas particulier de la combinatoire est intéressant. L'évolution historique du rapport entre les probabilités et la combinatoire dans l'enseignement ne manque pas d'intérêt. Au niveau du lycée, en effet, les probabilités sont apparues au siècle dernier en tant que simple application de la combinatoire, *via* la « formule de Laplace » (Parzysz, 1997). Mais aujourd'hui le « rapport de forces » s'est complètement inversé : le

dénombrement n'intervient plus que comme outil dans certains calculs de probabilités relatifs à un espace probabilisé fini muni d'une probabilité uniforme, et plus spécialement dans l'étude de la loi binomiale ; on trouve uniquement, dans le programme de spécialité de terminale générale, la mention « Loi *binomiale* $\mathcal{B}(n,p)$ *: loi du nombre de succès. Expression à l'aide des coefficients binomiaux*. ». En fait, la combinatoire a existé bien avant la naissance des probabilités, elle continue d'exister indépendamment d'elles, dans d'autres domaines mathématiques (théorie des nombres, algèbre, géométrie), mais aussi – notamment – en théorie des graphes et en physique. On ne saurait donc considérer la combinatoire comme faisant partie du domaine probabiliste, même si elle n'est pas sans rapport avec lui, et l'ETMP contient assurément de la combinatoire.

En résumé, on peut dire que, si l'ETMP ne comprend pas la combinatoire, il comprend de la combinatoire, comme il comprend de la géométrie, de l'analyse, etc.

Une certaine « perméabilité » d'un ETM, et en particulier de l'ETMP, s'avère donc être une condition de son bon fonctionnement. Une conséquence en est la possibilité de glissements métacognitifs[8] qui peuvent en résulter. On voit par exemple, dans l'exercice ci-dessous (Figure 4), la tâche qui incombe à l'élève n'est certainement pas de nature probabiliste : elle consiste à comparer trois nombres, présentés sous des écritures différentes : 1/4, 28% et 3/10. C'est-à-dire qu'il s'agit d'opérer des changements d'écriture sur les nombres donnés, en transformant par exemple 1/4 en 25% et 3/10 en 30%, ou encore 1/4 en 0,25, 28% en 0,28 et 3/10 en 0,30. On peut sans doute supposer que la présence d'un tel exercice dans un chapitre de probabilités a pour origine le constat d'une maîtrise insuffisante, chez certains élèves, dans le maniement de ces écritures, sans doute observée lors de la résolution de problèmes de probabilités. Il s'agirait alors ici d'un exercice de « remédiation anticipée », destiné à inciter les professeurs à travailler la flexibilité des écritures avec leurs élèves, dans le but d'éviter d'y être confrontés plus tard à l'improviste.


42 **Des jeux**

On s'intéresse à trois jeux de hasard différents.

- Au jeu A, on a une chance sur quatre de gagner.
- Au jeu B, on a 28 % de chances de gagner.
- Au jeu C, on gagne 3 fois sur 10.

À quel jeu vaut-il mieux jouer ?

(Berger *et al.*, 2017, p. 329)

Figure 4 : Exemple de glissement métacognitif en probabilités.

À l'instar de la géométrie, un enjeu essentiel de l'enseignement des probabilités au niveau du secondaire est de parvenir à une maîtrise d'un paradigme de type théorique

8 Guy Brousseau définit ainsi le glissement métacognitif : « *Lorsque son enseignement a échoué, le professeur peut être conduit à se justifier et, pour continuer son action, à prendre ses propres explications et ses moyens heuristiques comme objet d'étude à la place de la véritable connaissance mathématique*. » (cité dans Kuzniak, 2005, p. 31).

(ici, P2). Au début de l'enseignement, on part de situations supposées connues des élèves, comme le tirage d'une boule d'une urne (Figure 5). Dans cet exercice corrigé, on commence par représenter les objets en jeu, puis on précise l'expérience aléatoire, ainsi que les issues considérées. On peut noter que la description de l'expérience est très vague (l'urne est-elle opaque ? les boules ont-elles la même taille ? etc.). De façon générale, cette première étape de la modélisation est souvent négligée, dans les manuels comme dans le programme, alors qu'elle n'est pas évidente pour une personne qui n'est pas familière du domaine. Les issues sont bien identifiables (question a), et à chacune est attribuée une « chance » de se produire (question b), qui deviendra aussitôt une « probabilité », laquelle « s'exprime à l'aide d'une fraction »[9]. L'équiprobabilité des issues est justifiée par la seule expression « au hasard », qui mériterait elle aussi d'être discutée. Enfin, la question se pose de la finalité de la demande d'une « valeur approchée au centième près » ? Il est possible qu'il s'agisse, ici aussi, d'une sorte de glissement métacognitif.

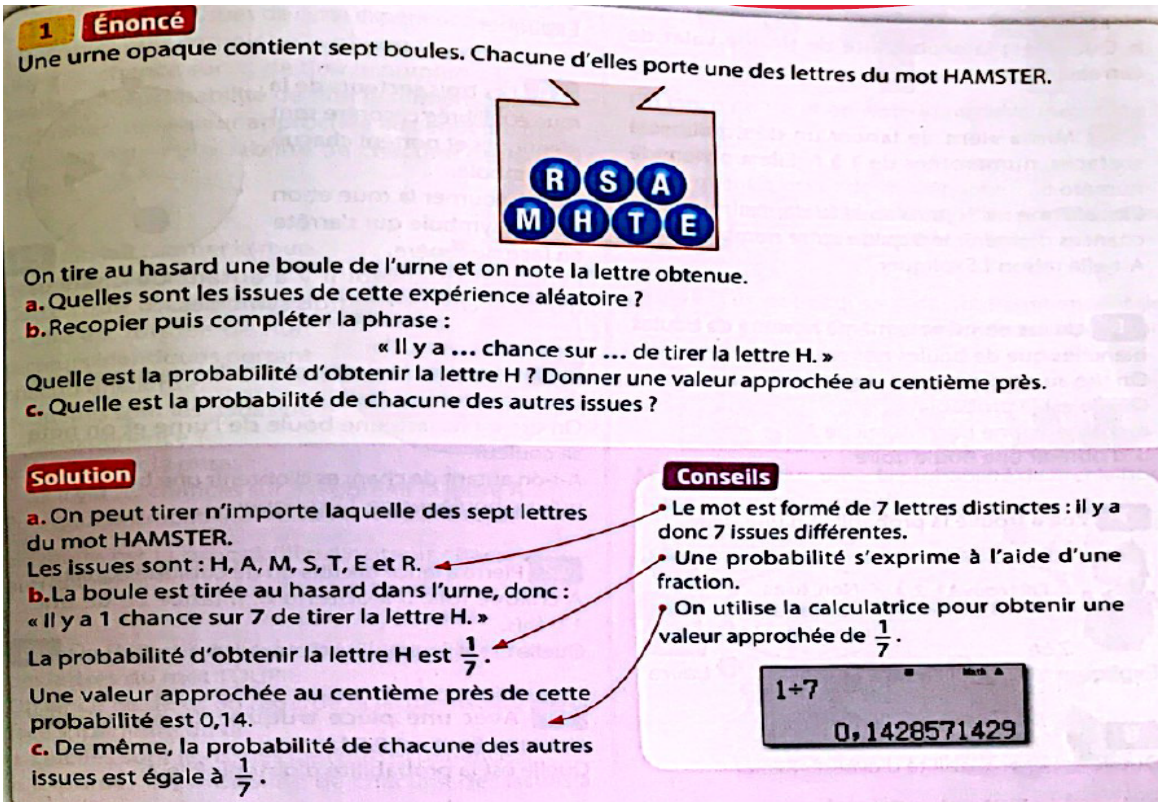


Figure 5 : Exercice sur un tirage d'urne (Collectif Transmath, 2017, p. 237).

Les situations prises en compte par le domaine de l'aléatoire sont au départ des situations de la vie réelle, même si elles sont ensuite modélisées (dans le paradigme P1, puis dans le paradigme P2) pour pouvoir être traitées. Ce rapport à la réalité conduit à faire intervenir divers domaines connexes comme :

9 Bien sûr, ceci ne fait pas partie des caractères d'une probabilité (*cf* l'aiguille de Buffon, par exemple).

- le numérique : les nombres rationnels dans le cas des probabilités discrètes, les nombres réels dans le cas des probabilités continues ;
- l'analyse pour les probabilités continues ;
- la programmation pour les expériences de simulation informatique,
- la géométrie pour la résolution de certains problèmes, comme celui du spaghetti coupé en 3.

Ceci amène à incorporer, en tant qu'outils, dans les différents ETMP (de référence, idoine, personnel), des parties de ces divers domaines, tels que la combinatoire, les limites, le calcul intégral ou l'algorithmique. Le cas limite est celui où la situation probabiliste est un simple prétexte pour travailler des notions-outils extérieures au domaine (voir plus haut) où la nécessité de se montrer vigilant, afin d'éviter autant que possible les dérives. Cela conduit à s'intéresser à la nature des articulations rencontrées entre l'ETMP et les ETM des domaines mis en jeu (statistique, analyse, algorithmique, etc.) pour pouvoir étudier de façon fine le travail mathématique dans l'ETMP.

NIVEAUX DE MODÉLISATION

On peut distinguer plusieurs niveaux dans l'énonciation d'une situation d'expérience aléatoire et, pour les mettre en évidence, nous prendrons, à titre d'exemple, une série d'énoncés correspondant à un même schéma d'urne élémentaire.

> Niveau 0 : *Un sac de toile contient 4 jetons blancs et 3 jetons rouges, de même forme et de même taille. On extrait sans regarder un jeton du sac, on note sa couleur, on le remet dans le sac puis on tire un second jeton. A-t-on plus de chance d'avoir tiré deux jetons de même couleur ou deux jetons de couleurs différentes ?*

Le langage utilisé est celui de la vie courante, les objets évoqués sont des objets réels, et le protocole de la manipulation effectuée est décrit en détail. Puisqu'on s'intéresse à la couleur des jetons tirés, deux issues – et deux seulement – sont possibles : ou ils sont de la même couleur, ou ils sont de couleurs différentes. On demande de désigner laquelle de ces deux issues a le plus de chances de se produire.

À ce niveau, la solution consiste à individualiser les jetons de l'urne, à considérer les 7×7 tirages qu'on peut obtenir, à les représenter (par exemple par un tableau à double entrée ou un arbre des possibles). On constate alors que 4×3 couples donnent un jeton blanc suivi d'un jeton noir et que 3×4 couples donnent un jeton noir suivi d'un jeton blanc, soit au total 25 couples sur les 49 possibles. En supposant implicitement que tous les couples ont tous la même chance d'être tirés, on conclut qu'on a plus de chance de tirer deux jetons de la même couleur.

> Niveau 1 : *Une urne contient 4 boules blanches et 3 boules rouges, indiscernables au toucher. On effectue deux tirages successifs au hasard d'une boule, avec remise. Quelle est la probabilité de tirer deux boules de couleurs différentes ?*

Plusieurs particularités linguistiques éloignent cet énoncé du langage courant ; elles indiquent qu'on se situe ici dans le paradigme P1 de l'ETMP. Tout d'abord, le mot « urne » n'a, de nos jours, que deux acceptions courantes : l'urne électorale et l'urne funéraire ; dans le cas présent, son emploi – ainsi que la référence aux « boules » qu'elle contient – a pour fonction d'indiquer au lecteur initié qu'on se trouve en présence d'un « schéma d'urne ». De même, la demande d'une « probabilité », et non d'une « chance », implique de donner comme réponse un nombre compris entre 0 et 1. Enfin, les expressions « indiscernables au toucher » et « au hasard » sont en fait des codages du fait que toutes les boules ont la même probabilité d'être tirées ; elles remplacent la description du protocole expérimental du niveau précédent.

Comme seul le niveau langagier a évolué, la solution précédente s'applique également ici.

> Niveau 2 : *Une urne contient **55 %** de boules blanches et **45 %** de boules rouges, indiscernables au toucher. On effectue deux tirages successifs au hasard d'une boule, avec remise. Quelle est la probabilité de tirer deux boules de couleurs différentes ?*

On retrouve les expressions « indiscernables au toucher » et « au hasard » précédentes, ainsi que la formulation de la question, mais cette fois on ne connaît pas le contenu de l'urne : on a seulement la proportion de boules de chaque couleur. En restant dans le paradigme P1, on peut se ramener à l'énoncé précédent en supposant que l'urne contient 100 boules, dont 55 blanches et 45 noires, ou encore 20 boules, dont 11 blanches et 9 noires. et adopter le même type de solution que précédemment. Mais si l'on se situe de P2, on peut par exemple construire un arbre de probabilité et, en appliquant ses règles d'utilisation, trouver que la probabilité de tirer deux boules de couleurs différentes est (0,55×0,45) + (0,45×0,55), soit 0,495.

Au niveau de la Terminale, on se trouve ici en présence d'une expérience aléatoire constituée d'une épreuve à deux issues avec une probabilité 0,55 de succès, et que l'épreuve est répétée deux fois de façon indépendante. On sait qu'alors la variable X, « nombre de succès », suit la loi binomiale $B(2 ; 0,55)$ et, d'après le cours, on a

$P(X = 1) = \binom{2}{1} 0,55^1.(1-0,55)^1$, soit 0,495.

CONCLUSION

Nous avons d'abord pu observer que, tout au long du cursus secondaire français, l'ETMP présente une perméabilité relativement importante, intégrant notamment des éléments des domaines numérique, statistique, algorithmique, ensembliste, voire géométrique. En outre, plusieurs niveaux de modélisation interviennent successivement, faisant d'abord passer de l'expérience matérielle à une expérience « pseudo-concrète » (Henry, 1999), qui se manifeste notamment par le recours à une terminologie spécifique confinant parfois au codage (paradigme P1) ; l'étude de

situations plus complexes nécessite ensuite la mise en place d'une « algèbre des événements », caractéristique du paradigme P2, dans lequel pourront être étudiés des modèles particuliers de distribution de probabilité (loi binomiale, loi normale, etc.). On peut également noter que la transition P1-P2 se révèle moins problématique de la transition G1-G2 en géométrie, peut-être en raison du fait que la modélisation y est plus progressive et que le recours à l'expérience matérielle est plus coûteux. La simulation numérique, quant à elle, présente *a priori* un risque de confusion entre les domaines probabiliste et statistique, du fait que c'est un modèle probabiliste qu'on introduit dans la machine mais que c'est une distribution statistique qu'on obtient à la sortie, distribution qui servira de base à une réflexion de nature probabiliste. Cependant, cette difficulté peut probablement être contrecarrée si l'ETMP de référence prend en charge une distinction claire entre ce qui est théorique et ce qui est observé.

RÉFÉRENCES

Kuzniak, A., Montoya Delgadillo, E., Richard, P.R. (2022). Mathematical work in Educational Context. The perspective of the theory of Mathematical Working Spaces. Springer.

Nechache, A. & Parzysz, B. (2023). A la recherche de l'ETM de référence au début de l'apprentissage des probabilités en France. *Actes du colloque ETM7.* In C. Derouet et A. Nechache. (Eds). (2023). *Actes du septième Symposium sur l'Étude du Travail Mathématique*. Strasbourg, France, 95-106.

Nechache, A. & Parzysz, B. (2019). Le jeu des paradigmes dans l'ETM probabiliste. In Vivier, L., Montoya Delgadillo, E., Richard, P. R., Gómez-Chacón, I., Kuzniak, A., Maschietto, M. & Tanguay, D. (Eds). (2019). Actes du Sixième Symposium sur le Travail Mathématique (ETM6, 13-18 décembre 2018). Valparaíso, Chile: Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, 179-191.

Parzysz, B. (2014). Espaces de travail en simulation d'expérience aléatoire au lycée : une étude de cas. Relime, 17(4), 65-82. https://dx.doi.org/10.12802/relime.13.1743

Manuels scolaires

Bau, D., Couteau, J., Gringoz, H., Guiader, F., Hascoët, M., Krieger, D., Magana, L., Pradel, M., Weyermann, F. (2019). *Maths 1re*. Magnard.

Berger, H., Billa, N., Demoulin, P. (2017). *Mission Indigo Maths Cycle 4*. Hachette Education.

Collectif Transmath (2016). *Transmath Cycle 4*. Nathan.

Collection Transmaths Lycée (2019). *Transmath 2nde*. Nathan.

Collectif (2021). *La résolution de problèmes mathématiques au collège. Collection les guides fondamentaux pour enseigner*. Ministère de l'Éducation nationale, de la Jeunesse et des Sports. https://bibnum.publimath.fr/MEN/MEN21001.pdf

QUALITÉ ET VALEUR DU TRAVAIL MATHÉMATIQUE DES ÉTUDIANTS À TRAVERS LE REGARD DE LA THÉORIE DES ETM : LA PERSPECTIVE DU CHERCHEUR

Alain Kuzniak[*], Assia Nechache[**]

[*]Université de Paris Cité et LDAR

[**]CY Cergy Paris Université et LDAR

L'objet de cette contribution est d'introduire la notion de valeur du travail mathématique comme outil théorique permettant au chercheur d'estimer le travail mathématique produit dans un contexte éducatif. Pour cela nous utilisons certains des observables dégagés lors de notre exploration du travail mathématique produit par des étudiants confrontés à une tâche de probabilité. Pour cette étude nous avons notamment retenu : la conformité du processus au paradigme en jeu, l'exactitude des résultats du point de vue mathématique, la planification et l'exécution d'un ensemble d'actions et les contrôles mis en œuvre. Il nous est ainsi possible de qualifier le travail mathématique observé comme étant efficace, incohérent, inadapté ou encore improductif. Ces outils devraient permettre d'évaluer la qualité du travail mathématique dans la perspective de faire avancer la réflexion et la recherche sur la formation et l'apprentissage mathématique.

INTRODUCTION

Dans cette contribution, nous prolongeons notre exploration du travail mathématique produit par des étudiants confrontés à une tâche de probabilité. Dans une étude antérieure, nous avons pu identifier et décrire les contrôles mis en œuvre par ces étudiants lors de la réalisation d'une tâche complexe (Kuzniak et Nechache, 2023). Pour cela, nous avons dégagé un certain nombre d'observables que nous avons considérés en relation avec les caractéristiques du travail mathématique : la conformité du processus au paradigme en jeu, l'exactitude des résultats du point de vue mathématique, la planification et l'exécution d'un ensemble d'actions associées aux contrôles mis en œuvre.

Nous souhaitons approfondir et préciser les critères de façon à permettre au chercheur de s'assurer de l'effectivité et de la valeur du travail mathématique réalisé par les différents actants qu'il peut observer dans le cadre de ses recherches.

TRAVAIL MATHÉMATIQUE ET QUALITÉ DU TRAVAIL

La théorie des ETM est centrée sur l'étude du travail mathématique et, dans ce cadre, un Espace de Travail Mathématique (ETM) désigne une structure abstraite organisée de manière à permettre à un individu de générer un travail mathématique et d'exécuter des tâches dans un domaine mathématique spécifique (géométrie, probabilité, etc.). Dans le cas des mathématiques scolaires, ces individus ne sont généralement pas des

experts mais des étudiants, plus ou moins expérimentés. Différentes sortes d'ETM ont été introduites pour tenir compte de la spécificité des différents actants concernés. L'ETM de *référence* dépend des institutions et des organisations éducatives. Les ETM *personnels et idoines* rendent compte de la manière dont le travail mathématique se développe et se déploie dans un contexte éducatif quand les actants sont effectivement confrontés à des tâches mathématiques.

En filigrane de cette approche, il y a l'idée que le travail mathématique produit doit satisfaire un certain nombre de critères et de normes. Notre but est de définir ces critères et ces normes et de voir comment il est possible de les utiliser pour, in fine, déterminer la valeur du travail mathématique mis en jeu. Dans notre approche, ces critères et normes sont des outils théoriques et méthodologiques qui permettent au chercheur de mettre en évidence les caractéristiques du travail et aussi les difficultés inhérentes à la mise en œuvre de ce travail. Il devient ainsi possible d'avancer sur la question d'une formation à un travail mathématique qui réponde non seulement aux exigences épistémologiques et institutionnelles mais qui soit aussi adapté au niveau cognitif des apprenants.

Nous illustrons notre approche avec différents exemples portant sur la mise en œuvre et la réalisation d'une même tâche emblématique en probabilité. Puis, en adoptant le point de vue du chercheur, nous introduisons les critères qui nous semblent les plus pertinents pour définir et déterminer, dans le cadre d'une recherche, ce que nous appelons la *valeur et la qualité du travail.*

OUTILS THÉORIQUES ET MÉTHODOLOGIQUES

Pour définir et étudier le travail mathématique, trois aspects sont pris en compte : le but du travail ; les processus du travail mis en œuvre ; les résultats de ce travail. L'objet de cette section est d'expliciter les outils théoriques et méthodologiques qui permettent au chercheur d'étudier ces différents aspects dans la perspective que nous avons énoncée plus haut.

Caractérisation du travail mathématique : les trois C

Nous avons défini trois critères permettant de caractériser les processus, les résultats et la circulation du travail mathématique réalisé dans l'ETM (Kuzniak et Nechache, 2021). Ces critères prennent en compte le (ou les) paradigme(s) qui oriente le travail mathématique et les composantes de l'ETM mobilisées dans le travail mathématique.

Le travail mathématique est dit *conforme*, lorsque les processus utilisés pour réaliser les tâches mathématiques suivent les protocoles établis dans le contexte privilégié par le niveau d'enseignement des élèves. Pour définir, établir et étudier ces règles et protocoles, nous nous appuyons sur la notion de paradigme. Les paradigmes contribuent à clarifier et à expliciter les règles, croyances et façons de faire qui émergent dans une communauté éducative dans un contexte précis. La conformité du travail est définie en référence à un paradigme donné qu'il convient d'expliciter.

Lorsque les résultats obtenus sont exacts selon le point de vue mathématique retenu, le travail est dit *correct*.

Enfin, le travail mathématique est qualifié de *complet* lorsque sa circulation est assurée entre toutes les genèses et composantes de l'ETM. La circulation du travail est déterminée par l'observation des plans verticaux et des genèses privilégiées. Il s'agit d'évaluer le processus et résultat du travail mathématique, et dans quelle mesure le travail mathématique est complet, ou confiné à une genèse particulière ou à un plan particulier.

La conformité et l'exactitude (*correctness*) du travail reposent en grande partie sur une épistémologie des savoirs mathématiques mis en œuvre dans la situation didactique ou dans la résolution de la tâche. Ces deux critères sont ainsi largement indépendants de la théorie didactique utilisée par contre la complétude est une notion propre à la théorie des ETM.

La complétude renvoie à une appréciation qualitative portant sur l'intérêt et la richesse du travail. Elle rend compte du degré d'élaboration conceptuelle et de la façon dont un individu maîtrise son travail de manière consciente. Comme l'a montré Cabrera *et al.* (2024), la complétude est à relier aux aspects cognitifs du travail mathématique. Elle fait apparaître la mise en relation consciente et conceptualisée des différentes composantes du travail mathématique.

Contrôles et régulation du travail mathématique

Dans le cadre de la réalisation d'une tâche et plus généralement de la mise en œuvre d'un travail mathématique effectif, il est important de considérer la manière dont les différents actants contrôlent et régulent leur travail pour s'assurer que leurs buts sont effectivement atteints. Pour cela, trois types de contrôles sont utilisés : sémiotique, technologique ou théorique (Kuzniak & Nechache, 2021).

Un *contrôle sémiotique* est relatif à la sélection et à l'usage d'un outil sémiotique basé sur l'usage des signes et des *representamen.* Il permet de s'assurer de l'adéquation du choix de ces signes mais aussi de leur bonne interprétation. Associé à la genèse sémiotique, il oriente et valide le processus de la visualisation.

Un *contrôle technologique* renvoie à la décision prise pour sélectionner un ou plusieurs outils technologiques (artefacts matériels ou digitaux, algorithmes). Ce type de contrôle est mobilisé pour s'assurer du bon usage de ces outils comme instrument technologique. Associé à la genèse instrumentale, il oriente et valide le processus de la construction.

Un *contrôle théorique* renvoie à une prise de décision sur le choix des outils théoriques (théorèmes et propriétés du référentiel théorique) et sur les formes de raisonnement considérés comme valides dans le paradigme retenu dans l'ETM de référence. Associé à la genèse sémiotique, il oriente et valide le processus du discours démonstratif de la preuve.

Ces trois types de contrôles fonctionnent conjointement pour valider les interactions entre les différentes genèses de l'espace de travail. De ce fait, ils assurent également la flexibilité entre les différentes composantes épistémologiques et les processus cognitifs de l'ETM.

Contrôles du travail et trajectoire du travail

Le travail mathématique est considéré comme un travail intellectuel qui implique une activité cognitive significative dont l'orientation et le but sont définis et soutenus par les mathématiques. Pour connaître le travail mathématique d'un individu, il est nécessaire, mais pas suffisant, d'observer l'ensemble de ses actions mathématiques pour résoudre une tâche ou un ensemble de tâches. Cet ensemble d'actions, structurées en épisodes, constitue la trajectoire suivie par le sujet pour résoudre la tâche prescrite. L'observation de cette trajectoire permet de s'assurer de la validité du protocole de résolution suivi, autrement dit, de savoir si le travail mathématique mis en jeu est conforme aux paradigmes de travail privilégiés dans l'ETM. Elle permet également d'étudier la circulation du travail et de vérifier la validité des résultats obtenus.

Pour analyser les types de contrôles et leur influence sur la trajectoire des actions, nous avons introduit deux outils méthodologiques spécifiques : les points de contrôle d'une trajectoire ; le découpage en actions et épisodes.

Les points de contrôle d'une trajectoire

Pour résoudre la tâche prescrite, les étudiants peuvent mettre en œuvre plusieurs sortes de procédures selon le modèle choisi. La résolution de la tâche nécessite de réaliser un certain nombre d'étapes. Ces dernières sont des points de passage obligés pour celui qui réalise la tâche. Ces points de passage constituent des indicateurs d'observation intéressants pour le chercheur. Ils caractérisent la trajectoire des actions mathématiques potentielles et effectives des étudiants. Ils dépendent de la tâche.

Le découpage en épisodes et actions

En s'inspirant de la méthode d'analyse de tâche cognitive menées dans le cadre plus général de l'étude du travail humain (Cognitive Task Analysis, Darses *et al.*, 2004), nous avons introduit une méthodologie adaptée à la théorie des ETM (Kuzniak et Nechache, 2021). Il s'agit de reconstituer les principaux épisodes planifiés par l'étudiant pour réaliser la tâche qui lui a été donnée par l'enseignant. Dans ce cadre, chaque épisode correspond à une sous-tâche auto-prescrite par l'étudiant lors de sa planification de la réalisation de la tâche. Le repérage des actions mathématiques qui constituent chaque épisode permet de les décrire.

Dans l'analyse prévisionnelle de la tâche (analyse *a priori*), le chercheur est amené à planifier différentes sous-tâches qui permettent de réaliser la tâche prévue. Ces sous-tâches permettent d'anticiper les épisodes que réalisera l'étudiant et ainsi d'analyser le travail mathématique prévu.

Cette méthode d'analyse du travail est à double sens. L'analyse dite *descendante* permet de repérer, à partir des productions collectées, les épisodes avec les actions

mathématiques que l'étudiant a effectuées pour réaliser la tâche. Les actions sont décrites dans la théorie des ETM. L'analyse dite *ascendante* permet de visualiser de manière synthétique, à l'aide du diagramme de la théorie des ETM, chacun des épisodes planifiés.

VALEUR ET QUALITÉ DU TRAVAIL MATHÉMATIQUE : UNE PREMIÈRE ANALYSE

L'étude qui suit s'appuie sur l'analyse du travail mathématique nécessaire pour résoudre une tâche mathématique. Cette tâche doit être emblématique ou, tout au moins, représentative du type de tâche mis en place dans un contexte scolaire à un niveau donné.

Après avoir présenté la tâche, nous analysons sa mise en œuvre (potentielle ou effective) dans différentes situations : proposition officielle disponible, mise en œuvre dans une classe, réalisation individuelle ou par binôme de la tâche. Chacun de ces exemples nous permettra d'illustrer différentes facettes du travail mathématique en relation avec les critères que nous avons dégagé précédemment. Cela nous permettra d'illustrer nos idées sur la valeur et la qualité du travail mathématique.

Présentation de la tâche prescrite aux étudiants

La tâche suivante intitulée « le segment et son milieu » est donnée comme suit :

> Sur un segment S, deux points A et B sont pris au hasard. On considère le résultat suivant : "La longueur du segment [AB] est strictement supérieure à la moitié de la longueur du segment S". Quelle est la probabilité de cet événement ?

Avec des visées différentes, cette tâche a déjà fait l'objet de recherches antérieures (Kuzniak *et al.*, 2016, Kuzniak et Nechache, 2023). Nous renvoyons à ces deux articles pour une analyse *a priori* détaillée.

Les points de passage (notés dans la suite PdP) associés aux contrôles.

Nous détaillons les points de passage qui servent à déterminer les points de contrôles sur la trajectoire prévisible mais aussi à anticiper certains épisodes ou sous-tâches.

PdP.1. La description de la situation aléatoire (modèle descriptif). Ce point nous donne des informations sur la manière dont les designer-actors (Henriquez *et al.*, 2022) envisagent la situation didactique ou dont les receivers-actors comprennent le problème et réalise sa représentation. Cela peut montrer des transformations importantes de la tâche.

PdP.2. La mise en place d'un modèle associé à un domaine mathématique. Ce point oriente la trajectoire et permet d'anticiper les savoirs mathématiques nécessaires et aussi les paradigmes dans lesquels le travail va se situer.

PdP.3. Travail mathématique effectué. Ce travail dépend des modèles mathématiques choisis. Il est un lieu privilégié d'observation des outils de contrôles utilisés ainsi que de la circulation du travail mathématique dans les ETM mis en œuvre.

PdP.4. Valeur de la probabilité de l'événement. Ce point est explicitement demandé dans l'énoncé, il constitue donc un passage obligé pour l'observation de la correction du travail et d'un retour global éventuel sur travail mathématique mis en œuvre.

Valeur et qualité du travail mathématique

Nous nous proposons d'évaluer la réalité du travail mathématique à travers sa valeur et sa qualité que nous définissons grâce aux différents critères et observables que nous venons d'énoncer. Pour cela, nous avons organisé ces différents éléments sous la forme d'un carré sémiotique (Greimas et Rastier, 1968) qui fait apparaître différents types de relations et d'oppositions entre les deux critères *conforme* et *correct*.

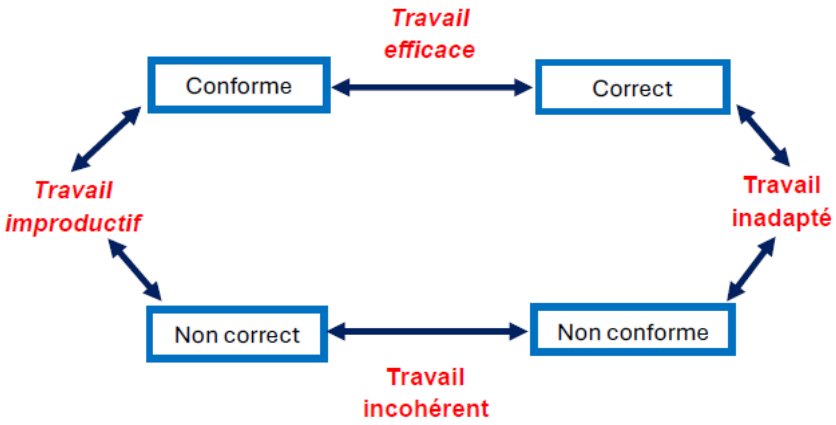


Figure. 1 Le carré sémiotique pour évaluer la qualité du travail mathématique.

Nous avons qualifié les différentes relations et oppositions qui apparaissent dans ce diagramme (Figure. 1). Lorsqu'un travail est conforme et correct, nous parlerons d'un travail efficace. Comme nous le verrons plus loin, il est intéressant de noter qu'un travail peut être conforme au protocole défini par le paradigme scolaire en vigueur et produire un résultat faux. L'inverse peut également être vrai et un résultat vrai peut-être produit à l'issue d'un travail non conforme. Dans le premier cas, nous parlerons d'un travail improductif et, dans le second, de travail inadapté (Figure. 1). Enfin, il reste à considérer le cas d'un travail à la fois non correct et non conforme. Dans ce cas, nous parlerons de travail incohérent et nous verrons que cette caractérisation peut rendre compte de certains phénomènes d'enseignement complexes.

Grâce à l'étude des points de passage, il est possible d'identifier le type de régulation qu'opèrent les étudiants (régulation dite interne) ou le professeur (régulation dite externe) sur leur réalisation de la tâche. L'observation de la gestion de cette planification associée à l'observation de la circulation, avec son éventuelle complétude ou, au contraire, ces confinements, rend compte de la maîtrise conceptuelle par l'élève de son travail.

ANALYSE DES DIFFÉRENTES DONNÉES

Pour illustrer ce qui précède et, en particulier, l'usage du carré sémiotique, nous avons sélectionné des productions.

Travail de référence donné comme modèle du travail mathématique efficace à suivre

Dans le document produit par le ministère (RESCOL-PROB, 2008) qui s'adresse aux enseignants, il est proposé de résoudre la tâche en deux temps.

(PdP.1) Une simulation informatique de l'expérience aléatoire permet de conjecturer une valeur de la probabilité de l'événement *D*. La simulation est construite par le professeur et elle s'appuie sur un tableur. Le lancer de dé est simulé 500 fois et un calcul de la fréquence d'apparition de l'événement D (sur un tableur) fait reconnaître une stabilisation des fréquences visualisées sur un graphique produit par le tableur. La valeur de la probabilité (PdP.4) est estimée autour de 0,25.

Cette simulation nécessite l'usage d'un artefact (tableur avec ses fonctions de calcul et de graphique) et elle produit différents signes (graphiques et tableau) sur lesquels, l'élève doit pouvoir observer et conjecturer une valeur de la probabilité de *D* à l'aide d'un usage implicite de la loi des grands nombres. Par conséquent, cette première partie du traitement de la tâche mobilise, de la part des élèves, essentiellement les genèses instrumentales et sémiotiques mises en relation avec un référentiel intuitif. La circulation du travail est ici dans le demi-plan [Sem-Ins] – Ref) orienté par le paradigme P1.

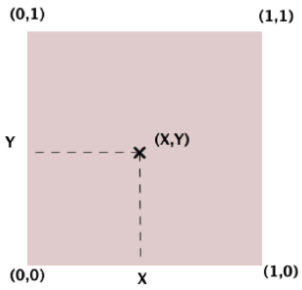


Figure 2 a. Modèle géométrique.

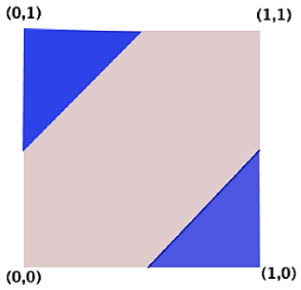


Figure 2 b. Modèle géométrique.

Dans un second temps et pour aller au-delà de la conjecture mécanique, il y a un passage vers un modèle mathématique (**PdP.2**). Un carré est introduit comme support du travail (Figure 2 a).

Le traitement mathématique (**PdP.3**) est basé sur l'étude de l'inéquation $|X - Y| > ½$, où X et Y sont des variables aléatoires continues qui suivent la loi uniforme sur l'intervalle [0 ; 1]. La résolution de l'inéquation s'effectue graphiquement à l'aide d'un carré de longueur de côté est égale à 1 unité. La probabilité de l'événement D est obtenue par le calcul de la somme des aires des deux triangles bleus divisée par l'aire du carré, soit ¼ (**PdP.4**).

Dans cette seconde partie, le traitement de la tâche mobilise, la genèse sémiotique sur le carré (Figure 2 b.) qui permet de traduire l'expérience aléatoire, puis ce carré sert d'artefact afin de résoudre les inéquations graphiquement. Le calcul de la probabilité s'effectue dans le cadre géométrique en mobilisant la formule de Laplace et la loi uniforme sur le carré. La circulation du travail donne lieu à un travail mathématique complet orienté par le paradigme P2.

En conclusion, le travail prôné par les auteurs du programme articule un jeu entre P1 (pour l'émission de la conjecture) et P2 pour la preuve de cette conjecture en s'appuyant sur un modèle géométrico-algébrique. Le travail mathématique sera ainsi conforme lorsqu'il jouera de manière complémentaire entre P1 et P2. La résolution de la tâche proposée dans le document propose un travail mathématique de « référence » qui mobilise les trois genèses de l'ETM ce qui rend ce travail complet. Elle suppose ainsi une conceptualisation avancée du travail mathématique en probabilité.

Travail efficace vs travail incohérent. Une mise en œuvre effective dans une classe de troisième

Après avoir vu le travail potentiel proposé par les instructions officielles, nous allons voir le travail mathématique effectif mis en œuvre dans un ETM idoine en classe de 3^{e} en 2015-2016 (Nechache, 2016). Le professeur de cette classe a construit lui-même la séance autour de la mise en œuvre de la tâche, le chercheur n'est pas intervenu et a observé et filmé le déroulement de la séance.

Globalement, le professeur a mis en œuvre le traitement de la tâche en trois sous-tâches. La première (**PdP.1**) consiste en une réalisation effective par les élèves de l'expérience aléatoire. Un segment de longueur 6 cm est construit et on place au hasard deux points A et B dont on mesure la distance. Les différentes mesures obtenues par les élèves sont relevées sur le tableau puis discutées. Il s'ensuit une remise en question de la façon de choisir « *au hasard* » les points *A* et *B*.

Dans un deuxième temps, le professeur propose de réaliser un lancer deux dés et de calculer la différence absolue entre les valeurs des faces supérieures des deux dés. Dans ce modèle, le choix au hasard de deux points sur un segment est assimilé à un lancer de deux dés à six faces. Le modèle proposé n'est plus continu mais discret et la suite du travail va articuler un premier travail de lancer de dés (PdP1) avec un travail mathématique (**PdP.3**) dans un modèle mathématique discret (**PdP.2**)

Détaillons ces différentes phases

PdP1- Les élèves répartis en binômes (10 au total) effectuent 50 lancers qui sont par la suite regroupés sur une feuille de calcul (soit 500 lancers au total). La fréquence d'apparition de l'événement *D* est calculée directement sur la feuille de calcul et est égale à environ 0.295555556 soit une probabilité estimée à 0.30. Le professeur propose de démontrer ce résultat (**PdP.3**). Pour cela, il commence par demander aux élèves de remplir un tableau à double entrée en calculant la différence absolue entre les nombres affichés sur les faces supérieures (Tableau 1).

En utilisant la formule de Laplace, les élèves ont calculé la probabilité de l'évènement *D* et ont obtenu 1/3.

Le professeur souligne alors que la valeur obtenue à l'aide de la fréquence était proche de 1/3, de ce fait la probabilité de l'événement *D* est égale à 1/3.

1er dé / 2e dé	1	2	3	4	5	6
1	0	1	2	3	4	5
2	1	0	1	2	3	4
3	2	1	0	1	2	3
4	3	2	1	0	1	2
5	4	3	2	1	0	1
6	5	4	3	2	1	0

Tableau 1. Calcul de la différence absolue.

Le travail mathématique proposé ici est conforme à un jeu entre P1 et P2 mais le choix des modèles transforme radicalement la nature du paradigme P2 dans lequel se situe le travail thématique effectué. Il n'est plus conforme au P2 de l'institution basée sur un modèle continu. De ce fait, on peut le considérer comme non conforme au paradigme officiel. Par ailleurs, le résultat produit est incorrect. Cependant, il faut noter qu'il était possible de trouver le résultat correct en augmentant le nombre de faces du dé (par exemple 18 faces) et en faisant tendre ce nombre vers l'infini.

En fonction du regard que l'on porte sur ce travail, on pourra ainsi le considérer comme non conforme et incorrect, ce qui en fait un travail incohérent au regard de l'institution. Ou bien comme un travail conforme mais inachevé et incorrect, finalement improductif. Ou bien si l'on considère qu'il s'agit d'une première approximation du résultat comme un travail conforme et correct. Toutes ces interprétations dépendent de l'institutionnalisation proposée par l'enseignant à la fin de la séance.

Travail conforme et difficulté d'avoir un travail correct en mathématique : travail improductif

La tâche a été prescrite à vingt-sept étudiants de première année de master pour l'obtention de leur Master en Enseignement des Mathématiques au niveau secondaire (MEEF 2[10]) en France en 2017. Nous avons retenu pour cette étude le travail d'un étudiant (Annexe 1) qui produit bien un travail conforme mais ne parvient pas au bon résultat (Kuzniak et Nechache, 2023).

L'étudiant passe directement à une modélisation mathématique sans expérience aléatoire (**PdP.2**). Il représente la situation aléatoire à l'aide d'un segment de longueur *s*. Ce segment est un signe interprété en relation avec le référentiel théorique. Il a placé

[10] Master Métiers de l'Enseignement, de l'Education et de Formation du 2nd degré (niveau collège et lycée en France)

deux points *A* et *B*, d'abscisses *a* et *b*, au hasard sur ce segment et il leur associe deux variables aléatoires de loi continue *X* (pour la position de *A*) et *Y* (pour la position de *B*). Il nomme *D* l'événement : « *La longueur du segment [AB] est strictement supérieure à la moitié de la longueur du segment S* ».

Le traitement mathématique mis en place pour arriver à la preuve (cf. Annexe 1) se développe dans le plan [Sem-Dis] avec un fort appui sur le référentiel théorique des probabilités dans un cadre ensembliste. Une difficulté est ressentie pour exprimer la valeur de la probabilité de $P(X<1/2+Y/X>Y)$. Pour la surmonter, l'étudiant utilise un dessin et obtient une valeur fausse de la probabilité cherchée.

De ce fait, son résultat final n'est pas exact. Le contrôle sémiotique qu'il utilise est basé sur la seule visualisation sans appui sur le référentiel théorique. Cette phase est clairement en rupture avec l'ensemble de son travail. En effet, globalement celui-ci est globalement conforme au paradigme P3 basé sur l'algèbre des événements mais il n'introduit pas les propriétés de la loi continue en relation avec le calcul des aires. Les traitements sémiotiques mis en œuvre sont toujours encadrés par des contrôles théoriques en relation avec les éléments du référentiel théorique probabiliste (loi uniforme, variables aléatoires). Ainsi, si son résultat final n'est pas correct, ce n'est pas faute de contrôles. Le problème vient de l'impossibilité qu'il a rencontré à exprimer correctement les probabilités qu'il cherchait et il s'est alors uniquement appuyé sur la visualisation.

Épaississement de la dimension instrumentale et glissement du travail dans le cadre d'un travail globalement efficace et conceptualisé

Cette fois la tâche a été donnée en 2024 à des binômes d'étudiants en Master MEEF 2nd degré. Nous étudions ici le travail d'un binôme A et N (Cf. Annexe 3) qui a produit un travail efficace.

La réalisation de la tâche comporte deux épisodes. Dans le premier (Cf. Fig 4 de l'annexe 3), les étudiants commencent par réaliser une simulation informatique de l'expérience aléatoire à l'aide de Python (**PdP2**) qui leur permet de simuler 100 000 lancers de dés. Cela a permis d'aboutir à une valeur de $P(D)$ autour de 0,25 (**PdP.4**).

La simulation n'est pas une expérience aléatoire avec un lancer de dés effectif. Elle repose entièrement sur des artefacts technologiques (notamment Python). Le traitement mathématique (**PdP3**) n'a de fait pas lieu dans le domaine des mathématiques mais dans celui de l'algorithmique avec un passage dans l'ETM algorithmique. Dans ce cadre le travail est complet avec un retour final vers les probabilités pour l'interprétation du résultat mais il ne se situe plus exactement en mathématique à l'issue d'un phénomène de glissement.

À la suite de cet épisode, le binôme A et N affirment (par écrit) leur doute sur leur résultat et la nécessité de le démontrer

> Nous avons conjecturé le résultat mais la méthode ne permet pas d'être certain. En effet, le programme permet de tester rapidement des centaines de milliers de cas ce qui permet

de tendre vers la solution, mais il ne donne pas la solution exacte. Puis nous avons démontré notre résultat nous permettant d'être certain.

Dans le deuxième épisode (Figure 5 de l'annexe 3), les étudiants changent de modèles en choisissant implicitement deux variables aléatoires X et Y qui suivent la loi uniforme sur l'intervalle [0 ; 1]. Le choix au hasard de deux points sur le segment de longueur 1 revient à choisir au hasard un point de coordonnées (X ; Y) dans le carré [0 ;1] ×[0 ;1]

De ce fait, le traitement des données dans le modèle uni-dimensionnelle (segment) bascule dans le modèle bi-dimensionnelle, le carré (cf. Figure 5-annexe 3). Les cas réalisant l'événement D sont représentés graphiquement par les deux triangles rectangles isocèles (en rouge sur la Figure 5-annexe 3). Le calcul de la probabilité s'effectue implicitement en calculant la somme des aires deux triangles rectangles isocèles (Figure 5-annexe 3).

Dans le processus du travail mis en œuvre, le carré est mobilisé à la fois, comme un signe (pour représenter les données) et un artefact (pour traiter les données). Ce changement de statut du carré est facilité par la flexibilité dans les changements de registres dont ont fait preuve les étudiants tout au long de la résolution de la tâche. Cette flexibilité est permise grâce au contrôle sémiotique mis en œuvre par les étudiants et ceci en relation avec le référentiel théorique. Ces changements de registres provoquent alors un jeu entre les genèses sémiotique et instrumentale en relation avec le référentiel théorique permettant de construire un discours prouvant que la probabilité de D est égale à ¼, un résultat cohérent avec le résultat obtenu à l'aide de Python. Le travail est ici complet et montre une maîtrise conceptualisation du travail mathématique. L'ensemble du processus est ici conforme aux règles du paradigme P2 et donne lieu à un résultat correct mathématiquement. Le travail peut être qualifié de *travail efficace* et conceptualisé.

CONCLUSION : VERS UNE DÉFINITION DE LA VALEUR DU TRAVAIL ET UNE ESTIMATION DE SA QUALITÉ

Nous avons dégagé différents critères qui permettent d'apprécier l'effectivité et le contenu du travail mathématique dans un cadre scolaire. Ces critères sont étroitement liés à la définition que nous retenons du travail mathématique à travers ses buts, ses processus de mise en œuvre et l'exactitude des résultats qu'il produit. Il est ainsi possible de lui attribuer certaines valeurs associées à un ensemble de normes. Ces normes dépendent étroitement des mathématiques qui en assurent la vigilance épistémologique.

A côté des valeurs de conformité et correction (ou exactitude), nous avons aussi introduit la notion de complétude lorsque la circulation du travail s'établit de manière harmonieuse entre tous les plans de l'ETM concerné. Il s'agit là d'une notion propre à la théorie des ETM. Enfin, nous avons vu l'importance des contrôles qui renvoient à des prises de décisions par l'élève ou l'enseignant de façon à permettre l'avancée et la régulation du travail. Ces contrôles ne constituent pas une valeur intrinsèque du travail

mathématique, ils sont plutôt des outils de régulation du travail qui permettent de s'assurer de ce que nous appelons la qualité du travail produit.

Comme nous venons de la voir, associer des valeurs au travail mathématique pose nécessairement la question de l'évaluation de ce travail et par là-même elle questionne la position et les intentions de l'évaluateur (Cyr et al, 2023). Dans cette étude, nous privilégions le point de vue du chercheur. Dans ce cadre, les critères et les valeurs que nous avons introduits, apparaissent comme autant de benchmarks qui guident l'observation du travail mis en œuvre et qui permettent in fine sa caractérisation précise. La qualité du travail peut alors être vu comme le résumé synthétique de ces observations grâce à notre classification qui précise si le travail est efficace, incohérent, improductif ou inadapté. Cependant ce concept est délicat à utiliser à cause de son aspect polysémique et normatif qui peut renvoyer à une idée productiviste et aliénante du travail.

REFERENCES

Cabrera, A., Montoya, D., Vandebrouck, F., Vivier, L. (2024). Le Travail mathématique conceptualisé. *Huitième symposium de l'Étude du Travail Mathématique*. Castro Urdiales, Espagne, octobre 2024.

Cyr, S., Danguy-Pichette, E. et Richard, P.R. (2023). A la recherche d'un référentiel. *Actes du septième Symposium sur l'Étude du Travail Mathématique*. Strasbourg, France, 117-129.

Darses, F. (2001). Providing practitioners with techniques for cognitive work analysis. *Theoretical Issues in Ergonomics Science, 2,* 268-277.

Greimas, A. J., & Rastier, F. (1968). The interaction of semiotic constraints. *Yale French Studies, (41),* 86-105.

Henriquez, C., Kuzniak, A. & Masselin, B. (2022). The Idoine MWS as an Essential Transitional Stage Between Personal and Reference Mathematical Work. In A. Kuzniak, E. Montoya-Delgadillo, & P. R. Richard (Eds.), *Mathematical Work in Educational Context: The Perspective of the Theory of Mathematical Working Spaces* (pp. 121-146). Springer.

Kuzniak, A., Nechache, A., & Drouhard, J.P. (2016). Understanding the development of mathematical work in the context of the classroom. *ZDM Mathematics Education, 4*8(6), 861-874. https://doi.org/10.1007/s11858-016-0773-0

Kuzniak, A., & Nechache, A. (2021). On forms of geometric work: a study with pre-service teachers based on the theory of Mathematical Working Spaces. *Educational Studies in Mathematics*, 70 (2), 127-142. https://doi.org/10.1007/s10649-020-10011-2

Kuzniak, A., & Nechache, A. (2023). Contrôles et travail mathématique. *Actes du colloque ETM7.* In C. Derouet et A. Nechache. (Eds.). (2023). *Actes du septième Symposium sur l'Étude du Travail Mathématique*. Strasbourg, France, 71-82.

Annexe 1

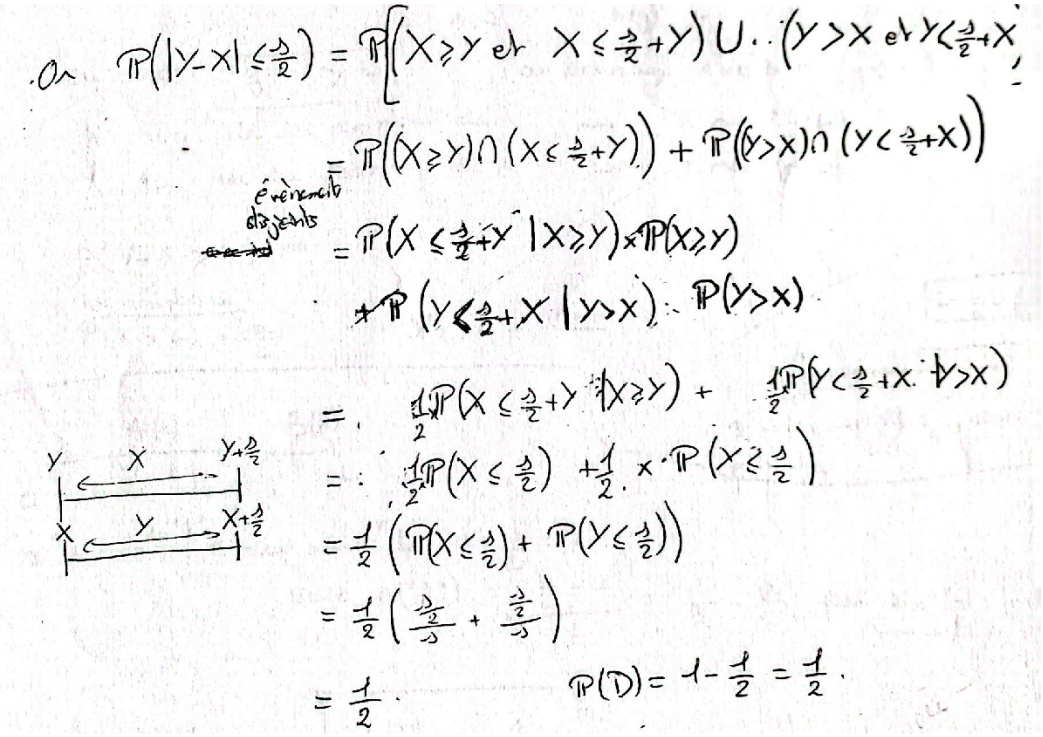


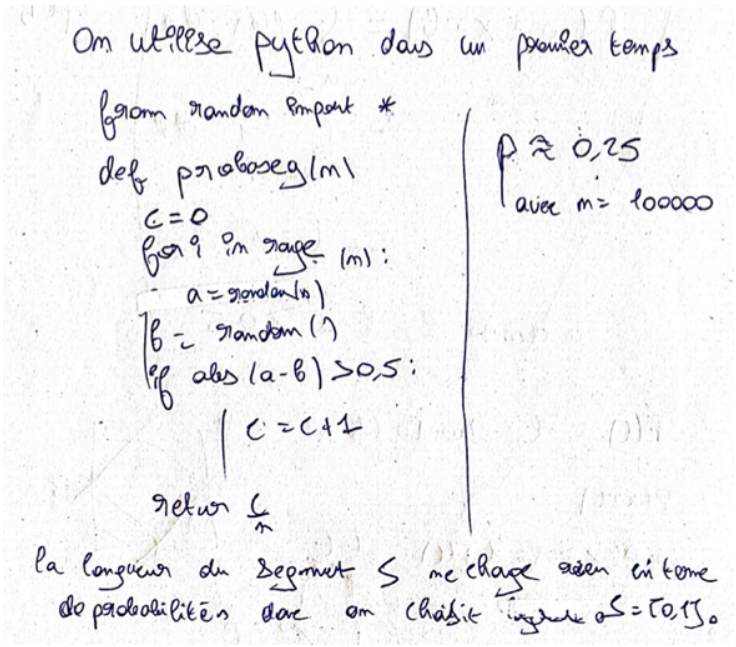
Fig. 3. Le traitement mathématique des données par l'étudiant Amadée.

Annexe 2

Paradigme	Type de modèle	Domaine mathématique	Pt fort du travail mathématique
Paradigme 1 P1	Modèle phénoménologique avec réalisation de l'expérience aléatoire	Nombre entier ou décimaux, Proportionnalité.	Preuve mécanique privilégiant le plan Sem-Ins
Paradigme 2 P2	Modèle mathématique	Calcul des probabilités (D et Q) dans une théorie ensembliste. Usage privilégié de l' algèbre, géométrie,	Preuve discursive articulée sur un référentiel proto-axiomatique. avec recours à la genèse instrumentale
Paradigme 3 P3	Modèle mathématique	Théorie des ensembles et intégration comme domaine privilégiées Théorie des probabilités	Preuve discursive articulée sur un référentiel axiomatique Plan privilégié Sem-Dis

Tableau 1 Tableau des paradigmes et les modèles mis en jeu.

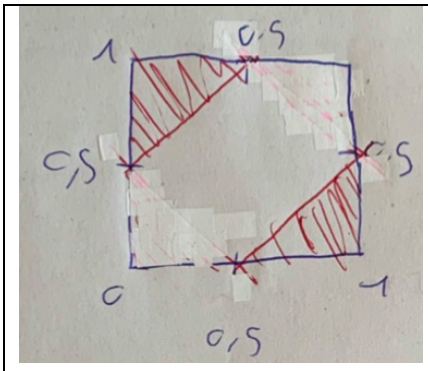
Annexe 3



Nous avons conjecturé le résultat mais la méthode ne permet pas d'être certain.

En effet le programme permet de tester rapidement des centaines de milliers de cas ce qui permet de tendre vers la solution, mais il ne donne pas la solution exacte. Puis nous avons démontré notre résultat nous permettant d'être certain.

Fig. 4. Le traitement mathématico-algorithmique du binôme A et N (Épisode 1).



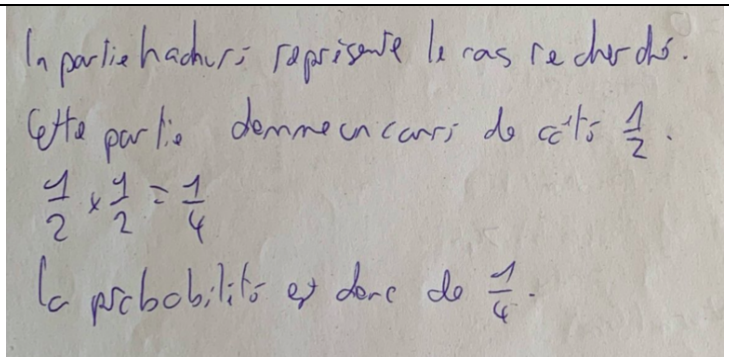


Fig. 5. Le traitement mathématique du binôme A et N (Épisode 2).

IMPLEMENTACIÓN DE UN DISEÑO DIDÁCTICO PARA INTRODUCIR LA INTEGRAL DEFINIDA EN ESTUDIANTES DE INGENIERÍA DESDE DOS PERSPECTIVAS TEÓRICAS: ETM Y TAD

Pilar Carrasco Espinoza[*], Katherine Machuca Pérez[**]

[*]Universidad del Desarrollo (Chili)

[**]Universidad de Viña del Mar (Chili)

El objetivo de esta investigación cualitativa es estudiar el trabajo matemático personal de estudiantes de ingeniería bajo un diseño didáctico para introducir la integral definida, complementado dicho estudio con las técnicas que utilizan para la resolución de tareas matemáticas presentes en el diseño didáctico. El sustento teórico es una complementariedad teórica, el espacio de trabajo matemático (ETM) y la teoría antropológica de lo didáctico (TAD), método de investigación un estudio de caso, compuesto por 12 estudiantes. Presentaremos los resultados, *contrastando análisis a priori y posteriori y, una discusión sobre una complementariedad teórica.*

Palabras Claves: integral definida, complementariedad teórica, ETM, TAD

PROBLEMÁTICA

En su estudio sobre la comprensión que tienen los estudiantes sobre la integración, Orton (1983) concluye que las preguntas que involucran la integral definida como límite de una suma constituye una dificultad. Mundy (1984) realizó una investigación asociada a la integración de funciones positivas, evidenciando que los estudiantes no relacionan la integral de dichas funciones con el área bajo la curva. Aldana (2011) en su tesis doctoral resume problemas de aprendizaje asociados al concepto de integral definida. Señalando que los estudiantes identifican "integral" con antiderivada o primitiva, reduciendo la relación entre derivada e integral a un proceso algorítmico. Además, menciona que los estudiantes generalmente identifican la integral definida con la regla de Barrow, incluso cuando esta no se puede aplicar. Finalmente, afirma que los estudiantes no establecen la conexión entre la representación gráfica y algebraica de una función, y presentan dificultades para calcular el área bajo una curva a partir de su gráfica.

Mateus-Nieves (2021) realizó una historiografía a la integral, con el fin de identificar su ontología e implicaciones en el proceso de formalización del cálculo integral. Señala que el concepto de integral se debe entender como un ente matemático, considerando para su estudio tres periodos históricos, la integral como operador, evolución de la operación integración originando el cálculo integral y la fundamentación del cálculo integral, ya que de esta manera es posible generar una enseñanza que respete sus fundamentos.

En Jiménez *et al.*, (2018) se analizaron diferentes estrategias de enseñanza de conceptos de cálculo con el propósito de diseñar una forma de presentar la integral definida con estudiantes de Ingeniería. Se sugiere que para iniciar el estudio de la integral definida se utilicen situaciones en contextos específicos de variación y cambio, con el propósito que el estudiante identifique conceptos previos como función, intervalo, partición, entre otros, que les permitan plantear estrategias de solución e incentivar el interés por aprender.

En Carrasco (2023) se realiza un estudio con estudiantes de ingeniería sobre la introducción de la integral definida, cuyo cuestionamiento inicial fue ¿cómo calcular el área de una región plana cuyo contorno no es completamente rectilíneo? En dicho estudio se elaboró e implementó un diseño didáctico para la introducción de dicha integral, bajo el sustento teórico de la TAD. Los resultados señalan que introducir la integral definida desde el método de exhaución, promueve en los estudiantes la idea inicial de la subdivisión de una región, utilizando figuras conocidas, tales como rectángulos, triángulos y círculos.

En nuestra investigación, nos propusimos realizar un rediseño de la propuesta didáctica presentada en Carrasco (2023) e implementarla nuevamente con estudiantes de ingeniería, mediante una complementariedad teórica desde TAD y ETM. Ya que, de esta manera, además de identificar tipos de tareas, técnicas, tecnologías y teorías que sustentan los procedimientos que se llevan a cabo, podremos describir registros, conversiones, procesos de construcción y prueba que presentan los estudiantes, cuestiones no contempladas en el estudio de Carrasco (2023) y que resultan importantes para describir la construcción del conocimiento en relación con el objeto integral definida.

MARCO TEÓRICO

Esta investigación se sustenta desde una complementariedad teórica, los Espacio de Trabajo Matemático (ETM) (Kuzniak, 2022a) y la Teoría Antropológica de los Didáctico (TAD) (Chevallard, 1999; Gascón, 2003). Nos proponemos realizar esta investigación desde una complementariedad teórica ¿Qué elementos aportan la una de la otra?

La teoría de los ETM tiene por objetivo describir el trabajo matemático que realizan las personas cuando resuelven tareas matemáticas en contexto educativo, con componentes en un plano epistemológico y cognitivo. La noción de trabajo matemático está en centro de esta teoría, y resulta esencial para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. En la actualidad, la investigación se preocupa por describir, comprender y estudiar la formación, evolución o transformación del trabajo matemático (Kuzniak, 2022a). La noción de tarea matemática, si bien es cierto no forman parte del ETM, es importante, ya que estas son el medio por el cual se estudia el trabajo matemático.

El plano epistemológico está compuesto por tres polos; *representamen o signos,* objetos concretos y tangibles, a*rtefactos* que pueden ser materiales, tecnológicos o simbólicos, y el *referencial teórico* constituido por un conjunto de propiedades, teoremas y axiomas. El *plano cognitivo* se compone de tres procesos; la *visualización*, la *construcción y la prueba* que utiliza razonamientos de validación basados en un referencial teórico. Cada uno de estos componentes se relacionan entre sí mediante el desarrollo de tres génesis; semiótica, instrumental y discursiva (Kuzniak, 2022b).

La idea de paradigma en el ETM tiene como objetivo definir caracterizaciones más precisas del trabajo matemático. Montoya & Vivier (2016), definieron tres paradigmas en análisis: Análisis Aritmético/geométrico (**AG**): que permite interpretaciones con suposiciones implícitas basadas en la geometría, los cálculos aritméticos o el mundo real. Análisis de cálculo (**AC**): en el que las reglas de cálculo se definen de forma más o menos explícita y se aplican independientemente de la reflexión sobre la existencia y la naturaleza de los objetos introducidos. El análisis real (**AR**): que se caracteriza por el trabajo que implica aproximaciones y vecindades, incluso topológicas; la definición y las propiedades se establecen teóricamente que permiten un "trabajo ε" específico de este paradigma: límites, desigualdad, "lo despreciable".

Por otra parte, la TAD es una teoría desarrollada por el investigador francés Yves Chevallard, la cual busca comprender cómo se produce el conocimiento matemático y cómo se enseña en el contexto escolar. Esta teoría se basa en la idea de que la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas son procesos culturales y sociales que deben ser analizados desde una perspectiva antropológica. La teoría sitúa la actividad matemática y, por lo tanto, la actividad del estudio de las matemáticas, en el conjunto de actividades humanas y de instituciones sociales, y es por ello por lo que se habla de teoría "antropológica". Describe el conocimiento matemático mediante la noción de praxeología u organización matemáticas como un modelo básico para describir dicho conocimiento, en la que se identifican tipos de tareas, técnicas, tecnologías y teorías que sustentan los procedimientos que se llevan a cabo.

Desde esta teoría, la noción de tarea (T) es la acción sobre un objeto particular, dicho objeto puede ser un ejercicio, un problema y cualquier actividad que se proponga. Para resolver una tarea se requiere de técnicas τ, esto es, cómo saber-hacer una determinada tarea. La tecnología θ es considerada como el discurso racional sobre la técnica τ. Tiene como objetivo justificar la técnica, asegurando resolver las tareas T. Permite explicar y justificar por qué una determinada técnica funciona y puede dar lugar a nuevas técnicas. La teoría Θ desempeña el mismo papel frente a la tecnología, como el que la tecnología desempeña frente a la técnica. La teoría está ubicada en un nivel superior de justificación, más cerca del saber sabio. Chevallard distingue dos tipos de praxeologías: Praxeologías Matemáticas u Organizaciones Matemáticas (OM) y Praxeologías Didácticas u Organizaciones Didácticas (OD).

Hacer matemáticas consiste en poner en práctica una praxeología matemática para realizar un determinado tipo de tareas, estudiar matemáticas consiste en construir o reconstruir determinados elementos de una praxeología matemática para dar respuesta a un determinado tipo de tarea problemática (Chevallard, 1999; Gascón, 2003).

Complementariedad teórica. Como señalamos anteriormente, ambas teorías utilizan la noción de "tarea". Si bien es cierto que utilizan definiciones diferentes, podemos señalar que en ambas se considera de manera general como un "problema matemático" que se desea resolver en una comunidad educativa. Para estudiar y comprender tal resolución, desde el ETM se considera la noción de trabajo matemático con componentes en un plano epistemológico y cognitivo. Mientras que desde la TAD se considera la noción de organizaciones matemáticas, las cuales implican tres elementos, la técnica, la tecnología y la teoría. Así, consideramos que podemos realizar una complementariedad teórica a la hora de estudiar las resoluciones de dichas tareas, cabe destacar que no pretendemos hibridar teorías, sino más bien complementarlas, ya que el ETM considera elementos cognitivos propios de la persona que aprende matemáticas (Kuzniak *et al.*, 2022).

En la tabla 1 se muestra los elementos que estudiaremos en las resoluciones de los estudiantes frente al diseño didáctico. En ella, presentamos los elementos de la TAD y cómo estos se complementan con los del ETM. De este modo, no proponemos equivalencias directas sino correspondencias analíticas. El concepto de tarea está presente en ambas teorías. En la TAD, la tarea se inscribe en una organización matemática institucional; en ETM, se estudia como detonante del trabajo matemático personal. La convergencia permite observar tanto el diseño como la realización de la tarea.

ETM	tarea	TAD	Se analiza la misma tarea desde dos niveles: institucional y cognitivo
Trabajo matemático		Organizaciones matemáticas	Una praxeología puede analizarse como un espacio de trabajo multidimensional
- Génesis		- Técnica	La técnica en TAD es saber-hacer una determinada tarea y estas pueden ser descritas mediante las diferentes génesis.
- Planos verticales		- Tecnología	La tecnología en TAD es la justificación de la técnica, y estas pueden ser descritas mediante los diferentes planos
- Paradigmas		- Teoría	La teoría en TAD es el nivel más abstracto de justificación de una tecnología. Los paradigmas en el ETM se pueden reconocer en las técnicas, tecnologías y teorías

Tabla 1: **Elementos teóricos de ETM y TAD.**

METODOLOGÍA

Adoptamos el método cualitativo, estudio de *caso instrumental* (Stake, 2010) compuesto por 12 estudiantes de ingeniería civil, todos pertenecientes a una universidad privada ubicada en la región Metropolitana, Chile. Los estudiantes no tenían noción sobre la integral definida y se encontraban realizando un curso formal en dicha institución llamado fundamentos del cálculo integral, el cual se imparte en el tercer semestre de la carrera (de un total de 11 semestres). La experimentación se llevó a cabo en una sesión dentro de un curso formal en formato taller presencial durante marzo del 2024. Los estudiantes trabajaron en parejas las cuales fueron conformadas a elección de ellos y disponiendo de dos horas en total para el desarrollo de la actividad.

En el proceso de análisis de los datos, realizamos un análisis cualitativo de datos, identificando las técnicas, tecnologías y teorías en las producciones de los estudiantes. Además, realizamos una descripción del trabajo matemático presentado por los estudiantes en dichas producciones, como un objeto de estudio complejo y multidimensional, identificando planos verticales ([Sem-Ins], [Ins-Dis], [Sem-Dis]) y génesis activadas, así como también los paradigmas que guían el trabajo. La técnica de recogida de datos fue *observación no participante* (Ruiz, 2012) mediante la implementación de la propuesta didáctica, cuyo registro fue escrito y guiado por las investigadoras.

Diseñamos e implementamos una propuesta didáctica para introducir la noción de integral definida, la cual consiste en calcular aproximaciones del área del círculo de radio 1 mediante el área de polígonos regulares inscritos y circunscritos en la circunferencia mediante el método de exhaución utilizado por Arquímedes. Para ello, consideramos dos sucesiones, creciente y decreciente, que aproximan el área del círculo, previamente recordamos la noción de polígono regular inscrito y circunscrito, preguntamos cómo calcular el área de dichos polígonos, posteriormente calcular dichas áreas para diferentes valores de "n" en las sucesiones. Dado que los estudiantes ya tenían conocimientos de límite de sucesiones, se les solicitó determinar el límite de dichas sucesiones, ya sea con técnicas de cálculo o de otra forma argumentando su respuesta. Finalmente, se solicitó la aproximación del área en el plano cartesiano de una región acotada por una función y los ejes coordenados.

El diseño didáctico. A continuación, en la figura 1 presentamos un panorama general y análisis a priori del re-diseño didáctico para la introducción de la integral definida. En el diseño didáctico original, la aproximación al área del círculo mediante la convergencia de sucesiones se trató en una planilla Excel en el cual los estudiantes visualizaban dicha convergencia (sin conocer las sucesiones involucradas en ello). En nuestro caso, nuestro objetivo era que el estudiante pudiese determinar dicha convergencia, conociendo las sucesiones involucradas, mediante una aproximación numérica, cálculo de límites o utilización de lenguaje natural.

ANÁLISIS Y RESULTADOS

Sobre el cálculo del área de un polígono regular, podemos señalar que la gran mayoría consideró subdividir el polígono regular en triángulos congruentes fundamentales o triángulos rectángulos, lo cual se corresponde a la técnica y tecnología asociada esperada.

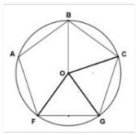
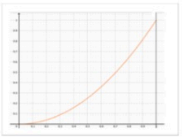
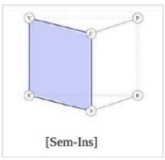
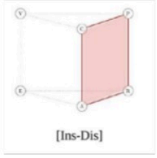
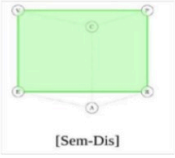
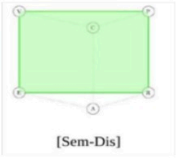
Determinar el área de un polígono regular.	Aproximación al área del circulo mediante sucesiones y determinar el límite de cada sucesión	Calcular el área de una región limitada por una función.
	$API_n = ncos\left(\frac{\pi}{n}\right)\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$ $APC_n = n\tan\left(\frac{\pi}{n}\right)$	
Técnica: Subdividir el polígono regular en triángulos para calcular el área del polígono a partir de la suma de áreas de los triángulos. **Tecnología:** Los triángulos fundamentales congruentes. **Teoría:** Aditividad del área.	**Técnica:** Cálculo del área de los polígonos regulares para diferentes valores de n para la aproximación del área. Relacionar las sucesiones con el acotamiento dado por el área del círculo. **Tecnología:** Explicitar los primeros doce términos de cada sucesión. Los términos están acotados por π. **Teoría:** Convergencia de sucesiones monótonas y acotadas. Teorema de compresión para sucesiones.	**Técnica:** Subdividir la región en polígonos cuyo cálculo de área es conocido. Realizar una estimación mediante la información del gráfico. **Tecnología:** Área de polígonos conocidos y evaluación de la función en diferentes puntos elegidos. **Teoría:** Elementos de geometría analítica, evaluación de funciones.
AG  [Sem-Ins]	**AC/AR**  [Ins-Dis]  [Sem-Dis]	**AC**  [Sem-Dis]

Figura 1: El diseño de la propuesta de didáctica y su análisis a priori desde ambas perspectivas teóricas.

Para ello, utilizaron en gran parte, registro de lenguaje natural y también figural. Los artefactos simbólicos involucrados son el área de triángulos isósceles o rectángulos, y la suma de dichos triángulos. En la figura 2 se presentan dos producciones en las cuales se evidencian dichos elementos, incluso en una de ellas se realiza la subdivisión de un polígono regular de cinco lados.

En cuanto a la aproximación del área del círculo mediante sucesiones, podemos señalar que en todas las producciones se evidencia la técnica y tecnología esperada, es decir, que los diferentes valores de las áreas de polígonos inscritos o circunscritos, que corresponden a las imágenes de las sucesiones, se aproximan ya sea por valores menores o mayores a π, utilizando una calculadora.

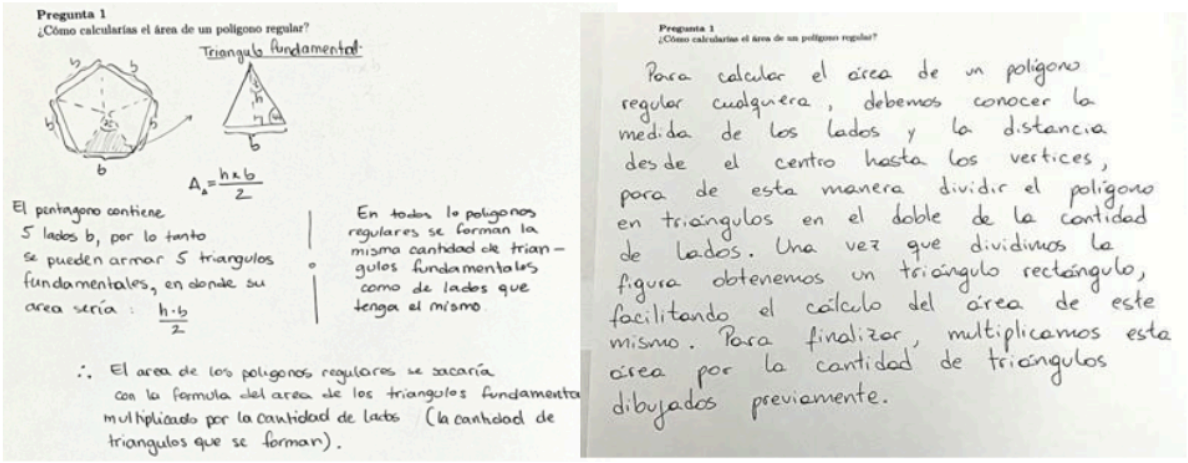


Figura 2: Producciones acerca del área del polígono.

En la figura 3 podemos observar que se activa el plano [Ins-Dis], cuya entrada en la resolución de la tarea es por medio de la génesis discursiva a través de la noción de sucesión, y las funciones trigonométricas seno y coseno involucradas en el término general de las sucesiones. Posteriormente, se realizan los cálculos para diferentes valores de "n", utilizando para ello el artefacto simbólico de operatoria de números reales.

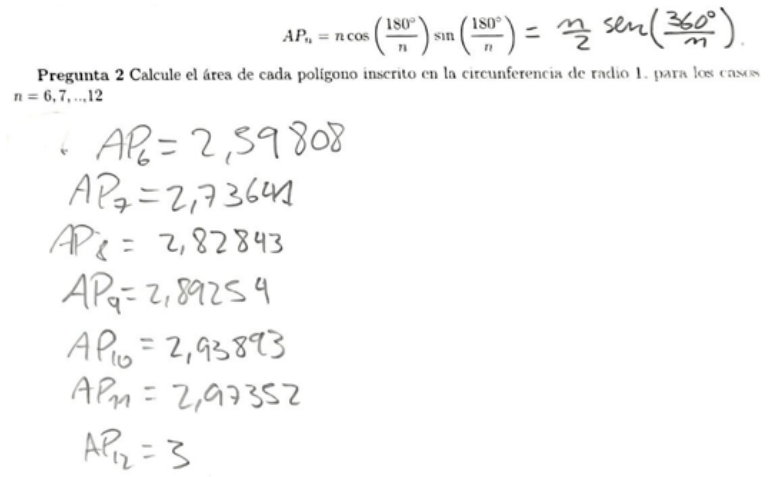


Figura 3: Producción que aproxima el área del círculo mediante sucesiones crecientes.

Posteriormente, cuando se solicita determinar el límite de las sucesiones crecientes y decrecientes que aproximan el área del círculo, podemos señalar que en la mayoría de las producciones se evidencia, de forma implícita o explícita, la técnica esperada, es decir, relacionar las sucesiones que representan al área de los polígonos inscritos o circunscritos con el acotamiento dado por el área del círculo, cuya tecnología es el acotamiento de los términos de la sucesión por π.

En una producción (ver figura 4) se observa el cálculo de dicho límite utilizando identidades trigonométricas y cambio de variable, cabe destacar que sólo esta

producción realizó el cálculo de dicho límite, activando el plano [Sem-Dis], cuya entrada en la resolución de la tarea es mediante el uso de la identidad trigonométrica del ángulo doble y cálculo de límites, donde la génesis semiótica se activa mediante la producción de signos propios del cálculo de límites. También se utiliza el registro natural para determinar el límite mediante el acotamiento de polígonos regulares inscritos el circulo. En esta producción el trabajo se guía por AG/AC, ya que las reglas de cálculo de presentan de forma explícita, y también se observa una respuesta desde un argumento geométrico.

Cabe destacar que en ninguna producción se argumenta mediante la convergencia de sucesiones monótonas y acotadas, la teoría desde la TAD, trabajo en AR desde ETM, sino más bien el argumento es mediante una visualización geométrica de los polígonos inscritos y circunscritos en la circunferencia, en consecuencia, un trabajo en AG. Sin embargo, durante el cierre de la sesión y mediante devoluciones realizadas los estudiantes señalaron la monotonía de las sucesiones y el argumento desde el teorema de compresión para sucesiones.

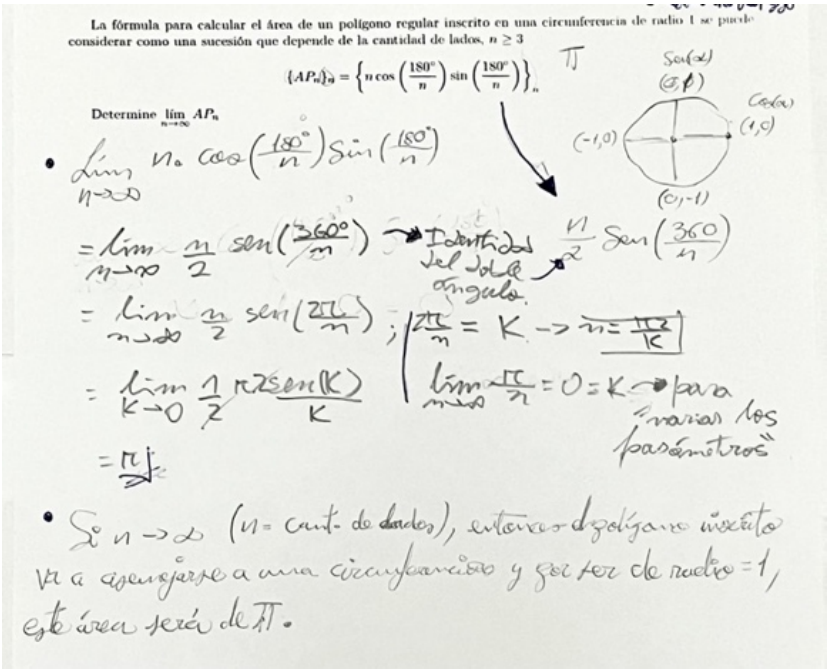


Figura 4: Producción en la determinación del límite de las sucesiones.

Finalmente, en el último momento se solicitó una aproximación del área de una región acotada en el plano cartesiano por la función $y = x^2$ y los ejes coordenados de dos formas diferentes. Podemos señalar que en la gran mayoría de las producciones se utiliza la técnica y tecnología esperada, es decir, subdividir la región en polígonos cuyas áreas son conocidas. Para ello, en algunos casos utilizaron sólo rectángulos y en otros casos utilizaron triángulos y rectángulos, además de la evaluación de la función dada en diferentes puntos elegidos del dominio, para luego estimar el área en base al gráfico dado y la suma de dichas áreas. Podemos señalar que el trabajo en esta etapa

está guiado por AG/AC, ya que se utiliza un argumento tanto geométrico, así como analítico, mediante el cálculo de áreas conocidas.

En la figura 5 presentamos una producción en la cual utilizaron diez rectángulos de igual ancho y en donde se presenta claramente la evaluación de la función en el punto izquierdo y derecho de cada subintervalo, haciendo uso de la sumatoria para representar dicha aproximación. Cabe destacar que los estudiantes señalan que en una forma sobra área y que en la otra falta área, en otras palabras, la suma superior e inferior. La entrada en la resolución de la tarea es mediante la génesis semiótica a través de la representación de los rectángulos por sobre la gráfica, para luego establecer el área de cada rectángulo como "$0{,}1 * f(x)$" y explicitando la sumatoria que representa la aproximación del área, en la cual se identifica el punto de evaluación de la función como el punto máximo o mínimo de cada subintervalo, activando así el plano [Sem-Dis] y evidenciando la teoría desde la TAD.

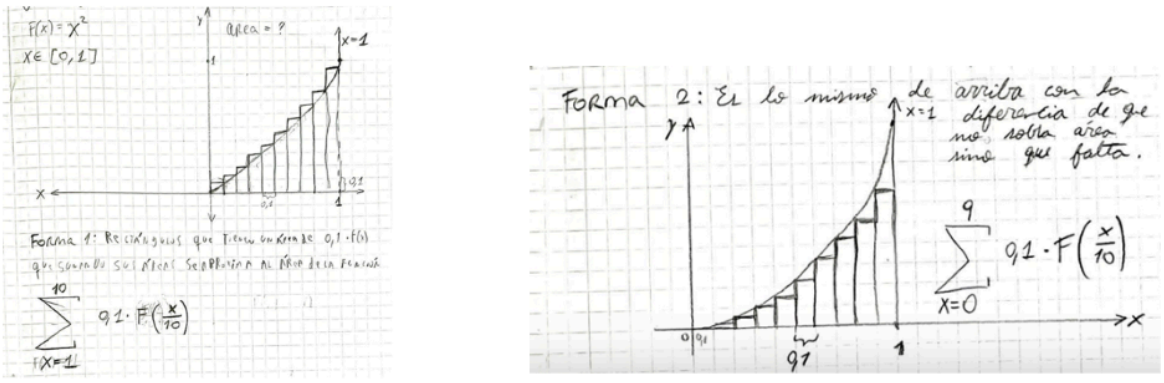


Figura 5: Producción que aproxima el área mediante sumas superiores e inferiores.

Consideramos que, en este último momento, faltó realizar explícitamente la pregunta donde deban realizar una mejor aproximación del área, para que de esta manera hubiesen relacionado una subdivisión más fina del intervalo [0,1] con dicha aproximación. Este punto se abordó durante el cierre de la sesión, así como también el método de exhaución que utilizó Arquímedes para obtener el área del círculo.

Podemos dar cuenta de una diferencia entre el trabajo matemático esperado y el efectivamente realizado por los estudiantes. Desde la TAD, tanto la tecnología como la teoría no son las que nosotros consideramos en el análisis a priori. En este sentido, podemos dar cuenta que en algunos casos los estudiantes pensaron, equivocadamente, que la región entre la función $y = x^2$, las rectas $x = 1; x = 0; y = 1$ representa un cuarto de circunferencia. Por lo que para estimar el área bajo la curva (ver figura 6), realizaron la resta entre el área de un cuadrado de lado uno y un cuarto del área de una circunferencia de radio 1.

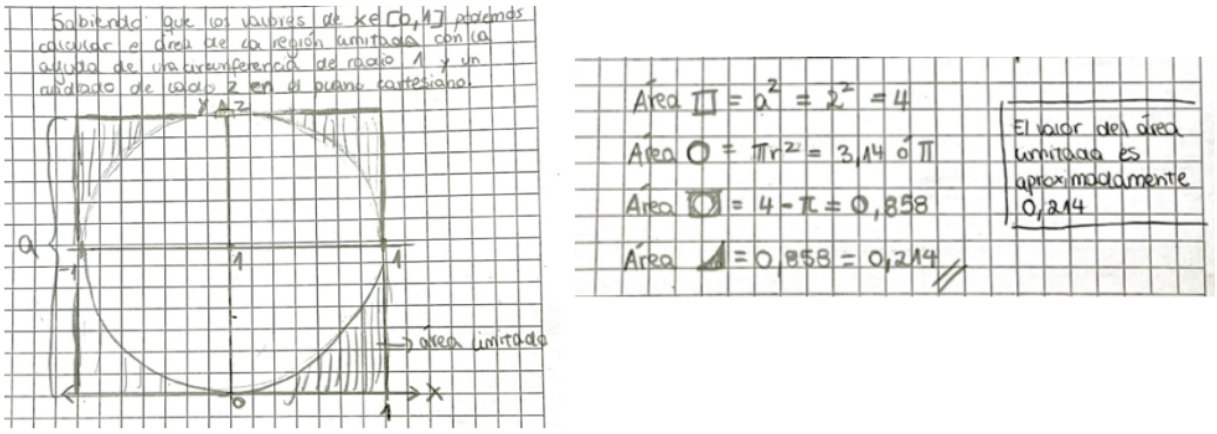


Figura 6: Producción que asocia la gráfica con un cuarto de circunferencia.

Creemos que la asociación de la gráfica con un cuarto de circunferencia puede estar influenciado por la visualización de la gráfica dada y también por las tareas realizadas anteriormente, cuestión que tensiona la génesis semiótica.

CONCLUSIONES

Según nuestros análisis, podemos dar cuenta durante el cierre del taller, que introducir la integral definida desde el método de exhaución, promueve en los estudiantes la idea inicial de la subdivisión de una región no poligonal utilizando figuras poligonales. Esta cuestión es fundamental para una mejor comprensión del área bajo la curva como el límite cuando n tiende al infinito de sumas de Riemann, ya que los mismos estudiantes experimentaron la relación entre la cantidad de lados de los polígonos con la precisión del cálculo de área. Además, la misma idea se introduce para otros conceptos que son parte del curso que los estudiantes estaban realizando, tales como longitud de curva en coordenadas cartesianas, paramétricas o área en coordenadas polares. Consideramos que para que no ocurra la asociación de la gráfica con un cuarto de circunferencia es recomendable utilizar otra función, por ejemplo, $y = x^3$.

Desde un punto de vista teórico, dado que el diseño didáctico inicialmente fue desarrollado por Carrasco (2023) bajo la TAD, consideramos que el ETM viene a complementar y describir mediante dimensiones semióticas, instrumentales y discursivas aquellas técnicas, tecnologías y teorías implicadas en el mismo, así como también en el trabajo efectivo de los estudiantes. Mientras la TAD ofrece una comprensión del saber enseñado y su organización institucional, ETM ilumina las formas concretas en que dicho saber es movilizado y transformado por los estudiantes, permitiendo analizar bajo las diferentes génesis, aquellas cuestiones del trabajo matemático de los estudiantes. Se concluye que la complementariedad entre TAD y ETM permite una mirada integrada sobre lo que se enseña, cómo se enseña y cómo realmente se aprende. En esta investigación nos centramos en realizar una complementariedad sobre las organizaciones y el trabajo matemático, nos parece

interesante poder seguir profundizando entre organizaciones didácticas y el ETM idóneo.

BIBLIOGRAFÍA

Aldana, E. (2011). *Comprensión del concepto de integral definida en el marco de la teoría "APOE"* (Tesis Doctoral) Salamanca.

Chevallard, Y. (1999). El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de lo didáctico. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19 (2), pp.221-266.

Carrasco, P. (2023). *Un diseño didáctico para la enseñanza de la integral definida con estudiantes de Ingeniería Civil, a partir de su génesis histórica*. Universidad Alberto Huertado.

Gascón Pérez, J. (2003) El profesor como director de procesos de estudio: análisis de organizaciones didácticas espontáneas. *Recherches en didactique des mathématiques,* 23(1), 79-136.

Jimenez, M, Castilli, E & Rocha, M. (2018) Estrategias de enseñanza de conceptos de cálculo. *Revista Iberoamericana de Producción Académica y Gestión Educativa*, 5(10)

Kuzniak, A. (2022a). The Theory of Mathematical Working Spaces—Theoretical Characteristics. In A. Kuzniak, E. Montoya-Delgadillo, & P. Richard (Eds.), *Mathematical Work in Educational Context. Mathematics Education in the Digital Era*. Springer, Cham.

Kuzniak, A. (2022b). The Theory of Mathematical Working Spaces – Theoretical Characteristics. In *Mathematical Work in Educational Context* (pp. 3–31). Springer, Cham.

Kuzniak, A, Montoya-Delgadillo, E., & Vivier, L. (2022). The Theory of Mathermatical Working Spaces: Theoretical Environment, Epistemological Stance and Dialogue with Other Theories. In *Mathematical Work in Educational Context: The Perspective of the Theory of Mathematical Working Spaces* (pp. 149-163).

Mateus-Nieves, E. (2021). Epistemología de la integral como fundamento del cálculo integral. *Bolema*, 35(71), p. 1593-1615.

Montoya, E., & Vivier, L. (2016). Mathematical working space and paradigms as an analysis tool for the teaching and learning of analysis. *ZDM - Mathematics Education*, *48*(6), 739-754.

Mundy, H., (1984). Analysis of errors of first year calculus students. En A. Bell, B. Low y J. Kilpatrick (eds), Theory Research and Practice in Mathematics Education (pp. 170-172). *Proceeding, ICME 5*. *Adelaide, Working group reports and collected papers, Shell Center*. Nothingham.

Ruiz, J. I. (2012). *Teoría y práctica de la investigación cualitativa*. Universidad de Deusto.

Stake, R. (2010). *Investigación con estudio de casos*. Editorial Morata, Madrid, quinta edición.

Orton, A. (1983) Student's Understanding of integration. Educational Studies Mathematics, 14, pp. 1-18.

PARADIGMES DE L'ALGÈBRE ÉLÉMENTAIRE POUR L'ÉTUDE DU TRAVAIL MATHÉMATIQUE - EXEMPLES SIGNIFICATIFS

Philippe Hoppenot

Université Paris-Saclay, Univ Evry, Université Paris Cité, Univ Paris Est Créteil, CY Cergy Paris Université, Univ. Lille, Univ Rouen, LDAR, F-75013 Paris, France

L'objectif de ce travail est d'enrichir les paradigmes de l'algèbre élémentaire proposés par Gamboa et Mena-Lorca (ETM5, 2017 ; ETM6, 2019) en donnant des exemples significatifs, au sens de Kunh (1966), trouvés dans des manuels scolaires (collection transmath pour le collège). Une réflexion a aussi été menée sur les paradigmes eux-mêmes qui a abouti à en proposer de nouveaux rendant mieux compte du travail des élèves en algèbre élémentaire, en particulier concernant les priorités des opérations et l'utilisation des parenthèses.

INTRODUCTION

L'algèbre est un puissant outil de modélisation, appliqué à différents domaines scientifiques. A l'instar de la géométrie et de l'analyse, le travail en algèbre élémentaire est sous-tendu par des paradigmes. Kuzniak *et al.* (2015) ont proposé un cours à l'école d'été de Didactique Des Mathématiques sur le travail mathématique en analyse. Après avoir présenté le modèle de l'ETM, conçu comme une structure d'accueil rendant compte du travail mathématique lors des activités, trois questions sont posées (ibid, page 4) :

- Quelles sont les entrées dans le travail mathématique ?
- Quels sont les blocages et ruptures dans certaines genèses de ce modèle ?
- Quel est le rôle du professeur sur les circulations dans le modèle des ETM ?

La démarche conduit à définir des paradigmes de l'analyse et à les articuler avec le modèle des ETM. Ils partent de la définition de Kuhn (1996) qui donne une définition des paradigmes s'articulant autour de deux axes :

- Un axe théorique désignant l'ensemble des croyances, techniques et valeurs partagées par un groupe scientifique dans un domaine donné.
- Un ensemble d'exemples significatifs permettant de reconnaître et isoler les différents aspects intervenant dans l'axe théorique.

Un point important est soulevé par Kuzniak *et al.* (2015). Dans le travail de Kuhn, "un paradigme nouveau tend à éliminer l'ancien alors qu'en mathématiques, les paradigmes semblent survivre et continuer à exister et ceci est particulièrement vrai dans l'institution scolaire" (page 6). C'est un élément capital qui permet bien souvent de mieux comprendre le travail des élèves.

En géométrie comme en analyse (Kuzniak et al, 2015), un ensemble de paradigmes à trois niveaux est proposé. Gamboa et Mena-Lorca (ETM5, 2017 ; ETM6, 2019) en proposent un pour l'algèbre élémentaire (page 434) :

A1. Arithmétique élémentaire ou algèbre présymbolique

"Le travail est médié par des représentations concrètes et/ou picturales, le langage numérique, y compris le langage écrit, la reconnaissance des formes. Les individus peuvent établir des relations entre les variables au moyen d'objets (concrets ou picturaux) représentant des quantités inconnues. Le travail instrumental est guidé par l'intuition et se fait généralement par la recherche de type essais-erreurs. Les processus de raisonnement sont plus des tests et la généralisation est quelque peu limitée et non formelle".

A2. Algèbre élémentaire

"Elle offre déjà la possibilité de travailler avec des lettres, des variables, des inconnues et même certains paramètres. Les individus sont capables de modéliser des situations en langage algébrique (symboliquement et graphiquement) et de résoudre des tâches en opérant de manière algorithmique (équations, par exemple), de reconnaître et d'utiliser des fonctions ; face à une situation exploratoire, ils sont capables de généraliser au moyen de symboles, d'opérer avec des techniques avancées (en utilisant des outils technologiques, etc.), etc".

A3. Structures algébriques

"Correspondent à un stade plus avancé et contemporain, dans lequel le sujet aborde les idées générales des ensembles et des différentes structures algébriques. Le travail est régi par les propriétés du système axiomatique dans lequel ils travaillent, et les processus de résolution des tâches nécessitent des outils théoriques plus avancés".

Notre étude est scindée en deux parties :

- une proposition d'exemples significatifs, à partir de l'étude d'une série de manuels destinés au collège, qui pourraient correspondre à chacun des trois paradigmes proposés.

- un questionnement de cette proposition de paradigmes pour l'algèbre élémentaire ;

La section suivante propose un cadre théorique pour aborder ces deux parties.

CADRE THÉORIQUE

Les trois paradigmes proposés ci-dessus ont été construits à partir de la littérature abondante dans le domaine de l'algèbre élémentaire et en particulier de son lien avec l'arithmétique.

Chevallard (1984) montre un clivage entre deux modes de fonctionnement en arithmétique. Le premier, calcul numérique, donne à voir "l'efficacité désignative" des écritures en exprimant que ¾ et 0,75 ou 8+4 et 12 désignant le même nombre sont équivalentes. Le second, arithmétique algébrique, permet d'atteindre une "information monstrative", 8+4 conservant une trace de ce qui mène à 12. L'introduction de lettres

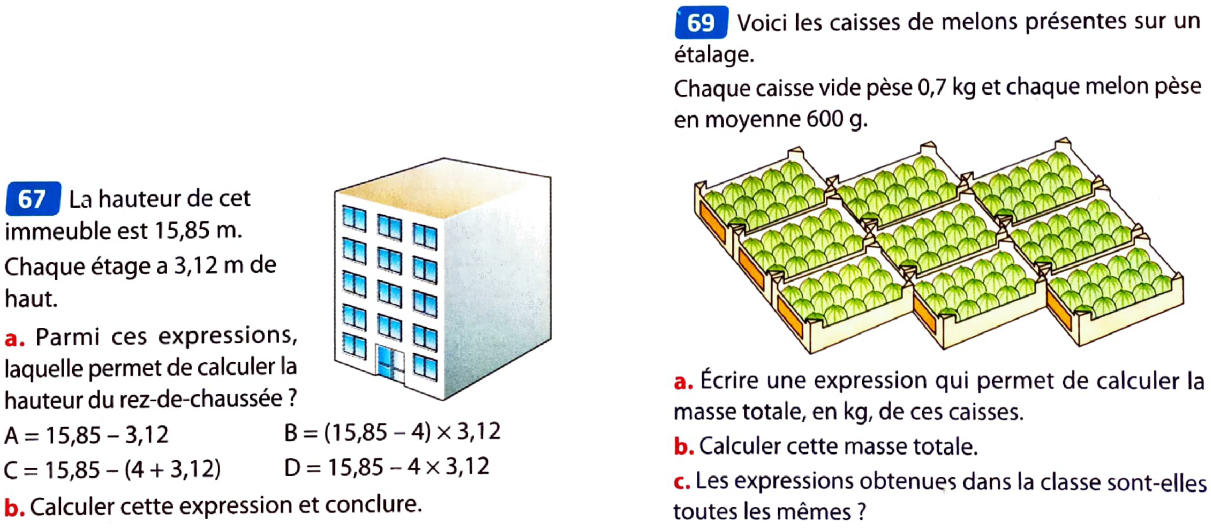
pour entrer dans l'algèbre est finalement le prolongement de cette arithmétique algébrique, correspondant à A1. Ainsi, le premier axe d'analyse porte sur les notions **sens et dénotation** (Jean-Philippe Drouhard, 1992). Gascon (1994) s'interroge aussi sur ce lien arithmétique - algèbre élémentaire et pointe en particulier la dualité de l'égalité, "=" pouvant signifier une action (comme en arithmétique) ou une équivalence.

Le second axe porte sur l'aspect **procédural ou structural**, au sens de Sfard (1991), des exemples proposés. Ces deux aspects sont complémentaires, l'un appréhendant une expression algébrique comme un processus (vision arithmétique), l'autre dans sa structure globale (vision algébrique). Kieran (1992) les reprend et fait l'hypothèse que l'aspect procédural est l'entrée naturelle dans une nouvelle notion, l'aspect structural étant atteint par un processus long et souvent difficile.

Le troisième axe est le caractère **connecté ou non**, au sens de Bednarz (1996, page 124), des problèmes traités dans les exemples significatifs. Un problème est dit connecté si l'on peut, par étapes successives, déterminer les inconnues les unes après les autres, chacune grâce à une relation simple ne faisant intervenir qu'une inconnue et des valeurs connues. Bednarz parle d'un raisonnement arithmétique. Un problème est non connecté dans le cas contraire.

Les exemples proposés dans la section suivante seront analysés selon ces trois axes.

EXEMPLES SIGNIFICATIFS ET ETM IDOINES



67 La hauteur de cet immeuble est 15,85 m. Chaque étage a 3,12 m de haut.

a. Parmi ces expressions, laquelle permet de calculer la hauteur du rez-de-chaussée ?

A = 15,85 – 3,12 B = (15,85 – 4) × 3,12

C = 15,85 – (4 + 3,12) D = 15,85 – 4 × 3,12

b. Calculer cette expression et conclure.

69 Voici les caisses de melons présentes sur un étalage.

Chaque caisse vide pèse 0,7 kg et chaque melon pèse en moyenne 600 g.

a. Écrire une expression qui permet de calculer la masse totale, en kg, de ces caisses.

b. Calculer cette masse totale.

c. Les expressions obtenues dans la classe sont-elles toutes les mêmes ?

Figure 1: Exercices du chapitre Addition, soustraction, multiplication (transmath 6ème).

Les exemples proposés sont tirés des manuels de la collection transmath (2021-2022) pour le collège (11 ans à 15 ans). Concernant le paradigme A1, la Figure 1 donne deux exemples tirés du chapitre "Addition, soustraction, multiplication" du manuel de 6ème.

On est ici face à des problèmes où une modélisation, même simple, est demandée aux élèves. Il n'est néanmoins pas nécessaire d'utiliser des lettres. Dans l'exercice n°69, une représentation picturale est suggérée. Tous ces éléments plaident pour classer la

résolution de ces problèmes dans l'algèbre élémentaire, plus précisément dans le paradigme A1. Dans ces deux exemples, un raisonnement arithmétique peut être utilisé pour obtenir le résultat attendu. Ainsi, les deux problèmes sont **connectés** au sens de Bednarz (1996). Néanmoins, on note une différence substantielle dans le degré de modélisation attendu. Dans l'exercice n°69, une succession d'additions (et des multiplications au sens d'additions successives) permet de résoudre le problème posé[11]. Dans l'exercice n°67, quatre expressions sont proposées pour "calculer la hauteur du rez-de-chaussée" ; elles font intervenir une soustraction et donc un niveau conceptuel plus élevé[12]. On voit néanmoins une démarche de modélisation apparaître. Elle est explicite dans l'exercice n°67 où les quatre expressions montrent clairement la démarche suivie pour obtenir le résultat. Les expressions ont un "**sens**" (Drouhard, 1992) que les élèves doivent apprécier pour choisir laquelle représente le problème posé. Le résultat, "**dénotation**" de Drouhard (1992), est ensuite calculé. Pour le problème de l'exercice n°69, les élèves doivent expliciter leur démarche et donc nécessairement donner un "**sens**" à l'expression qu'ils ou elles proposent avant de calculer la masse totale ("**dénotation**"). Il est ensuite demandé de comparer les expressions initiales trouvées dans la classe. Cette dernière question cherche à amener les élèves à réfléchir à leur démarche et à percevoir que plusieurs sont possibles. Le troisième axe d'analyse montre que tant les expressions proposées dans l'exercice n°67 que la démarche que l'on peut attendre pour l'exercice n°69 aboutissent à une résolution **procédurale**, au sens de Sfard (1991). Dans l'exercice n°69, le signe "=" a une signification d'action (Gascon, 1994) ou "d'efficacité désignative" (Chevallard, 1984). Un traitement différent peut amener à une expression **structurale** en exprimant la hauteur totale comme la somme des hauteurs du rez-de-chaussée et des étages : $18{,}85 = h + 4 \times 3{,}12$, h désignant la hauteur du rez-de-chaussée. Le signe "=" a ici la signification d'une équivalence (Gascon, 1994) ou "d'efficacité monstrative" (Chevallard, 1984). Ce serait une entrée de plain-pied dans le paradigme A2 de l'algèbre élémentaire qui n'est pas attendu à ce niveau d'enseignement.

Quel ETM idoine est attendu dans ces deux cas par l'enseignant ? L'analyse des expressions dans l'exercice n°67 et sa construction dans l'exercice n°69 demandent une analyse du problème soit pour reconnaître une expression soit pour la produire. On se trouve dans le plan **[Sem-Dis]**. Le calcul du résultat final se fera à l'aide d'une calculatrice ou d'un calcul mental le long de la **genèse instrumentale**. Dans les deux cas, la circulation envisagée passe par les trois genèses des ETM : ces problèmes génèrent un travail complet (Kuzniak *et al.*, 2014).

En classe de 5ème, dans le chapitre "Calculer avec des nombres décimaux", la priorité des opérations est présentée ainsi que l'utilisation des parenthèses. Le chapitre suivant,

---

[11] La question c suggère que plusieurs démarches pourraient être observées. On imagine par exemple le comptage de tous les melons puis la multiplication par la masse unitaire et de même avec les caisses ; ou la masse d'une caisse remplie de melons multipliée par le nombre de caisses.

[12] On peut aussi trouver le résultat à partir d'une addition à trou.

"Utiliser le langage littéral", propose une définition et un travail sur des tests d'égalités en remplaçant une lettre par une valeur donnée ; par exemple, avec a=4 vérifier que 5a+8 est égal à 4(a+3). On peut voir ce travail comme une préparation à entrer dans A2 dans le sens qu'on y utilise une lettre, mais sans dimension de modélisation. En 4ème, plusieurs chapitres traitent (i) des règles de signes pour la multiplication et la division des nombres relatifs (les parenthèses ne sont utilisées qu'avec des opérations de même priorité ; 5,4 x (-6,58)), (ii) puis de la distributivité introduite ainsi : "Développer c'est transformer un produit en une somme : k(a+b) = ka + kb" ; on remarque que, lors des factorisations, le facteur commun est systématiquement écrit à gauche : D=2x+3x² ; D=2.**x**+3x.**x** ; D = **x**.(2+3x), (iii) de l'utilisation des nombres rationnels et arrivent ensuite à (iv) "modéliser une situation". C'est là que les notions d'équation et de résolution d'équation sont introduites (Figure 2). On constate que l'exemple donné pour la résolution d'équation ne suit pas la définition donnée : certes 3 est solution, mais rien n'est dit de l'absence d'autres solutions. La genèse discursive est mise à mal.

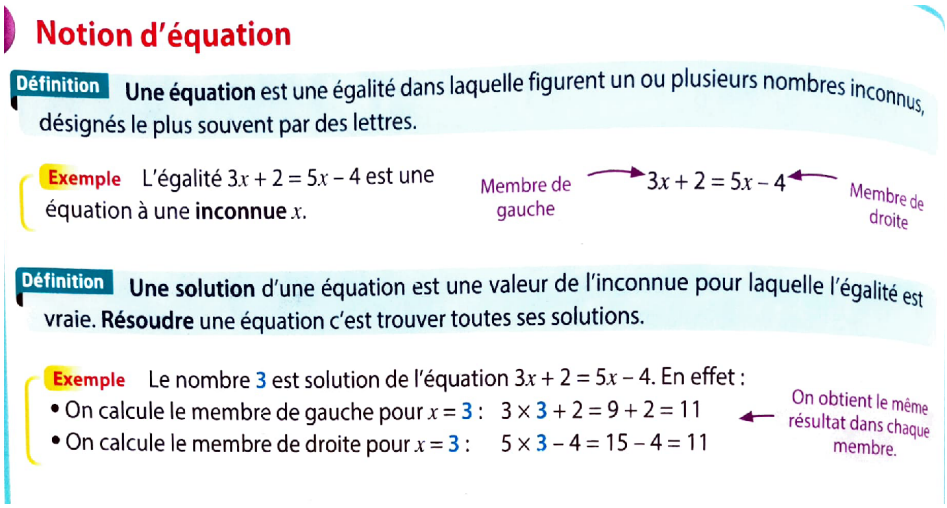


Figure 2: Notion d'équation (transmath 4ème, page 96).

Vient ensuite un paragraphe, intitulé "Egalités et opérations", qui pourrait servir pour justifier l'unicité de la solution dans l'équation précédente (Figure 3). Au-delà du fait que le texte en gras n'est pas le même pour les deux règles, la notion d'équivalence entre ces égalités successives est passée sous silence. La question de la dualité du signe "=" (Gascon, 1994) n'est pas soulevée. Si la seconde égalité est "autre", quel est son lien avec la précédente ? En additionnant deux nombres différents de chaque côté d'une égalité, on obtient aussi une autre égalité. Ce qui devrait s'inscrire dans le **plan [Sem-Dis]** se trouve relégué sur la seule genèse sémiotique par la présence d'un discours lacunaire.

Un exemple de résolution d'une équation du premier degré (5x – 4 = 3x + 10) est ensuite donné (Figure 8) qui aboutit à x = 7. Avant de conclure, "on vérifie que cette valeur est bien solution de l'équation initiale". On renforce ici l'idée présente ci-dessus (Figure 2) que vérifier qu'une valeur est solution d'une équation revient à résoudre l'équation.

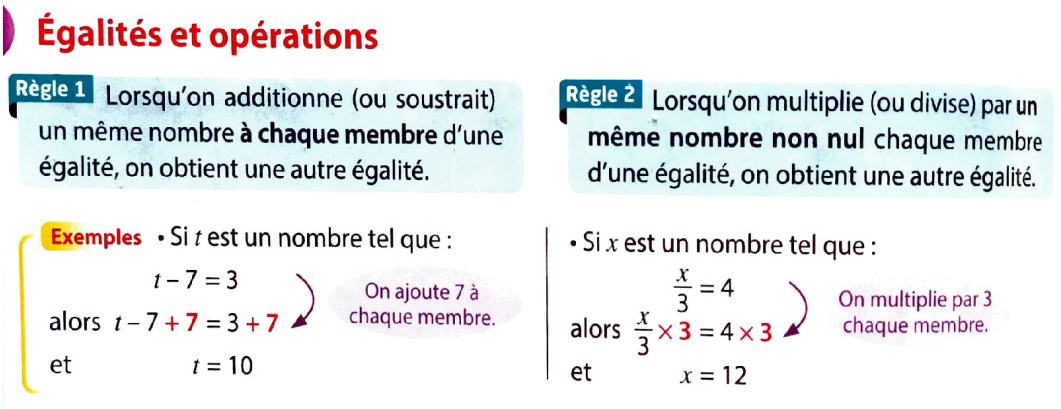


Figure 3: Egalités et opérations (transmath 4ème, page 96).

L'exemple de la Figure 4 pourrait être un exemple significatif pour la résolution d'une équation du premier degré : le problème n'est **pas connecté**, la représentation proposée (qui pourrait, dans un premier temps, être laissée à la charge des élèves) en suggère une **approche structurale**, mais la mise sous la forme d'une équation n'est pas demandée. La **dimension sémiotique** de l'expression algébrique n'est pas attendue. L'ETM idoine lié à ce problème n'est pas complet. C'est pourtant le cœur du chapitre en cours dans lequel l'algorithme de résolution d'une équation du premier degré est donné[13]. Qu'est-il attendu à la question b ? Une technique de type essais - erreurs, dans A1, ou algorithmique, dans A2 ? Peut-être que la difficulté rencontrée pour énoncer rigoureusement les transformations correctes d'une expression algébrique sont la source de ce flou.

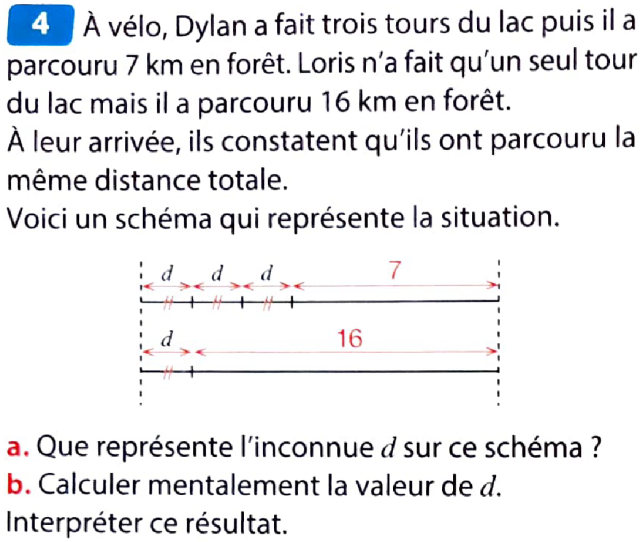


Figure 4: Exemple de résolution d'équation (transmath 4ème, page 98).

[13] Comme précisé, cet algorithme est donné sur un exemple. C'est probablement un bon compromis entre la généralité de résolution de l'équation ax+b=cx+d, comportant beaucoup de lettres et donc lourde cognitivement pour les élèves, et l'exemple reproductible plus facile à comprendre.

Le paradigme A3, qui puise sa légitimité dans la structure de corps de IR, n'est, quant à lui, pas accessible en tant que tel en collège. Le paragraphe précédent montre même que A2 a du mal à être présenté rigoureusement[14] aux élèves.

QUESTIONNEMENT DES PARADIGMES

La difficulté rencontrée pour formuler, au niveau du collège, les bases du paradigme A2 amènent à questionner l'ensemble de ces paradigmes. La difficulté de l'enseignement de l'algèbre élémentaire et son lien avec l'arithmétique ne sont pas nouveaux. Déjà en 1984 Chevallard écrivait : "Ce qui disparaît, en fait, à l'exception notable, répétons-le, des problèmes pratiques, ce n'est pas l'arithmétique (même si le mot lui-même ne renvoie plus qu'à l'une des parties du corpus arithmétique traditionnel), mais la dialectique de l'arithmétique et de l'algèbre. Or cet affaissement d'une structuration traditionnelle va moins peser sur la composante arithmétique que sur la composante algébrique des mathématiques enseignées au collège : c'est l'algèbre (entendue au sens traditionnel de ce mot à ce niveau des études mathématiques) qui va se trouver le plus violemment mise en cause par les changements opérés". C'est cette dialectique qui se trouve à la jonction entre les paradigmes A1 et A2.

Éloignons-nous momentanément de l'enseignement de l'algèbre élémentaire en collège et regardons ce qu'il en reste quelques années plus tard, en l'occurrence à l'entrée à l'université dans une formation scientifique et technologique : le BUT GEII[15]. Les exemples ci-dessous sont tirés d'une étude réalisée au début de l'année universitaire 2023-2024 auprès d'environ 70 étudiants de BUT 1 GEII. Il s'agit de résoudre des équations du premier degré tirées de relations données dans des documentations techniques de composants électroniques. Parmi les difficultés récurrentes rencontrées par ces étudiants, issus pour moitié de terminale technologique, trois me semblent être intéressantes à relever dans le contexte de cette communication. Elles sont bien sûr liées mais il est néanmoins intéressant de les étudier séparément.

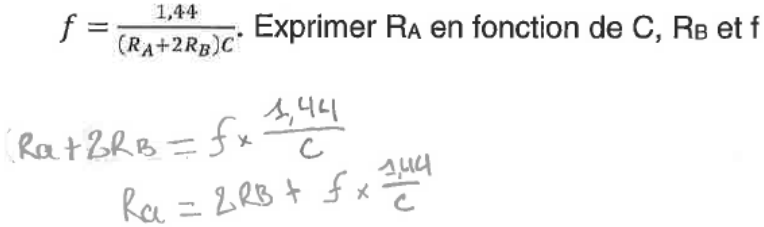


Figure 5: Erreur d'utilisation des règles 1 et 2 (Figure 3) (A104[16]).

[14] Sans vouloir tout démontrer à un niveau acceptable dans A3, indiquer que les transformations de la Figure 3 conservent la modélisation initiale semble nécessaire pour envisager un lien avec A3, et peut-être même une compréhension et une utilisation correcte de A2.

[15] Bachelor Universitaire de Technologie, département Génie Électrique et Informatique Industrielle

[16] Numéro de l'étudiant dans l'expérimentation

La première concerne l'application des règles 1 et 2 énoncées à la Figure 3. La Figure 5 montre deux erreurs successives de l'étudiant A104, la première liée à la multiplication (règle 2) et la seconde à l'addition (règle 1). Dans le passage de la première à la deuxième ligne, la règle est appliquée deux fois, une correctement et l'autre non. On voit néanmoins la prise en compte du terme $(R_A + 2R_B)$ comme une entité de même niveau que C.

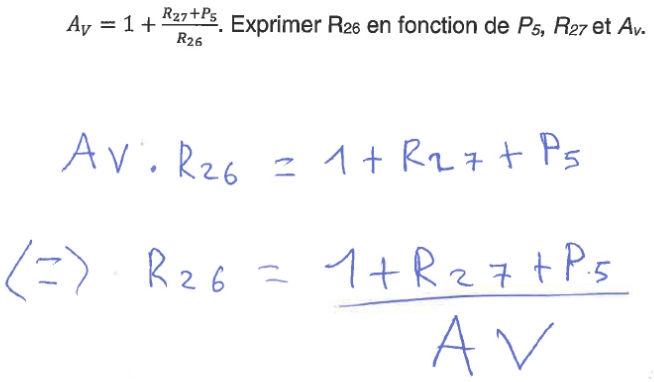


Figure 6: Priorité des opérations et parenthésage (A110).

La Figure 6 montre un exemple dans lequel la référence à la règle 2 pour transformer de l'égalité n'est pas explicitée et ne s'applique pas correctement pour une autre raison que précédemment. La forme de l'expression n'est pas la même que celle de la Figure 3 dans laquelle chaque terme de l'égalité est réduit à un produit. Ici, le terme de droite est une somme : soit on commence par soustraire 1 à chaque membre de l'égalité (règle 1) et on multiplie ensuite par R_{26} sans oublier les parenthèses pour le membre de gauche, soit on multiplie directement par R_{26} chaque membre, sans oublier la parenthèse pour le membre de droite cette fois[17]. La Figure 7 en donne une explicitation erronée, classiquement rencontrée : les flèches, présentes aussi sur la Figure 3, tiennent lieu de justification. Le travail mathématique se fait dans **le plan [Sem-Ins]**, ou seulement le long de la **genèse instrumentale**, sans contrôle[18] discursif qui pourrait amener l'étudiant à s'interroger et à envisager de modifier sa résolution. Le travail n'est pas complet.

[17] La seconde démarche semble plus complexe : il faut voir les étapes suivantes, en particulier le développement qui va permettre de simplifier le dénominateur.

[18] Ici, en plus du contrôle mathématique proprement dit, la différence de dimension entre 1 et R_2+P_5 est aussi une source de contrôle.

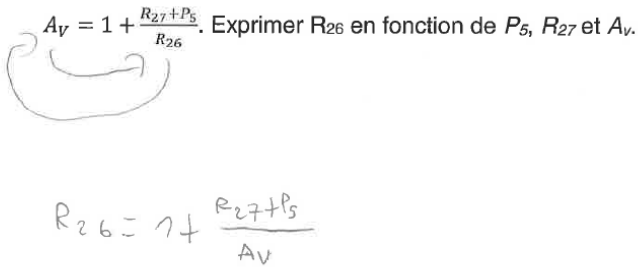


Figure 7: Explicitation sémiotique de la méthode de transformation d'une expression algébrique (A109).

Pourquoi les élèves, puis les étudiantes et les étudiants, ont-ils-elles du mal avec ces règles, en particulier la seconde[19] ? Je fais l'hypothèse suivante : à l'instar de l'arithmétique où les opérations sont effectuées dès que possible, ces propriétés sont énoncées sans parenthèses. La règle n°2 aurait pu être donnée à partir de l'expression suivante : $x/3 = 2 + 2$ ou encore, en conservant l'équivalence, $x/3 - 1 = 2 + 1$. Dans chacun de ces exemples, la multiplication par 3 des deux membres de l'égalité doit faire intervenir des parenthèses pour conserver l'équivalence[20]. La Figure 8 montre comment ces deux règles sont appliquées pour résoudre une équation du premier degré. Avant d'arriver à l'application de la règle n°2, ici une division par 2, toutes les opérations sont effectuées : 5x0 – 3x est devenu 2x et 10 + 4 est devenu 14. C'est bien sûr naturel de s'y prendre ainsi, mais la complexité de la règle tenant compte des priorités des opérations est masquée et sa mise en œuvre dans un contexte algébrique un peu plus complexe nécessitant l'utilisation de parenthèses n'est pas bien préparée.

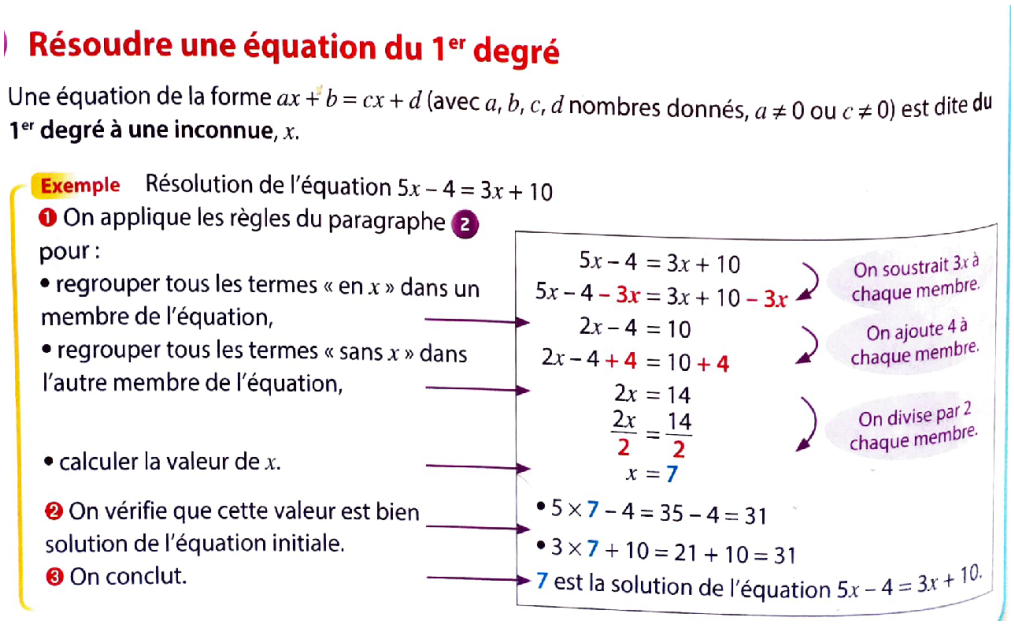


Figure 8: Résoudre une équation du 1er degré (Transmath 4ème, page 96).

---

[19] Pour la règle n°1, l'addition étant l'opération la moins prioritaire, l'utilisation de parenthèses n'est pas nécessaire.

[20] Cette notion n'étant pas présente dans les règles, il est d'autant plus difficile d'y faire référence.

La deuxième difficulté rencontrée par les élèves et les étudiants concerne la notion d'équivalence des expressions qui doit être conservée lors des différentes étapes de transformation. Il n'est pas rare de voir des étudiants accepter deux résultats différents pour la résolution d'une même équation. La Figure 9 en donne une illustration : deux séries de transformations différentes, en l'occurrence erronées toutes les deux, aboutissent à des résultats différents sans amener à un questionnement. Là encore, c'est la **dimension discursive** qui semble ne pas être suffisamment présente, voire absente. Seule la **dimension sémiotique** guide les calculs.

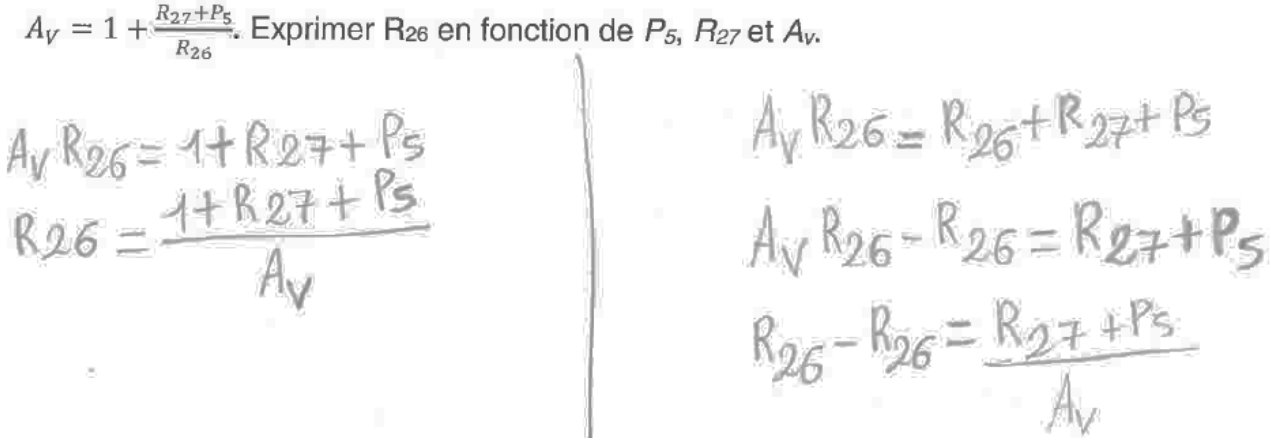


Figure 9: Problème d'équivalence des expressions lors des étapes de transformation (A103).

La troisième difficulté concerne ce que j'appelle la direction des calculs. Quel est l'objectif des transformations de l'expression sur laquelle on travaille ? La Figure 10 montre un exemple de transformations correctes, avec utilisation de parenthèses, mais n'aboutissant pas au résultat demandé. La première étape ramène l'expression à une équation du premier degré ; les deux suivantes sont correctes mais ne semblent pas guidées par un but précis. L'avant dernière ligne est de la forme $ax+b=cx+d$ (la deuxième en est assez proche), mais les transformations produites montrent que l'étudiant ne l'a pas reconnue : ça ne lui viendrait vraisemblablement pas à l'idée de transformer $ax + b = cx$ en $\frac{ax + b}{x} = c$. C'est ici une partie de la **genèse sémiotique**, celle qui permettrait de catégoriser l'expression comme une équation du premier degré, qui ne s'active pas correctement ; dès lors, la résolution n'aboutit pas par manque de direction dans les calculs.

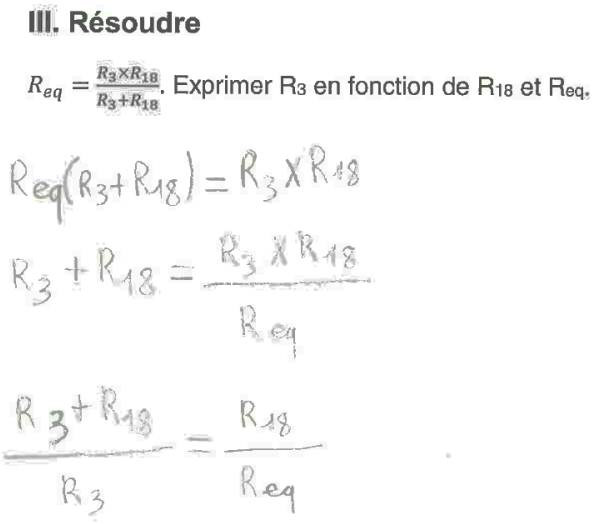


Figure 10: Direction des calculs (A103).

Que ces trois difficultés soient toujours présentes chez des étudiants de première année à l'université[21] porte à s'interroger sur les paradigmes eux-mêmes, au moins sur leurs contours. Les règles de priorité des opérations, auxquelles on ajoute celles des puissances, et l'utilisation des parenthèses sont les mêmes en algèbre élémentaire qu'en arithmétique. Néanmoins, en arithmétique, effectuer les calculs limite grandement l'utilisation des parenthèses. La sémiotique associée aux transformations des écritures s'en trouve tellement simplifiée qu'elle devient inopérante en algèbre élémentaire. Les paradigmes proposés par Gamboa et Mena-Lorca (ETM5, 2017 ; ETM6, 2019) n'en tiennent pas suffisamment compte. Ainsi, l'écart entre les paradigmes A1 et A2 est-il très important : les élèves doivent non seulement s'approprier l'utilisation des lettres mais aussi approfondir significativement les notions de priorité des opérations ou tout du moins leur opérationnalité dans la transformation des expressions. Quant au paradigme A3, s'il est indispensable à l'édifice mathématique, on peut se poser la question de la pertinence de réserver un niveau de paradigme aux "idées générales des ensembles et des différentes structures algébriques [et du] travail régi par les propriétés du système axiomatique" pour des étudiants de formation technologique ou plus généralement de formations dans lesquelles les mathématiques sont un outil et non l'objet d'étude. En effet, ce niveau de paradigme n'est jamais atteint en tant que tel par ces étudiants ; une déclinaison appliquée de ce niveau de paradigme, donc rendue accessible à ces étudiants, semble plus appropriée pour décrire leur travail mathématique. Dans ce cadre et pour tenir compte de ces remarques, je propose de conserver A1 tel que défini précédemment et de modifier A2 et A3 comme suit :

A2. Algèbre élémentaire polynômiale

Elle offre déjà la possibilité de travailler avec des lettres représentant des inconnues et certains paramètres. Les individus sont capables de modéliser

[21] On peut émettre l'hypothèse que, pour la plupart d'entre eux, ces étudiants engagés dans des études dans le domaine technologique ne les surmonteront pas.

des situations en langage algébrique ainsi que de reconnaitre et de résoudre des tâches en opérant de manière algorithmique pour transformer les expressions algébriques, en tenant compte des priorités des opérations et du parenthésage, pour des modèles du premier degré et certains du second degré (factorisation à vue à partir de l'identification d'au moins une racine évidente).

A3. Algèbre élémentaire généralisée

Correspond à un stade plus avancé dans lequel le sujet est capable de mobiliser explicitement les propriétés des opérations + et ×, en particulier la distributivité et l'existence d'un symétrique (sauf pour 0 avec ×), afin de justifier les transformations des expressions algébriques. Cela permet d'accéder à un stade plus avancé dans lequel l'inconnue peut apparaitre au dénominateur et/ou dans une expression fonctionnelle et plus généralement à une grande complexité sémiotique dans les expressions.

Dans ces nouveaux paradigmes, **les dimensions Instrumentale, Discursive et Sémiotique** apparaissent. De A2 à A3, le plan épistémologique s'enrichit, tant en termes de representamen que d'artefacts et de référentiel ; le niveau d'abstraction (plan cognitif) des élèves augmente, en particulier concernant l'équivalence des expressions et la direction des calculs : A2 s'appuie principalement sur l'aspect **procédural** et dans A3 l'approche est plus **structurale**, les ETM idoines associés reposant plus sur la genèse instrumentale dans A2 et discursive dans A3.

CONCLUSION ET PERSPECTIVES

L'objectif initial de ce travail était de donner des exemples significatifs, au sens de Kuhn (1966), trouvés dans des manuels scolaires dans le domaine de l'algèbre élémentaire. À la lecture de la collection Transmath pour le collège et à partir d'exemples de résolutions d'équations du premier degré en BUT 1, il s'est avéré que les notions de priorité des opérations et d'utilisation des parenthèses, d'équivalence des expressions et la direction des calculs étaient prédominantes et n'apparaissaient pas de façon suffisamment explicite dans les paradigmes initiaux. Après la présentation d'exemples pouvant être qualifiés de représentatifs pour A1 et A2, un questionnement de ces paradigmes pour étudier le travail mathématique d'étudiants non mathématiciens a abouti à en proposer de nouveaux rendant mieux compte du travail des élèves en algèbre élémentaire en limitant l'écart entre les paradigmes A1 et A2 initiaux et en formulant une version appliquée de A3 afin de le rendre accessible aux étudiants en fin de parcours.

Une nouvelle expérimentation avec des étudiants de BUT 1 est en cours de construction afin d'aider les étudiants à entrer pleinement dans le nouvel A2 (ils devraient déjà y être) et à passer dans le nouvel A3.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

Bednarz, N., Kieran, C., & Lee, L. (1996). Approaches to Algebra. Perspectives for Research and Teaching (Vol. 18). Dordrecht : Kluwer Academic Publishers.

Chevallard, Y. (1984). Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège - Partie 1 - L'évolution de la transposition didactique. Petit x, vol. 5,51-94.

Gamboa Inostroza Mauricio, Mena-Lorca Arturo (2017). Paradigmas Algebraicos y Espacio de Trabajo Matemático, actes ETM5, 192-205.

Gamboa Inostroza Mauricio, Mena-Lorca Arturo (2019). Espacio de trabajo personal e idóneo de profesores frente a tareas algebraicas, actes ETM6, 431-442.

Gascòn Josep (1994). Un nouveau modèle de l'algèbre élémentaire comme alternative à l'"arithmétique généralisée", Petit x, vol. 37, 43-63.

Kieran, C. (1992). The Learning and Teaching of School Algebra. In D. Grouws (Ed.), Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning. A project of the National Council of Teachers of Mathematics (p. 390-415). New York, NY, England: Macmillan Publishing Co, Inc.

Kuhn, T.S. (1966). The structure of scientific revolutions, 2nd ed. Chicago: University of Chicago Press.

Kuzniak A., Montoya E., Vandebrouck F., Vivier L. (2015). Le travail mathématique en Analyse de la fin du secondaire au début du supérieur : identification et construction. Cours 2, École d'été, Brest.

Kuzniak A. & Nechache A. (2014), Penser une progression en géométrie en formation des enseignants. Acte du 41e colloque COPIRELEM, Mont de Marsan.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. Educational Studies in Mathematics, 22, 1-36.

Transmath, 6ème et 5ème (2022), 4ème et 3ème(2021), Nathan.

VISUALIZACIONES, CONSTRUCCIONES: ¿DE QUÉ ACTIVIDADES MATEMÁTICAS SE TRATA? LÍMITES DE FUNCIONES EN 1ER AÑO DE UNIVERSIDAD

Fabrice Vandebrouck, Macarena Flores González

LDAR - Univerité Paris Cité y Cergy Paris Université

Nuestra investigación se desarrolla en el contexto de la transición de la enseñanza secundaria a la superior, en las primeras etapas del aprendizaje en el dominio del análisis, en particular el cálculo de límites de funciones y el tratamiento de formas indeterminadas. Ya hemos comunicado sobre las bajas tasas de éxito en las tareas de este tema al inicio de la universidad. En este trabajo, continuamos nuestro análisis al principio y al final del primer semestre de universidad. Para ello, analizamos la actividad matemática de los estudiantes a través de sus respuestas a un test diagnóstico, a un cuestionario, y a un examen seguido de entrevistas. Relacionamos este análisis con los procesos que intervienen en sus ETM personal.

Esta contribución es una continuación de otras dos sobre la *networking* entre TETM y TADM en didáctica del análisis. En Flores González (2023), la autora estudia la convergencia de sucesiones recurrentes. Observa que la práctica de *integración local* entre ambas teorías permite introducir y operacionalizar las nociones de *control semiótico*, *control instrumental* y *control discursivo*. Esto permite construir una situación de aprendizaje que ofrece *oportunidades de control*. Analizando el trabajo de los estudiantes del último curso científico de secundaria, la autora llega a la conclusión de que, aunque se ofrezcan oportunidades de control, los estudiantes no siempre son capaces de producir un *trabajo matemático controlado*. En una segunda contribución, Vandebrouck (2023) importa explícitamente las funciones de *orientación*, *ejecución* y *control* (Galperine, 1966) en los análisis del trabajo de los estudiantes en formación inicial de profesorado. El autor identifica cómo los estudiantes orientan su trabajo en el plano [Sem-Dis] a través de la visualización, y realizando las pruebas que se espera de ellos en este nivel de estudios. Sin embargo, también identifica que la dimensión semiótica interfiere o incluso suplanta (*bifurcación genética) a* la dimensión discursiva. En este caso, el control semiótico ya no es necesario. En el mejor de los casos, entonces, tenemos una circulación unidireccional de la dimensión semiótica a la prueba.

En la tercera contribución, Flores González y Vandebrouck (2024) analizan las respuestas de los estudiantes al cálculo de límites (formas indeterminadas) con o sin la gráfica de funciones, al inicio de la universidad. El estudio analiza las respuestas al test diagnóstico a comienzos del 1er año, los cuestionarios post diagnósticos y las entrevistas basadas en las respuestas a los cuestionarios. Utilizando categorías de análisis propias de la Teoría de la Actividad y herramientas de análisis de la actividad matemática derivadas de la teoría cognitiva de Duval, los autores justifican que los estudiantes no realizan espontáneamente su actividad en el registro gráfico (control

semiótico o ejecución a partir de la gráfica de la función) y que muchos son incapaces de visualizar el límite de las funciones en este registro. Esto explica, en particular, por qué las tasas de respuestas correctas a los cálculos de límites propuestos no son significativamente mejores cuando están presentes las gráficas de las funciones. El objetivo de este trabajo es seguir analizando la actividad y el trabajo matemático del mismo público, no sólo a la entrada al primer año, sino también al final del primer semestre de la universidad, esto con el fin de conocer el impacto de la formación universitaria en la conceptualización de los límites por parte de los estudiantes.

POSICIONAMIENTO TEÓRICO

Sostenemos que la actividad matemática va más allá del trabajo, y es necesario profundizar en las actividades (cognitivas) si queremos comprender la complejidad de cómo se pone en funcionamiento el conocimiento matemático. En cierto modo, esto da cuerpo a los procesos en juego en el plano cognitivo del ETM al caracterizar su complejidad. Detrás de los procesos de visualización, construcción y, si es el caso, prueba, buscamos las actividades matemáticas desarrolladas por los estudiantes: actividades de reconocimiento necesarias cuando hay que disponer de determinados conocimientos, y actividades de organización si hay que relacionar varios conocimientos. En estos procesos, también buscamos aplicaciones con o sin adaptaciones, así como relaciones, conexiones e interpretaciones. Identificamos específicamente los conocimientos implicados en los registros semióticos (Duval, 2005), las actividades de formación, conversión y tratamiento, y para el análisis de los procesos de visualización, las actividades de deconstrucción algebraica (Vandebrouck y Leidwanger, 2016) y las actividades de deconstrucción dimensional con perspectivas de localidad (Montoya *et al.* 2018).

Para tratar nuestros cuestionamientos, también distinguimos entre orientación, ejecución y control (Galperine, 1966). Por ejemplo, la fase de orientación puede tener lugar a través de un proceso de visualización, la ejecución a través de visualizaciones y construcciones, mientras que el control suele desarrollarse en una dimensión complementaria a la(s) de ejecución. En nuestro contexto de cálculo en primer año de la universidad, observamos orientaciones, ejecuciones y controles que pueden ser gráficos y/o algebraicos, del orden del tratamiento o de la visualización (Flores González y Vandebrouck, 2024).

Por otro lado, las actividades matemáticas no sólo son la huella de la conceptualización, sino también su motor. Se puede llegar a ellas mediante el análisis de las acciones de los estudiantes (su trabajo en las tareas) pero también mediante la verbalización (la forma de lenguaje asociada al conocimiento, Chesnais y Coulange, 2022). Concedemos especial importancia al lenguaje natural: por un lado, es un registro

semiótico que sostiene las deconstrucciones dimensionales[22] (Duval, 2005) y, por otro, desempeña un papel en la conceptualización (Vergnaud, 1990).

En consecuencia, las preguntas que guían nuestra investigación son: ¿qué conceptualizaciones de los límites de las funciones y las formas indeterminadas tienen los estudiantes cuando llegan a la universidad y cómo evolucionan al final del primer semestre? ¿Sus conocimientos les permiten controlar su trabajo sobre el cálculo de límites?

METODOLOGÍA

Para responder a nuestras preguntas, analizamos los casos de dos estudiantes de 1er año que cursan el plan de estudios de Matemáticas-Informática. En primer lugar, analizamos sus respuestas al test diagnóstico y a un cuestionario post-test al inicio de sus estudios universitarios (preguntas sobre cálculo de límites con o sin gráficos), que tuvo lugar en inicios de septiembre de 2023. Luego, teniendo en cuenta la enseñanza recibida durante los primeros meses de universidad, analizamos sus producciones ordinarias durante el examen al final del primer semestre (enero de 2024), seguido del análisis de la verbalización de la actividad matemática realizada en el examen, gracias a entrevistas de confrontación (Vidal-Gomel, 2022).

Análisis de la tarea y de la actividad matemática esperada al entrar en 1er año:

Para el análisis a priori del test diagnóstico y del cuestionario post-test, utilizamos la misma metodología introducida en Flores González y Vandebrouck (2024). En el cuestionario analizamos la actividad matemática posible de los estudiantes de tres cálculos de límites ($\lim_{x\to-\infty}\frac{\exp(-x)-1}{\exp(-x)+1}$ (Q1) ; $\lim_{x\to+\infty}\frac{x-1}{x+1}$ (Q2), $\lim_{x\to1^+}\frac{x^2-1}{x-1}$ (Q3)). En cada caso se da la gráfica de la función, pero los estudiantes eligen si responden o no a la pregunta utilizando la gráfica. El paradigma de trabajo es el del análisis calculatorio (A2). Si la orientación es gráfica, los estudiantes pueden utilizar ejecuciones mediante una visualización adoptando una perspectiva local en las vecindades de -∞ para Q1 y +∞ para Q2 (con reconocimiento de las asíntotas horizontales $y = 1$). Para Q3, los estudiantes pueden utilizar una perspectiva puntual obteniendo la imagen de $x = 1$ (función prolongable por continuidad). Si la orientación es algebraica, en el momento de la ejecución los estudiantes deben reconocer en primer lugar que se trata de formas indeterminadas ($\frac{\infty}{\infty}$ y $\frac{0}{0}$) mediante deconstrucciones algebraicas (visualizaciones) y operaciones sobre límites (construcciones). Luego, tienen que producir los tratamientos algebraicos para eliminar la indeterminación (factorización del término preponderante, con una composición de los límites para Q1, una fracción racional para Q2 y el reconocimiento de una identidad notable para Q3). Los controles pueden ser gráficos o algebraicos, utilizando los conocimientos que acabamos de mencionar.

[22] Duval (2005) se refiere a las deconstrucciones dimensionales en el dominio de la geometría, pero también es el caso en el dominio del análisis.

Para el cuestionario de este año, hemos añadido el cálculo de $\lim_{x\to 0} \ln(x+1)$ (Q4), seguido de la elección de la representación gráfica de $f(x) = \ln(x+1)$ entre las cuatro opciones de gráfico que se muestran en la figura 1.

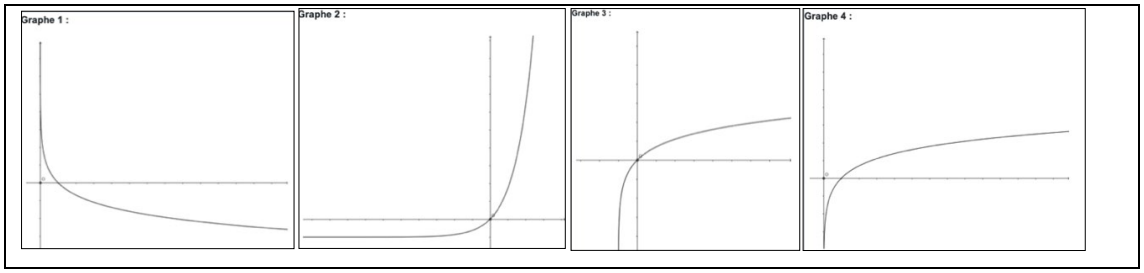


Figura 1: Opciones de gráficos para $f(x) = \ln(x+1)$.

Para el cálculo del límite, como la gráfica correcta no se da directamente, los estudiantes pueden adoptar una orientación algebraica, movilizando los conocimientos en perspectiva puntual de $\ln(1) = 0$. Seguidamente, para elegir la gráfica correcta de la función, los estudiantes deben pasar a una orientación/ejecución gráfica para poder coordinar esta perspectiva puntual con la perspectiva global de la función $\ln(x+1)$. Se espera que estos cambios de orientación y ejecución algebraico-gráfica permitan un control semiótico.

Análisis de la tarea y de la actividad matemática esperada en el examen:

La tarea prescrita consiste en estudiar la función $f(x) = x + \ln(x^2 - 1)$ (figura 2) con el objetivo de trazar la gráfica (sin calculadora). El trabajo requerido se desarrolla en el plan [Sem-Ins]. El objetivo principal es realizar construcciones (dominio de definición, límites, derivada, etc.) por medio de tratamientos, utilizando artefactos algebraicos simbólicos y apoyándose en representaciones algebraicas para visualizar. El paradigma en todo momento el del análisis calculatorio (A2). Las actividades matemáticas esperadas se refieren más específicamente al marco funcional y a la representación algebraica de las funciones. La orientación es algebraica, dada por la tarea, así como la organización global del estudio de la función con la división en 5 subtareas (ayudas procedimentales). La ejecución es algebraica, basada en procesos de visualización y construcción. A continuación, la describimos en detalle, especificando las actividades matemáticas implicadas.

Exercice 1. On considère la fonction d'une variable réelle définie par

$$f(x) = x + \ln(x^2 - 1).$$

1) Préciser le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de la fonction f.
2) Donner le comportement (les limites de la fonction) aux extrémités du domaine de définition.
3) Calculer f' sur $\mathcal{D}_f$, donner le sens de variation et trouver les extrema locaux.
4) Préciser si f admet des asymptotes en $+\infty$ et $-\infty$.
5) Tracer le graphe de la fonction.

Figura 2: Tarea de examen de 1er año de la licenciatura de Matemáticas-Informática.

Para calcular los límites en los extremos del dominio de definición (pedido explícitamente), los estudiantes deben visualizar la fórmula y realizar una deconstrucción algebraica: suma, composición de funciones, presencia de la función cuadrática y ln. Posteriormente, deben construir el valor de los límites utilizando las

reglas algebraicas de cálculo de límites (tratamientos). Para los cálculos en -1 y +1, se debe adoptar una perspectiva puntual de la fórmula (del lado de la visualización). Esto corresponde a una aplicación inmediata de los conocimientos sobre las funciones implicadas. Para el cálculo en +∞, esta vez hay que adoptar una perspectiva local en +∞ y volver a aplicar inmediatamente la regla sobre la suma +∞+∞=+∞. En este ida y vuelta entre los procesos de visualización y construcción, el nivel en el que se pone en funcionamiento el conocimiento es el del conocimiento movilizable. Por otra parte, para el cálculo del límite en -∞, los estudiantes también deben reconocer la forma indeterminada -∞+∞. La perspectiva local sobre la fórmula (del lado de la visualización) debe permitir a los estudiantes reconocer el término preponderante para realizar el tratamiento algebraico necesario para eliminar la indeterminación (del lado de la construcción). Los estudiantes deben aplicar finalmente las reglas sobre los crecimientos comparativos de ln y x con adaptaciones. Las actividades matemáticas implicadas en estos dos procesos de visualización y construcción son, por tanto, mucho más complejas. Los límites buscados son respectivamente -∞, -∞, +∞ y -∞ para la forma indeterminada.

La pregunta 3) trata sobre la variación de la función sin que se pida explícitamente la elaboración de una tabla de variaciones en el enunciado. Los estudiantes tienen que calcular y analizar el signo de la derivada de la función (proceso de construcción) a partir de la visualización de la fórmula (descomposición algebraica mencionada anteriormente). Posteriormente, los estudiantes tienen la oportunidad de controlar la coherencia de las variaciones con los valores de los límites encontrados mediante la elaboración (explícita o no) de la tabla de variaciones (conversión al registro simbólico). En este caso, en el proceso de visualización de esta tabla, los estudiantes necesitan coordinar la perspectiva local y puntual de los límites/valores encontrados, con la perspectiva global, con el crecimiento o decrecimiento de la función.

La respuesta a la pregunta 4) debe ser coherente con la respuesta a la pregunta 1). Adoptando una perspectiva puntual (puntos en los que la función no está definida), los estudiantes deben concluir que las asíntotas verticales son $x = 1$ y $x = -1$. Por último, juntando todas las respuestas de las perspectivas local, puntual y global, y asegurándose de que son coherentes entre sí (control), se espera que los estudiantes sean capaces de elaborar la gráfica de la función que aparece en la figura 3.

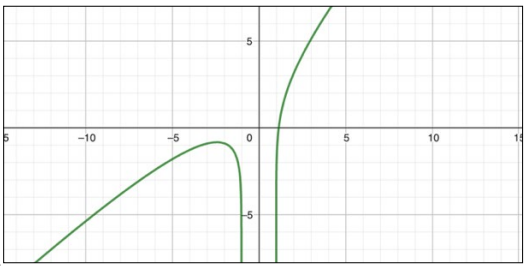


Figura 3: Gráfico del $f(x) = x + \ln(x^2 - 1)$.

ANÁLISIS DE CASOS

El caso de Ilias: [Sem-Ins] con reconocimiento de formas indeterminadas sin posibilidad de tratamiento y con ausencia de control

En sus respuestas al test diagnóstico se aprecian ejecuciones algebraicas (con tratamientos o visualizaciones) con conocimientos elementales de las funciones ln y exponencial (valores, límites, curva), y conocimiento de las propiedades globales y puntuales para la función de segundo grado. En el cuestionario se aprecian orientaciones y ejecuciones gráficas porque moviliza visualizaciones locales en $+\infty$ y $-\infty$ y en un punto (Q1, Q2 y Q3). Sin embargo, se observa una ejecución y control algebraico solamente potencial, porque el estudiante dice que podría realizar tratamientos algebraicos haciendo factorizaciones, pero no las ejecuta. Además, no tiene una imagen global de la función ln (Q4). Vemos, pues, que en el caso en que no puede eliminar una indeterminación, pero la gráfica de la función está dada, puede visualizar el límite finito o infinito.

La producción del examen del estudiante muestra que ha realizado un trabajo conforme en el plano vertical [Sem-Ins]. El estudiante aplica correctamente los conocimientos sobre la función ln, su dominio de definición, sus valores puntuales y sus límites. Adaptando la fórmula de $f(x)$, el estudiante puede determinar el dominio de definición.

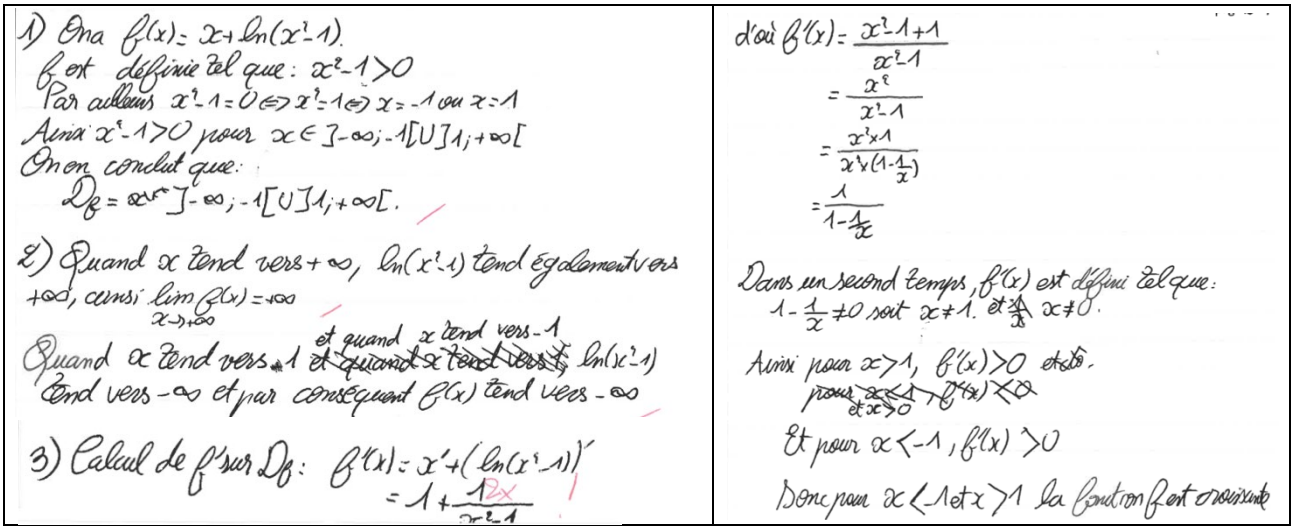


Figura 4: Producción de Ilias en respuesta al tema del examen (Figura 2).

El cálculo de límites sólo está presente para los valores + ∞, –1 y 1. El estudiante parece aplicar bien las reglas de cálculo de límites (construcciones) apoyándose en la visualización de la fórmula algebraica. Pero la entrevista revela que, para calcular estos límites, el estudiante aplica conocimientos de álgebra ampliada sin pronunciar nunca la palabra límite, por ejemplo: "*En infinito positivo, x al cuadrado menos 1 es infinito positivo, ln de infinito positivo es infinito positivo*" [nuestra traducción]. Lo mismo ocurre con los límites en –1 y +1: "*x al cuadrado menos 1 es 0, ln de 0 es infinito negativo por lo que es infinito negativo*" [nuestra traducción].

Además, el estudiante no afirmó espontáneamente que había sumas de límites implicadas en relación con la descomposición algebraica esperada de la visualización. Esto se observa aplicado implícitamente en su producción con "*así*" y "*en consecuencia",* como en " $\ln(x^2-1)$ *tiende a* -∞ *y por lo* tanto $f(x)$ *también*". Como esto no se verbalizó durante la entrevista, podemos pensar que los conocimientos movilizables son teoremas en acción del tipo "+ ∞ + ∞ = + ∞" que parecen permanecer en el nivel de la acción. Estos análisis permiten así poner en relieve cognitivamente las construcciones realizadas por el estudiante en su producción.

El estudiante no calcula el límite en -∞. De hecho, durante la entrevista dice "*aquí x al cuadrado -1 tenderá hacia infinito positivo, por lo que ln tiende hacia infinito positivo. Por otro lado, x tiende hacia infinito negativo. Entonces tenemos una forma indeterminada*" [nuestra traducción]. El estudiante reconoce la forma indeterminada (actividad de reconocimiento) necesaria para desencadenar las ejecuciones algebraicas (con tratamiento o visualización) esperadas. Sin embargo, continúa diciendo que "*recuerdo que intenté hacerlo en borrador, pero cada vez me encontraba con formas indeterminadas*" [nuestra traducción]. Aunque es consciente de la existencia de esta forma indeterminada, lo que le falta en este caso es el conocimiento sobre el tratamiento de la forma indeterminada. Así, entendemos por qué el trabajo no se continúa.

Luego del cálculo de la derivada (erróneo porque no dominaba la regla de la cadena), el estudiante determina que la función es siempre creciente. Durante la entrevista, el tutor va en búsqueda de actividades de control en el estudiante y le pregunta si ve alguna incoherencia en su razonamiento. Sin obtener respuesta, el tutor hace con el estudiante la tabla de variación con *f* creciente considerando algunos límites. De esta manera, la oportunidad de control se hace evidente: la función no puede ser creciente y tender a - ∞ en -1 y 1. Sin embargo, el estudiante siguió sin decir nada significativo: no desarrolló ninguna actividad matemática (relacionar, convertir, etc.) que le permitiera controlar su trabajo. Por tanto, podemos preguntarnos si el estudiante está desarrollando realmente su actividad en el marco funcional. Las imágenes mentales basadas únicamente en el tratamiento de la fórmula algebraica (cálculos de límites en un marco limitado al álgebra ampliada) no permiten al estudiante adoptar una perspectiva global de la función, característica del marco funcional.

La última pregunta de la entrevista se refería al uso de una calculadora gráfica. El estudiante dijo: "*con una calculadora gráfica representado la función y hubiese visto si la forma de la curva de la función era coherente...*" [nuestra traducción]. Sin embargo, aunque con una ayuda considerable del tutor pudo ver que el límite en -∞ era -∞, cuando comparó la curva con los límites correctos en los extremos del dominio de definición, el estudiante fue incapaz de reconocer de dónde procedían las incoherencias y los errores entre los resultados de su producción y la curva. Fue el tutor quien señaló la incoherencia con el resultado "*f* creciente". La actividad posible en este punto está sin duda fuera de la ZPD del estudiante.

El caso de Inoovan: [Sem-Ins] con falta de conocimientos algebraicos, pero con controles potenciales entre los límites y la variación

Inoovan es una estudiante que procedió mediante ejecuciones algebraicas (tratamiento o visualización) durante el test diagnóstico, pero estas ejecuciones parecen bloqueadas cuando se trata de adoptar una perspectiva local en un punto finito y en +∞ y -∞ cuando no se trata de una aplicación inmediata. En el cuestionario observamos orientaciones y ejecuciones gráficas, con una visualización local sólo en +∞ y -∞ (Q1 y Q2) y no en el vecindario de un punto (Q3), lo que es coherente con las respuestas del test. La imagen global de la función ln parece ser un conocimiento disponible, pero aislado de las demás perspectivas, ya que no transpone la propiedad del punto a la elección correcta de la gráfica (Q4).

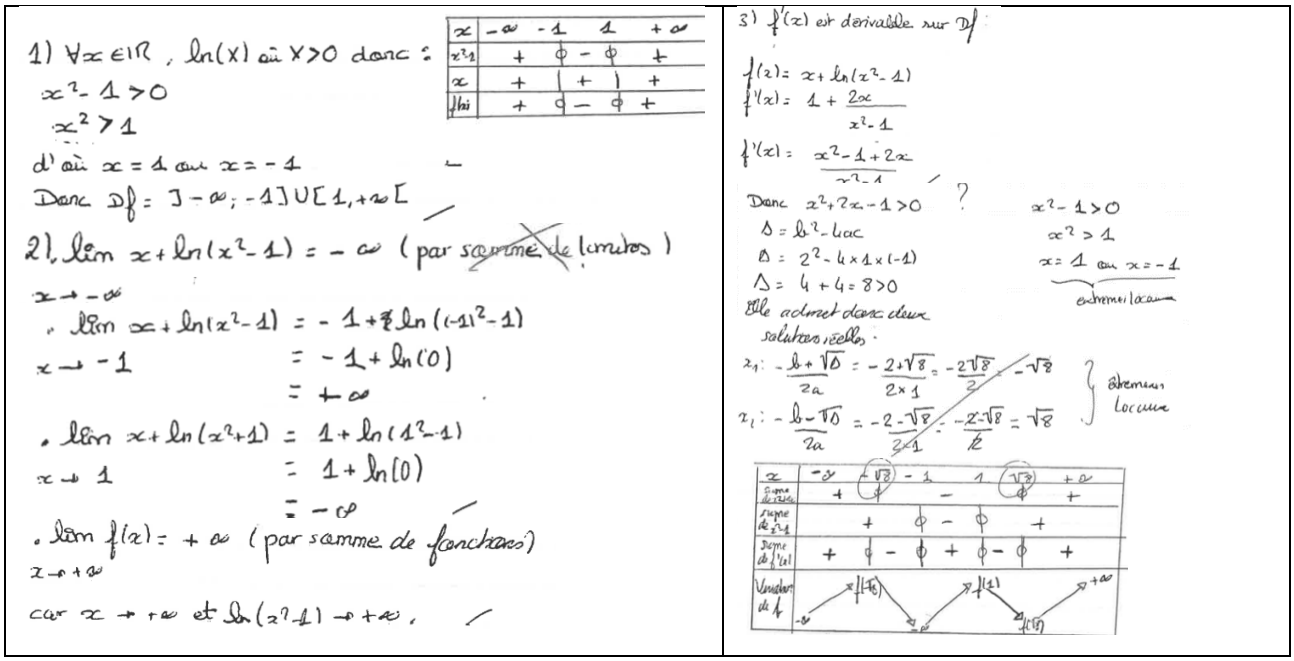


Figura 5: Extracto de la producción de Inoovan en respuesta a las preguntas 1, 2 y 3 del examen (Figura 2).

Como en el caso de Ilias, el trabajo de examen de Inoovan muestra un trabajo conforme en [Sem-Ins]. Aunque la estudiante dispone de un método para calcular correctamente el dominio de definición de la función, el tratamiento y las conversiones semióticas de las inecuaciones hacia intervalos de definición no son correctas porque considera que 1 y -1 forman parte de los extremos del dominio.

Sin embargo, esto no impide el cálculo de límites correctos para +∞, -1 y 1. Al igual que Ilias, esta estudiante aplica operaciones sobre límites (construcciones) en un marco algebraico ampliado, caracterizado aquí por los usos de $\ln(0)$. La descomposición algebraica de la fórmula en una suma está bien hecha (visualización). Pero el cálculo del límite para -∞ es interesante porque en el momento de la entrevista dijo "*el primer término aquí tiende a infinito negativo, ln de x al cuadrado, lo que significa que ln de una variable x cuando tiende a infinito negativo es infinito negativo. Así que por la suma de...*". De hecho, la estudiante considera $f(x) = x + \ln(x^2 - 1)$ como

equivalente a $f(x) = x + \ln(X)$ con una variable X que tiende como *x hacia* -∞. Por tanto, no se realiza la actividad de descomposición algebraica más allá de la suma. No se considera la composición. Además, la estudiante considera un límite de $\ln(x)$ que sería -∞ cuando *x* tiende a -∞. Tampoco se realiza una visualización global de la función ln. Es sólo gracias a la intervención del tutor que se toma en cuenta la función compuesta, que la estudiante dice que $\ln(x^2 - 1)$ *"tiende a infinito positivo*". En ese momento, sin haber reconocido aún la forma indeterminada, toma conciencia de ella y dice: "*No se me había ocurrido*". El reconocimiento de la forma indeterminada sólo se produce tras la intervención del tutor. Así pues, los procesos de visualización de esta estudiante están lejos de implicar todos los conocimientos matemáticos esperados y limitan los procesos de construcción, aunque el trabajo se realice en [Sem-Ins].

En su producción, la alumna calcula correctamente la derivada, pero su tabla de variación no es correcta. De hecho, no hay coherencia con el límite encontrado en 1 (-∞), mientras que su tabla de variación dice que debería haber un extremo máximo. Al buscar una actividad de control durante la entrevista, la alumna dijo: "Me *parecía raro, pero si retrocedía, no iba a terminar los otros ejercicios*" [nuestra traducción]. Aunque podemos ver que tuvo alertas de no coherencia, la oportunidad de control no se aprovecha debido al contexto en el que se desarrolla la actividad.

En cuanto al uso de la calculadora gráfica, la estudiante argumenta que podría haber comparado estos resultados con la forma de la curva. Una vez que vio la curva real dijo, refiriéndose a $f(1)$ en la tabla de variación: "*aquí tengo malo, no sé cómo decirlo*", y siguiendo con su comparación entre su producción y la curva y añadió: "*A partir de ahí, tendría razón, porque es creciente. Además, veo que decrece. Sí, así que sigo bien. Luego, en un momento dado, hay un espacio vacío. Así que probablemente habría dicho que no estaba definido, lo habría recordado. Sí, eso es, y luego hubiese terminado...*". De estos extractos se desprende que ella es capaz de interpretar bien el gráfico adoptando ejecuciones gráficas con visualizaciones. Además, en relación con los efectos de la formación en el primer semestre, podemos ver que esta estudiante ahora es capaz de calcular el límite en un punto y de realizar ejecuciones gráficas con visualización, pero aún le faltan otros conocimientos sobre límites.

CONCLUSIÓN

En el caso de los dos estudiantes analizados, el trabajo es conforme en el plan [Sem-Ins], en un marco de algebra extendida, gracias en particular a las reglas algebraicas de cálculo de límites. Sin embargo, las actividades de reconocimiento y control entre el cálculo de los límites y las variaciones de la función permiten afirmar que para ellos sólo existe una conceptualización parcial del límite (respuesta correcta a sólo tres cálculos de límites). Además, el reconocimiento de las formas indeterminadas sigue siendo un problema para estos alumnos cuando acceden a la universidad, sin que se produzcan cambios significativos entre el test, el cuestionario post-test y la actividad matemática producida durante el examen. Así pues, no existe una conceptualización real de los límites en un marco funcional, lo que puede explicar la imposibilidad de

control por parte de los estudiantes. En consecuencia, la cuestión sobre cómo se podría re-pensar una enseñanza más robusta sobre una conceptualización real de los límites en un marco funcional merita ser aún profundizada.

REFERENCIAS

Duval, R. (2005). Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie : développement de la visualisation, différenciations des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements. Annales de didactique des mathématiques et de sciences cognitives, 10, 5-55.

Chesnais, A. & Coulange, L. (2022). Rôle du langage verbal dans l'apprentissage et l'enseignement des mathématiques. Synthèse et perspectives en didactique des mathématiques, Revue française de pédagogie, 214, 85-121.

Flores González, M. (2023). La notion de contrôle et networking de théories. Dans C. Derouet, A. Nechache, P.R. Richard, L. Vivier, I.M. Gómez-Chacón, A. Kuzniak, M. Maschietto & E. Montoya Delgadillo, Actes du septième symposium d'Étude sur le Travail Mathématique (pp. 59-70). IREM de Strasbourg.

Flores González, M., & Vandebrouck, F. (2024). Semiotic control in calculus: the case of limits of functions at the beginning of the university. 13th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME13), Alfréd Rényi Institute of Mathematics; Eötvös Loránd University of Budapest, Jul 2023, Budapest.

Galperine, P. (1966). Essai sur la formation par étapes des actions et des concepts. In A. Leontiev, A. Luria & A. Smirnov (Eds.), Recherches psychologiques en URSS (pp. 114-132). Editions du progrès.

Montoya Delgadillo, E., Páez Murillo, R-E., Vandebrouck, F., & Vivier, L. (2018). Deconstruction with Localization Perspective in the Learning of Analysis. International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education, 4(1), 139-160. https://doi.org/10.1007/s40753-017-0068

Vandebrouck, F. (2023). Bifurcation génétique dans les ETM personnels. Dans C. Derouet, A. Nechache, P.R. Richard, L. Vivier, I.M. Gómez-Chacón, A. Kuzniak, M. Maschietto & E. Montoya Delgadillo, Actes du septième symposium d'Étude sur le Travail Mathématique (pp. 83-94). IREM de Strasbourg.

Vandebrouck, F., & Leidwanger, S. (2016). Students' visualisation of functions from secondary to tertiary level. In E. Nardi, C. Winsløw, & T. Hausberger (Eds.), Actes de la Première Conférence INDRUM 2016, International Network for Didactic Research in University Mathematics (pp. 153-162). University of Montpellier

Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. Recherches en didactique des mathématiques, 10 (2-3), 133-170.

Vidal-Gomel, C. (2022). Les entretiens de confrontation aux traces de l'activité. Dans Albero, B. & Thievenaz, J. (Eds), Enquêter dans les métiers de l'humain (pp. 130-144). Éditions Raison et Passions.

VERS L'ETM DE RÉFÉRENCE EN NOMBRES ET GÉOMÉTRIE : LE CAS DU SYSTÈME ÉDUCATIF COSTARICIEN

Norma Segura-Corella

Université Paris Cité, LDAR et

Université de Costa Rica, Département d'Éducation Mathématique

Cet article analyse le programme de mathématiques 2012 du ministère de l'Éducation Publique (MEP), dans le cadre d'une ETM de référence en relatifs aux connexions entre nombres et géométrie. *Cette analyse met en évidence que le processus connecter n'est pas une compétence explicite, mais une action cognitive transversale, et qu'il est activé dans la résolution de problèmes ou l'argumentation, développant des compétences telles que le raisonnement, la communication et l'utilisation d'outils mathématiques. Au niveau épistémologique, on a identifié la mesure des grandeurs comme un connecteur entre les nombres et la géométrie, apparaissant dans certaines tâches ou éléments curriculaires appelés « objets connecteurs ».*

INTRODUCTION

Cette contribution s'inscrit dans le cadre d'une recherche de doctorat en Didactique des Mathématiques, qui vise à décrire et analyser la nature d'un élément particulier qui intervient dans le travail mathématique : *connecter* en mathématiques. Nous nous intéressons particulièrement à l'Espace de Travail Mathématique (ETM) de référence relatif aux connexions entre nombres et géométrie dans le système éducatif costaricien. Dans le titre, nous avons choisi le mot *vers* avec une intention spécifique, nous avons sélectionné quelques éléments de cet ETM de référence pour les présenter dans cet article. L'accent est mis sur les aspects institutionnels en relation avec des éléments épistémologiques et cognitifs.

QUELQUES ÉLÉMENTS THÉORIQUES ET MÉTHODOLOGIQUES

Un ETM de référence vise l'étude didactique du travail mathématique attendu (de référence) dans une institution ou une organisation scolaire donnée. La description du travail mathématique de référence est déterminée à la fois par des critères mathématiques et par des critères culturels, économiques, sociaux et politiques liés à l'enseignement des mathématiques (Montoya-Delgadillo et Reyes-Avendaño, 2022).

A ce propos, Montoya-Delgadillo et Reyes-Avendaño (2022) proposent trois approches : (1) L'approche historico-épistémologique, qui consiste à identifier les idées, les procédures, les contextes et les conditions dans lesquels l'objet d'étude mathématique est apparu. (2) L'approche institutionnelle-organisationnelle, qui consiste à identifier les normes établies par l'institution, les programmes et les documents officiels. Elle considère également les habitudes, les pratiques professionnelles et les interactions entre enseignants qui ne figurent pas dans ces documents, mais qui influencent le processus d'enseignement-apprentissage. (3)

L'approche cognitive, qui consiste à identifier les processus cognitifs qui caractérisent le travail mathématique.

"It should be noted that the reference work is not given but must be identified and constructed for the specific needs of each research project" (Montoya-Delgadillo et Reyes-Avendaño, 2022, p. 74). Cet article intègre les trois approches mais on accorde une place particulière à l'approche institutionnelle-organisationnelle, on présente le travail mathématique attendu par le système éducatif costaricien concernant la connexion en nombres et en géométrie.

Dans la première section, nous abordons certains aspects épistémologiques, tandis que dans la deuxième section, nous abordons l'approche cognitive. Dans la troisième section, l'analyse du programme d'études du ministère de l'Éducation Publique (MEP) de Costa Rica permet d'identifier le travail mathématique attendu dans cette institution, ainsi que certaines des conditions et restrictions qui entourent ce travail dans la salle de classe. Ainsi, à travers des intentions portées par ce programme, dans les trois premiers cycles (7-5 ans), nous nous proposons d'identifier le rôle institutionnel donné aux connexions mathématiques avec un intérêt particulier pour celles qui émergent en nombres et géométrie.

Il s'agit d'une analyse descriptive, guidée par des questions comme : *Quelle signification le programme donne-il au terme « connecter » ? Quelles sont les caractéristiques du travail mathématique attendu lors de l'établissement de connexions entre nombres et géométrie ? Existe-t-il des connexions mathématiques entre nombres et géométrie dans le programme de mathématiques du Costa Rica ?* Afin de répondre à ces questions, une analyse des trois premiers cycles du programme de mathématiques actuel (MEP, 2012) a été effectuée.

L'analyse du programme s'est déroulée en quatre phases. Tout d'abord, nous avons identifié à un niveau général les indications curriculaires concernant le processus de connexion, explicitement déclaré par le MEP (2012). Ensuite, en utilisant le moteur de recherche de mots, nous avons identifié les parties du programme qui font explicitement référence à une connexion en nombres et géométrie. Troisièmement, nous avons extrait toutes les tâches, indications spécifiques, méthodologiques, d'évaluation ou tout autre élément curriculaire ainsi que l'habileté spécifique associée ; ceci a été le premier critère de sélection. Dans un quatrième temps, nous avons analysé chacun de ces extraits en considérant les éléments épistémologiques et cognitifs et avons établi une catégorisation des objets connecteurs en nombres et géométrie.

CONNECTER : UNE APPROCHE ÉPISTÉMOLOGIQUE

Dès les premières civilisations, on observe que les activités mathématiques mettent en relation des objets ou des représentations mathématiques. Par exemple, les Égyptiens répondaient à des problèmes tels que : « quelles doivent être les longueurs des côtés d'un champ triangulaire pour qu'il soit équivalent à un champ carré dont la longueur des côtés est donnée ? Quels seront les aires de ces champs ? » (Baudet, 2014, p.14).

On constate alors qu'il existe une relation explicite entre les nombres, les mesures et les figures géométriques : les premiers objets mathématiques.

Dans la Grèce antique, la réalité pouvait être comprise à travers les relations numériques au sein de l'école pythagoricienne (Boyer & Merzbach, 2011) ; le théorème de Pythagore est l'une des connexions mathématiques emblématiques de tous les temps. Postérieurement, l'axiomatisation d'Euclide a servi de base pour relier les opérations arithmétiques aux longueurs, surfaces et volumes.

Ce lien entre arithmétique et géométrie s'est consolidé avec l'expansion de l'algèbre. Au XVIIe siècle, les coordonnées cartésiennes relient l'arithmétique, l'algèbre et la géométrie en décrivant des courbes et des surfaces dans le plan et dans l'espace. La relation entre les structures numériques et les propriétés de l'espace s'est amplifiée avec le développement des géométries non euclidiennes (chez Gauss, Lobachevsky et Riemann, par exemple) (Kline, 1972).

De cette manière et avec le développement des savoirs scientifiques, les mathématiciens ont, tout au long de l'histoire, établi et étudié des connexions mathématiques. Aujourd'hui, les liens en nombres et géométrie font encore l'objet d'études en topologie, en théorie des graphes ou en géométrie différentielle, par exemple ; où des systèmes numériques de plus en plus abstraits permettent d'étudier et de représenter les notions de distance, de courbure et de dimension (Eves, 1990).

On pourrait donc décrire les mathématiques comme un vaste réseau de connexions mathématiques, « les mathématiques sont un système structuré et imbriqué de relations exprimées par des symboles et régies par des règles précises » (Lovell, 1972, p.177). Les mathématiques sont une structure interconnectée composée d'objets décrits par certaines propriétés fondamentales, adoptées en tant qu' axiomes dans la théorie respective, en suivant à Bourbaki (2007). Dans cette structure, les relations entre les premiers objets constituent d'autres objets mathématiques, tels que les postulats et les théorèmes. Donc, du point de vue du savoir lui-même, dans cette étude on considère qu'une connexion mathématique est un objet mathématique qui met en relation non contradictoire d'autres objets mathématiques bien définis.

CONNECTER : UNE APPROCHE COGNITIVE

À la suite de la section précédente, *l'action de connecter* est essentielle dans la pratique d'un mathématicien y cette action est transposée aux mathématiques scolaires. Pour cette recherche, la nature de tel interaction est constructiviste à la suite de Piaget (1968). Dans ce contexte, connecter évoque un processus cognitif construit de la part de l'individu.

La position de ce processus dans l'apprentissage des mathématiques est révélatrice. Par exemple, Ausubel, Novak et Hanesian (1983) et Anderson (1983) proposent l'apprentissage comme le résultat de la *connexion* d'une structure cognitive du sujet avec une nouvelle structure, celle qui doit être apprise. Ces psychologues ont concentré leur attention sur la manière dont les informations perçues par un individu sont

systématisées, organisées, stockées, manipulées et mises à disposition au sein d'autres situations.

Ausubel *et al.* (1983) proposent l'apprentissage des élèves comme le résultat de la relation entre les connaissances préalables et ce qui doit être appris. « L'essence du processus d'apprentissage significatif réside dans le fait que les idées exprimées symboliquement sont liées de manière non arbitraire et substantielle (pas littéralement) à ce que l'élève sait déjà » (Ausubel *et al.*, 1983, p. 48). Mais qu'est-ce qu'une relation non arbitraire et substantielle ? « Par relation substantielle et non arbitraire, nous entendons que les idées sont liées à un aspect existant spécifiquement pertinent de la structure cognitive de l'élève, tel qu'une image, un symbole déjà significatif, un concept ou une proposition » (Ausubel, 1961, cité dans Ausubel *et al.*, 1983, p. 48).

Dans le cadre de l'étude de la mémoire sémantique, Anderson (1983) soutient la même thèse : ce qu'on apprend devient partie intégrante de la mémoire par l'activation et la connexion avec un composant présent dans la mémoire de l'individu. Ils décrivent la mémoire comme un réseau de concepts interconnectés, qui s'activent pour établir une connexion avec un nouveau concept. De cette manière, la mémoire est entendue comme un réseau composé de nœuds et de liens.

Ainsi, nous avons deux façons de concevoir les connexions. D'une part, comme chez Ausubel *et al.* (1983), l'accent est mis sur la nature de la connaissance, qui doit être substantielle et non arbitraire. D'autre part, des auteurs comme un ensemble de nœuds et de liens, en mettant l'accent sur l'architecture de cette structure, chez Anderson (1983).

CONNECTER : UNE APPROCHE INSTITUTIONNELLE

Un programme d'études est le résultat de décisions prises par certaines personnes, sous un certain paradigme. Il s'agit d'une sélection et d'une organisation des savoirs qui feront partie des mathématiques scolaires, dont l'objectif est de normaliser les règles de discours, de traitement et de présentation du travail mathématique ; les manières de faire dans une institution en fonction des besoins et des exigences d'une société. C'est pourquoi, on retrouve certains des éléments épistémologiques et cognitifs exposés dans les sections précédentes.

Le programme de mathématiques du Costa Rica (MEP, 2012) en bref

Le programme de mathématiques actuel date de 2012, son principal objectif est de renforcer les capacités cognitives pour faire face aux défis d'une société moderne, en promouvant la construction de l'apprentissage par les élèves grâce à un enseignement pertinent. À cette fin, il adopte une stratégie et une approche fondées sur la *formulation et la résolution de problèmes*. « Il s'agit d'une médiation pédagogique qui adopte des prémisses constructivistes fondamentales, conformément à la politique éducative approuvée par le pays, notamment celle qui met l'accent sur la construction active par le sujet de son apprentissage » (Ministère de l'Éducation Publique [MEP], 2012, p.21).

Le programme est organisé par cycles, années, domaines mathématiques (nombres, mesures, géométrie, relations et algèbre, statistiques et probabilités) et habilités[23]. « Les connaissances et les attentes en matière d'apprentissage sont organisées dans le programme de manière intégrée de la première à la dernière année » (MEP, 2012, p.16), ce qui correspond, comme l'indique le programme, à l'une de ses principales caractéristiques : l'intégration verticale.

Le programme déclare aussi son intention de sélectionner des objets mathématiques à étudier afin d'obtenir des mathématiques en profondeur et non en largeur et, pour ce faire, il propose l'activation des activités transversales : les *processus mathématiques*. « Les processus mathématiques sont entendus ici comme des activités cognitives (ou types d'activités) que les personnes réalisent dans les différents domaines mathématiques et qui sont associées à des capacités de compréhension et d'utilisation des connaissances » (MEP, 2012, p.24). Le MEP (2012) décrit chaque processus mathématique comme suit :

- *Raisonnement et argumentation* : ce processus doit être conforme au niveau cognitif des élèves, en utilisant d'abord des formes verbales, puis écrites et enfin symboliques. De même, les formes de raisonnement par contradiction, l'induction, l'utilisation de contre-exemples et les différentes formes de déduction doivent être introduites petit à petit.
- *Formuler et résoudre des problèmes* : il est nécessaire de former les élèves aux différentes étapes de la résolution de problèmes, telles que la compréhension des problèmes, l'élaboration de plans d'action et l'évaluation ou le suivi des actions. En particulier, la modélisation doit être introduite de manière progressive avec l'enseignement des différentes stratégies et toujours en relation avec le contexte des élèves.
- *Communiquer* : communiquer nous oblige à préciser notre pensée, c'est pourquoi ce processus suggère une communication à différents niveaux et sous différentes formes, des plus simples, comme l'oral ou l'écrit, aux formes graphiques, symboliques et formelles.
- *Connecter* : il existe différents types de connexions, par exemple : à l'intérieur de chaque domaine mathématique (par exemple, lors de l'application des procédures et des opérations des nombres naturels aux nombres rationnels ou réels), entre différents domaines mathématiques et, de manière générale, avec d'autres disciplines. La connaissance doit être considérée comme une réalité interconnectée et pleine de liens. Ce type d'enseignement scolaire permet une compréhension plus profonde et plus précise des objets mathématiques, mais

[23] Le terme original utilisé dans le programme en espagnol est « habilidades ». En français, il est plus souvent traduit par « compétences », mais dans ce travail, on a décidé de le traduire par « habilités » car le programme utilise également un autre terme, « competencia », qui a une signification plus large et qui est traduit par « compétence ».

permet également de cultiver l'abstraction de l'élève, puisque la généralisation et l'universalisation des méthodes et des idées obligent à de plus grandes abstractions.

- *Représenter* : la maîtrise de diverses représentations permet une meilleure organisation des idées mathématiques, ce qui fait progresser leur compréhension et le développement de nouvelles formes mathématiques.

Connecter : quelle est la place de ce travail mathématique dans le programme ?

Connecter est un processus, c'est la première prémisse présentée dans le programme. Connecter est l'un des cinq processus (Formuler et résoudre des problèmes, Raisonner et argumenter, Représenter, Connecter et Communiquer) qui, selon le programme, sont fondamentaux pour le développement de la compréhension et de l'utilisation des connaissances. Mais qu'est-ce que le programme entend par « processus » ? La conceptualisation de ces processus et leur inclusion dans le programme d'études costaricien ont leurs racines dans le programme d'études des États-Unis, comme l'explique le programme :

> La notion de processus utilisée dans ce programme est très proche de celle utilisée par le National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) aux États-Unis. Cette organisation professionnelle définit des standards de processus parallèlement aux standards de contenu. Les standards de processus « mettent l'accent sur les manières d'acquérir et d'utiliser les connaissances » (NCTM 2000, p. 29). Les standards de processus sont également des attentes en matière de résultats dans des activités transversales autres que les mathématiques. Dans ce programme, le concept de processus a un sens plus pratique et moins général : il s'agit de « familles » ou de types d'activités. La mise en relation, par exemple, peut être considérée comme une famille d'activités proposées dans le cadre de la mise en œuvre du curriculum et qui favorisent le développement d'une ou plusieurs compétences. (MEP, 2012, p.42)

Dans ce contexte, le MEP (2012) souligne que le processus connecter déclenche des actions cognitives qui développent des compétences, mais que la connexion n'est pas directement associée à une compétence ou à un ensemble de compétences. Il accepte ainsi, d'une part, la nature cognitive du processus de connexion et, d'autre part, la distinction entre processus et compétence.

De plus, les cinq processus interagissent à différents niveaux au sein du programme. Formuler, résoudre des problèmes, raisonner et argumenter jouent les rôles principaux. Les trois autres, en particulier connecter, ont des rôles secondaires, c'est-à-dire qu'ils interviennent plus ou moins lorsque l'apprenant résout un problème ou argumente dans le cadre d'une tâche. « Parfois, formuler et résoudre des problèmes sera activé plus étroitement en lien avec connecter, parfois en lien avec communiquer, en fonction de la tâche mathématique » (MEP, 2012, p. 26). Cette différenciation est explicite dans la première partie du programme, où il est indiqué que connecter est un processus transversal aux deux principaux (formuler et résoudre des problèmes, raisonner et argumenter). Cependant, lorsque nous examinons les habiletés spécifiques, les

indications spécifiques, les indications méthodologiques ou d'évaluation présentés par le programme, une telle différence entre leurs rôles n'est pas évidente.

En résumé, le processus connecter n'est pas une compétence à développer en tant que telle dans le programme. « Le processus connecter n'est pas directement associé à une compétence ou à une combinaison de compétences, mais il déclenche des actions cognitives associées à plusieurs compétences » (MEP, 2012, p.492). Bien que cette première approche que le programme fait du processus connecter semble être centrée sur la partie cognitive, l'analyse des descriptions méthodologiques et d'évaluation révèle une centralisation du processus de connexion dans son caractère épistémologique.

> Les connexions peuvent être développées dans de nombreux contextes : par exemple, au sein de chaque domaine mathématique (comme lors de l'application des procédures et opérations des nombres naturels aux nombres rationnels ou réels). Mais aussi entre différents domaines mathématiques et, de manière générale, avec d'autres matières. Les mathématiques, par leur nature même, ont le potentiel de soutenir les processus transdisciplinaires qui devraient être cultivés dès les premières années d'école. La connaissance doit être visualisée comme une réalité interconnectée et riche en liens. (MEP, 2012, p. 57)

En particulier, dans le programme, deux types de connexions mathématiques sont identifiés : les connexions entre domaines mathématiques et les connexions extra-mathématiques. De plus, au niveau épistémologique, on retrouve la conception des mathématiques comme un domaine interconnecté.

Toutefois, dans le programme MEP (2012), connecter fait également référence à un niveau de complexité des tâches. Le programme propose de décrire les tâches selon trois niveaux de complexité :

- *Reproduction* : il s'agit d'exercices qui reproduisent des connaissances antérieures, en appliquant des algorithmes et des techniques de base.
- *Connexion* : il s'agit d'exercices ou de problèmes non routiniers dans des contextes familiers qui impliquent une interprétation plus approfondie et une connexion entre divers éléments et représentations.
- *Réflexion* : il s'agit d'exercices ou de problèmes qui encouragent la réflexion dans des environnements nouveaux, impliquant la résolution de problèmes complexes, l'argumentation, la généralisation et la communication des résultats à l'aide de méthodes avancées.

Ainsi, dans ces niveaux de complexité, la connexion prend un statut qui permet de caractériser les tâches du programme par rapport au type de travail mathématique attendu. Au niveau de complexité connexion, la mise en relation de différents objets, notamment avec des connaissances préalables, est attendue. On s'attend donc à ce que les tâches de ce niveau fassent l'objet d'un traitement particulier. Par exemple,

> une boulangerie vend des gâteaux de forme circulaire et de même épaisseur en 2 tailles : ceux de 20 cm de diamètre pour 8000 colones, ceux de 30 cm de diamètre pour 12 000

colones. Quels sont les gâteaux qui vous conviennent le mieux ? Expliquez pourquoi. (MEP, 2012, p.33)

Cette tâche proposée par le MEP (2012) relie la géométrie et les nombres en calculant la surface des gâteaux et en la comparant à leur coût. Dans les procédures possibles, d'autres liens apparaissent comme l'utilisation des proportions pour analyser la relation entre la taille et le prix, le raisonnement algébrique et numérique intervient pour déterminer le coût par unité de surface, le monde mathématique est relié au monde réel à travers cette modélisation, entre autres. La différence avec un problème de reproduction est que dans ce cas, l'application directe des formules ne suffit pas pour fournir une solution à la situation ; la mise en relation occupe une place fondamentale.

Ainsi, dans le programme de mathématiques du Costa Rica, la connexion est comprise selon trois perspectives. D'un point de vue cognitif, en tant que processus, il implique des activités transversales qui activent des actions cognitives associées aux compétences mathématiques. D'un point de vue épistémologique, en tant qu'objet mathématique, il existe deux types de connexions : intra-mathématiques et extra-mathématiques. Dans le corps du programme, des connexions explicites de ces deux types sont détectées, où les connexions entre les domaines mathématiques se distinguent. Ceci est associé à la conception des mathématiques comme un domaine interconnecté. D'un point de vue organisationnel, en tant que niveau de complexité, ce qui permet de caractériser les tâches du programme.

En sachant ce que l'on entend par connecter dans ce programme, quelles sont les raisons qui soutiennent cet objet dans le programme ? Le MEP (2012) fait trois brèves références à la fonctionnalité du processus connecter. La première, en accord avec les résultats des recherches précédentes, fait référence à la compréhension des mathématiques. L'inclusion du processus connecter dans l'enseignement et apprentissage des mathématiques permet une compréhension profonde et précise des objets mathématiques, ainsi que le développement de l'abstraction chez l'élève (MEP, 2012).

> Ce type de formation scolaire permet une compréhension plus profonde et plus précise des objets mathématiques, mais il permet également de cultiver l'abstraction de l'élève, puisque la généralisation et l'universalisation des méthodes et des idées obligent à de plus grandes abstractions. L'observation de l'applicabilité et de l'interconnectivité des mathématiques renforce leur appréciation et leur plaisir. (MEP, 2012, p. 57)

En deuxième lieu, en ce qui concerne la nature des mathématiques en tant que discipline interconnectée et riche en liens. « Observer l'applicabilité et l'interconnectivité des mathématiques renforce leur appréciation et leur plaisir » (MEP, 2012, p.57). En troisième lieu, le processus connecter est un élément crucial de la modélisation, un modèle étant défini comme « un ensemble d'éléments mathématiques connectés qui représentent une réalité spécifique (expliquent, décrivent, permettent de faire des prédictions) » (MEP, 2012, p.31).

Cependant, la raison d'être de ce processus, et des quatre autres, est ancrée dans les standards internationaux. Les résultats de la deuxième étude régionale comparative et

explicative (SERCE) montrent que les élèves costariciens rencontrent des difficultés dans des activités telles que « la résolution de problèmes dans lesquels il faut sélectionner des informations utiles, ou avec des informations qui ne sont pas explicites et qui nécessitent l'utilisation de relations et de connexions entre différents concepts » (MEP, 2012, p. 480).

Dans ce contexte, le MEP (2012) a importé des idées d'autres systèmes éducatifs dans le système costaricien, en particulier les processus proposés dans le MEP (2012) ont été importés du National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) des États-Unis : « L'idée de processus utilisée dans ce curriculum est très similaire à celle utilisée par le National Council of Teachers of Mathematics NCTM, des États-Unis » (MEP, 2012, p. 490).

Ainsi, afin de mieux comprendre le travail mathématique attendu, nous avons analysé le curriculum des Etats-Unis en relation avec le processus connecté dans Nombres et Géométrie. Au niveau cognitif, le NCTM (2000) propose de relier les nouvelles idées mathématiques aux connaissances antérieures lors du raisonnement sur les nombres et les figures. Au niveau épistémologique, le NCTM (2000) met l'accent sur les liens entre la géométrie, la mesure et les nombres, en particulier à partir de la géométrie et de la mesure. Dans l'analyse du curriculum nord-américain, nous n'avons pas détecté beaucoup de connexions explicites à partir des nombres.

Ces caractéristiques du travail mathématique se retrouvent dans le programme costaricien, comme nous l'avons vu tout au long de cette analyse. Comme dans le curriculum des Etats-Unis, le MEP (2012) déploie un bon ensemble d'éléments théoriques en relation avec le processus connecter. Cependant, au niveau spécifique, lorsqu'il s'agit de tâches ou de situations liées à des habilités spécifiques, il ne va pas au-delà de l'affirmation « ce problème permet de faire des connexions avec... ».

Donc, il n'est pas clair quelles sont ces activités transversales, comment transposer ces activités transversales des mathématiques aux mathématiques scolaires, comment les opérationnaliser dans le cadre du processus de connexion, quelles activités prioriser afin d'obtenir une bonne compréhension ? Cette complexité et cette carence du programme sont superficiellement reconnues par l'affirmation suivante : « il n'est pas si simple d'introduire des connexions dans la classe. Cela nécessite une maîtrise des différents domaines mathématiques ainsi que des connaissances précises pour soutenir ces connexions avec des problèmes spécifiques » (MEP, 2012, p. 57).

Nombres et géométrie : quelles connexions le programme propose-t-il ?

Une connexion mathématique est un processus dual impliquant l'identification d'éléments de correspondance entre des entités mathématiques qui seront mises en relation au niveau cognitif ; opérationnalisé par la circulation dans l'ETM. Nous commençons cette section en évoquant notre conceptualisation de connexion mathématique car c'est à partir de celle-ci que nous avons construit des outils d'analyse des tâches et des situations qui impliquent a priori une connexion entre nombres et géométrie.

D'une part, au niveau épistémologique, nous utilisons les connaissances mathématiques comme critère pour identifier les situations ou tâches du programme costaricien qui impliquent des objets géométriques placés dans une relation non contradictoire avec des objets numériques, ou vice versa. Dans le programme, la mesure des grandeurs s'impose naturellement comme le connecteur entre nombres et géométrie. Ce connecteur apparaît dans certaines tâches ou situations que nous avons regroupées en ce que nous appelons dans ce travail des objets connecteurs

I ET II CYCLE (élèves de 7 à 12 ans)	
Type de connexion	**Objets connecteurs**
Correspondance	Droite numérique
	Plan cartésien
	Construction π
	Mesures de gradeurs géométriques (longueur, aire, périmètre, volume, mesure angulaire)
Représentation	Nombres figurés
	Diagrammes fractionnaires

Tableau 1 : Objets connecteurs dans le I et II cycle du MEP (2012).

III CYCLE (élèves de 12 à 15 ans)	
Type de connexion	**Objets connecteurs**
Correspondance	Droite numérique
	Plan cartésien
	Construction $\sqrt{2}$
	Mesures de gradeurs géométriques (longueur, aire, périmètre, volume)
Propriété	Inégalité triangulaire
	Somme des angles internes d'un triangle
	Théorème de Pythagore
Rapport de proportionnalité	Homothétie
	Rapports trigonométriques
	Loi des sinus

Tableau 2 : Objets connecteurs dans le III cycle du MEP (2012).

CONCLUSIONS

Dans cette contribution, nous étudions le travail mathématique attendu en ce qui concerne le processus de connexion entre nombres et géométrie, dans le cadre du système éducatif costaricien. Nous avons exploré l'ETM de référence à partir de trois approches : épistémologique, cognitive et institutionnelle, en mettant particulièrement l'accent sur cette dernière. L'analyse a révélé un ETM de référence résultant d'une importation d'un autre ETM de référence, celui du curriculum des États-Unis.

Parmi les principaux constats de l'analyse, il ressort que le processus connecter n'est pas une compétence à développer en tant que telle dans le programme. C'est une activité transversale qui est activée dans le cadre de la résolution de problèmes ou de l'argumentation, et qui développe les compétences : raisonner et argumenter, communiquer en mathématiques et utiliser des outils mathématiques. Bien que cette première approche que le programme fait du processus connecter semble être centrée sur la partie cognitive, l'analyse des descriptions méthodologiques et d'évaluation révèle une centralisation du processus de connexion dans son caractère épistémologique. En affinant le regard sur les liens en nombres et géométrie, nous constatons que la mesure des grandeurs s'impose naturellement comme le connecteur entre nombres et géométrie. Ce connecteur apparaît dans certaines tâches ou situations que nous avons regroupées en ce que nous appelons dans ce travail des objets connecteurs.

Pour conclure, si nous devions apposer un autocollant sur chaque lien présent dans le programme de mathématiques du MEP, par la nature même des mathématiques, nous aurions un autocollant sur presque chaque tâche ou élément du programme, car faire des mathématiques signifie établir des liens. La question est de savoir quels sont les connexions entre nombres et géométrie qui devraient être accentuées dans l'ETM de référence, afin d'être effectives dans l'ETM idoine à terme, et pourquoi ces connexions devraient-elles faire l'objet d'un traitement particulier ? Dans ce contexte, notre objectif est de poursuivre l'étude de l'ETM de référence autour de la connexion en nombres et géométrie.

REFERENCES

Anderson, J. R. (1983). *The architecture of cognition*. Lawrence Erlbaum Associates.

Ausubel, D., Novak, J., & Hanesian, H. (1983). *Psicología educativa: Un punto de vista cognoscitivo*. Editorial Trillas.

Baudet, J. (2014). *Histoire des mathématiques*. Vuibert.

Bourbaki, N. (2007). *Éléments d'histoire des mathématiques* (Vol. 4). Springer Science & Business Media.

Boyer, C., & Merzbach, U. (2011). *A history of mathematics*. John Wiley & Sons.

Businskas, A. (2008). *Conversations about connections. How secondary mathematics teachers and contend with teaching mathematical connections.* [Doctoral dissertation, The Pennsylvania State University]. ProQuest Dissertations Publishing.

Douady, R. (1988). Un processus d'apprentissage du concept d'aire de surface plane. *Publications mathématiques et informatique de Rennes*, (5), 1-50.

Eves, H. (1990). *An introduction to the History of Mathematics* (6th ed.). Saunders College Publishing.

Kline, M. (1972). *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*. Oxford University Press.

Kuzniak, A. (2011). L'espace de Travail Mathématique et ses genèses. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 16, 19-24.

Kuzniak, A., Montoya-Delgadillo, E., & Richard, P. R. (Eds.). (2022). *Mathematical Work in Educational Context: The Perspective of the Theory of Mathematical Working Spaces* (Vol. 18). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-90850-8

Lovell, K. R. (1972). Intellectual growth and understanding mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 3(3), 164-182.

Ministerio de Educación Pública de Costa Rica (2012). *Programa de estudio de Matemáticas: I y II Ciclo de Educación Primaria, III Ciclo de la Educación General Básica y Educación Diversificada*. San José, Costa Rica.

Montoya-Delgadillo, M., & Reyes-Avendaño, R. (2022). The reference mathematical working space. In Kuzniak, A. *et al.* (Eds.), *Mathematical work in educational context* (Vol. 18, pp.73-90). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-90850-8_4

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: autor.

Piaget, J. (1968). Le point de vue de Piaget. *International Journal of Psychology*, 3(4), 281-299.

CONCEPTUALIZED MATHEMATICAL WORK

Alejandro Cabrera[1,2], Elizabeth Montoya[1], Fabrice Vandebrouck[2], Laurent Vivier[2]

Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile[1]; LDAR, Université Paris Cité, Francia[2]

The present research aims to characterize the conceptualized mathematical work from a didactic situation centered on the modeling of periodic functions in a sound context. This report describes the results obtained by one of the groups that participated in the experiment. Among the results obtained, we highlight that the trainee teachers conceptualise trigonometric functions from the variables time and amplitude, developing a complete mathematical work in some sessions of the designed proposal.

INTRODUCTION

There is a close relationship between periodic functions and trigonometric functions, which can be evidenced in two aspects. On the one hand, periodicity emerges as a constitutive property of trigonometric functions that historically arise from the mathematization of the motion of objects. On the other hand, periodic functions are related to physical phenomena such as the pendulum or spring-mass system. In this sense, research reports that there is a predominance of algebraic work on these functions (Kepceoğlu & Yavuz, 2016), making it difficult to visualize periodic functions in the graphic register, which implies that the property of periodicity remains invisible in front of others, appearing as a transfer of the sine function that emerges as a solution of differential equations that model certain phenomena (Buendía, 2006).

It is evidenced in the current curricular organization, that the teaching of trigonometric functions is carried out from an extension of geometry, generating an obstacle in the learning of these, as there is a difficulty in the relationship between angles and radians (Moore, 2013; Demir & Heck, 2013; Tuna, 2013). Therefore, favoring the learning of trigonometric functions from other variables, different from those traditionally addressed, can enrich the conceptualization of trigonometric functions, which, in turn, can favor the process of conceptualization of periodic functions.

In this sense, the periodicity property of trigonometric functions allows us to define certain characteristics. This property is observed in the introduction of these functions from the trigonometric circle, however, due to the difficulties associated with the concept of radian, the investigations do not focus their attention on them.

We consider that designing a sequence for the teaching of periodic functions from sound phenomena, whose variables involved in their modeling are associated to time and wave pressure, will contribute, on the one hand, to enrich the understanding of periodic functions and, on the other hand, to contribute to the conceptualization of trigonometric functions from phenomena in which the variables are not associated to angles, avoiding the problems associated to trigonometric ratios and the confusion between ratio and function.

As a result of the above, we have proposed to characterize the conceptualized mathematical work of preservice teachers in solving a modeling task of periodic functions.

FRAMEWORK

Due to the proposed research objective, we have considered the use of two theoretical frameworks that will allow us to develop the achievement of this objective. Because these theoretical frameworks will be used in a coordinated manner, we have proposed to establish a networking (Prediger & Bikner - Ahsbahs, 2014) between the theory of Mathematical Working Space [MWS] and Activity Theory [AT], in order to propose the notion of conceptualized mathematical work.

MWS and AT share their attention to cognitive and epistemological processes, which support the theoretical tools provided by both frameworks for data analysis. On the one hand, MWS presents a three-level structure (Reference, Suitable and Personal) that allows us to organize and describe the mathematical work in different levels that participate in the process of organization, design and implementation of mathematical tasks and that provide this theoretical framework with a methodological tool to guide research in the area. AT shares its attention to the study of textbooks, curricula and all the context that surrounds the classroom and organizes the structure of the teaching process; however, it does not provide a methodological tool such as MWS.

Mathematical Working Space

The MWS makes it possible to describe and characterize the mathematical work of an individual based on a specific task. With this approach it is possible to describe how epistemological and cognitive elements are articulated in the solution of a task, showing the circulations between the activated components of the MWS (Kuzniak *et al.*, 2022).

The MWS consists of the articulation of two planes: Epistemological and Cognitive, which interact with each other, through a process of genesis (Kuzniak *et al.*, 2022). It is worth mentioning that there is also an articulation between the different genesis, generating three vertical planes: [Sem-Ins], [Ins-Dis], [Sem-Dis].

Conceptualization in AT

AT is a theory for analyzing the teaching-learning process in the mathematics classroom, both in its collective and individual dimensions, but also according to complementary dimensions: cognitive - linked to the knowledge and tasks at stake in a session - and mediative - linked to interactions between actors during classroom proceedings (Vandebrouck, 2024). The conceptualization process proposed by Vergnaud (1991) constitutes one of the bases of the definition of learning in Activity Theory.

Conceptualized mathematical work

We define conceptualized mathematical work as complete and coherent mathematical work, in which, based on the autonomous development of the student, or thanks to the mediations introduced by the teacher, the student expands his/her Zone of Proximal Development.

Language activities play a fundamental role, since they will allow the student to verbalize the connections made in the construction of new concepts. In this sense, Vergnaud (1991) points out that "language activities in a situation and cognitive activities about language necessarily involve specific conceptualizations about the content of thought, which are therefore conditioned by the content of knowledge" (p. 85).

In the conceptualization process, the adaptation of knowledge to new situations is fundamental to conceptualize a mathematical object through relationships between already internalized knowledge. Conceptualized mathematical work requires the student to recognize both intra- and extra-mathematical situations that can be modeled by means of the concepts developed when solving different situations.

Because conceptualized mathematical work is defined from the complete mathematical work, it is meaningful and generates learning; however, it is not possible to observe this mathematical from a task or learning situation.

The conceptualized mathematical work is observable through a sequence of tasks that promote the conceptualization of the mathematical object. We consider that a sequence of tasks is necessary, and not just one, since conceptualizing a mathematical object requires the student to mobilize knowledge progressively and in different situations. Therefore, we recognize certain constitutive characteristics of conceptualized mathematical work both in the design of the didactic situation and at the level of the students:

A design level: It is characterized by a sequence of tasks developed by the student, one task is not enough to conceptualize a mathematical object. Although it is defined on the basis of complete mathematical work, it is not conditioned to the student evidencing complete mathematical work in each of the tasks he/she faces.

A student level: The student must be able to communicate the mathematical processes performed and in his discursive process new connections between the knowledge belonging to his personal MWS must be recognized. We observe a coordination of new signs from existing signs and the use of artifacts that generate new representations of the mathematical object.

CONTEXT AND METHOD

The methodology that guides this research is didactic engineering (Artigue, 1995). Implementation is made up of 13 preservice teachers who are in the fifth semester of

the nine-semester program at a Chilean university. They formed six working pairs, which were identified as G1 to G6; only the G5 group consisted of three participants.

The design of the proposal aimed to generate a technology-mediated modeling process to conceptualize periodic functions from sound phenomena. For this purpose, the incorporation of technological tools such as Geogebra and Audacity was considered. This sequence is composed of four didactic situations whose objectives promote the achievement of the proposed research objective. The four situations were implemented in 6 sessions of 90 minutes each.

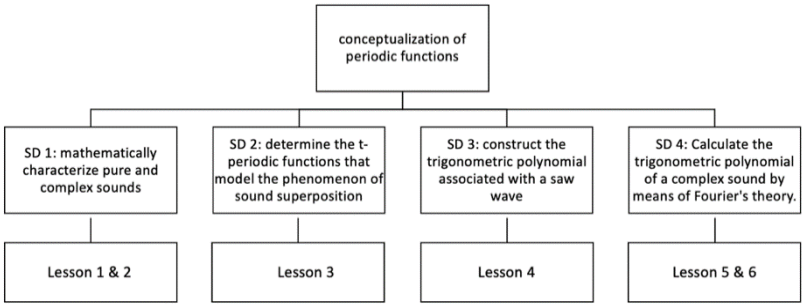


Figure 1. Objective of each didactic situation and lesson implemented

The data were extracted from the written productions of the preservice teacher and from the recording of the screen of the work computer of each of the groups when solving the proposed tasks. The data were analyzed from the theoretical tools provided by both theoretical frameworks with the objective of analyzing whether the groups develop a conceptualized mathematical work around periodic function. The results of one group of the case are presented below.

RESULTS

In this section, we will present the results obtained by G6 during the sequence of tasks proposed to conceptualize periodic functions.

Stage 1

To begin with the first lesson, students were given a folder containing twelve sounds and presented with the following task: "*Classify the sounds present in the given folder*". In this lesson, the students carried out an exploratory process, analyzing each sound and describing its characteristics. In these procedures performed by the students, we can identify the different phases of sound perception that allowed them to perform the requested classification, as it was foreseen in the a priori analysis, the groups were expected to focus on the four elements: pitch, timbre, loudness, and duration.

This group made a classification centered on the sonority and duration of each of the sounds proposed in the task, grouping them at first according to the pleasure they felt listening to each of these sounds. To carry out this analysis, G6 made a Cartesian plane in which they classified the sounds according to their preference.

In this process we recognize musical subactivities of recognition on the part of the students, since from the sonorous perception of each sound the students classify them. Although they first determine them in terms of taste, later they refine this classification by focusing on the duration, whether it is grave-pitched or acute-pitched.

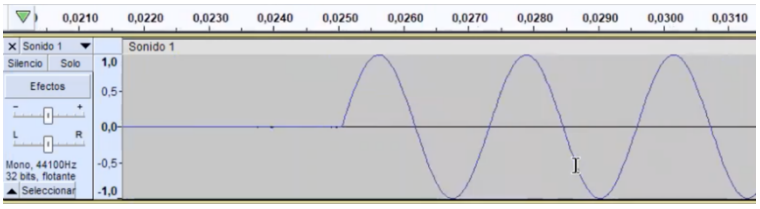


Figure 2. Graphical view of sound 1 in Audacity

At the beginning of lesson 2, the professor took up the classifications made by the different groups and presented the second task, the objective of which was: "to *mathematically determine the function that models each of these sounds*". The objective of this task is that the groups go through the mathematization phase, constructing the mathematical model that models each of the sounds reproduced.

At the beginning of session 2, the professor presented a tool to export the sound from Audacity in a double-entry table whose variables were time and amplitude. Although these tools were foreseen in the a priori analysis, the students did not use the tutorial document on the operation of the Audacity software.

In relation to the mathematical work developed by the group, we recognise that there is an activation of the [Sem - Dis] plane that allows this group to determine certain characteristics of the function that models the sound wave thanks to the visualisation of key elements in mathematical terms. This activation is facilitated by a semiotic-instrumental circulation in the Audacity software, since by using this software, the trainee teachers have access to key elements of the waveform that allow them to determine the period, frequency and amplitude.

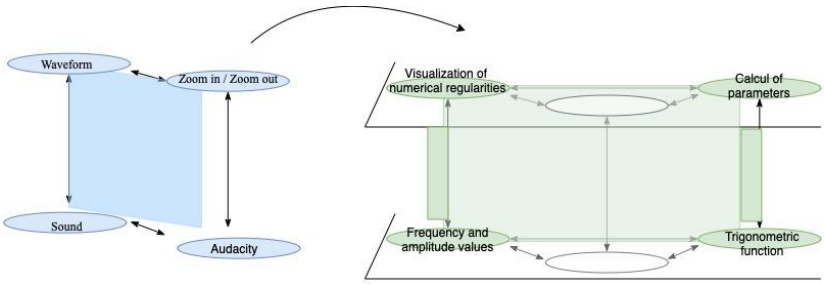


Figure 3. Circulation [Sem - Dis] favored by Audacity software

From the visualisation of the sound wave in Audacity, the data provided by this software that allows the group to determine the frequency of the sound from its period and their mathematical knowledge of trigonometric functions, G6 determined the function that models sound 1, from the value of the frequency that it had obtained (440 Hz) considered the amplitude equal to 1 and integrated the wave phase shift, from what

was visualized in the previous session and this one, obtaining the function: $\sin(880\pi x + 0.02506)$.

In relation to the mathematical work developed by the group, the trainee teachers' knowledge of periodicity and wave amplitude allowed them to build their mathematical model thanks to the instrumentalization of Audacity and GeoGebra software. The knowledge associated with trigonometric functions belonging to the theoretical reference frame of the personal MWS allowed them to determine the function that modeled the sound.

The mathematical work developed by the group is related with the A1 paradigm, since the trainee teachers only determine some specific values of the expected process such as frequency or sound period. The group did not perform the expected mathematical work in the a priori analysis and thanks to the interactions with the other groups in the sharing stage, they recognize how to calculate a function that models pure sounds.

Stage 2

At the beginning of the second stage, the professor asked the trainee teachers to build two pure sounds in Audacity, based on the knowledge formalised in the previous session. He then asked them to mix the two sounds to familiarise themselves with the Audacity tool. The professor presented the first task of the session "*build a 220 Hz sound with an amplitude of 1, then a 330 Hz sound with an amplitude of 0.8 and mix them. what is the function that determines the mix of sounds*?

From the phenomena of sound cancellation using hearing aids, one of the G6 members recognises that the function that models the sound mix is the sum of functions. From this established relationship, the GeoGebra trainee teachers graph each of the functions that model pure sounds and then add them together, comparing graphically whether this function models the sound mix. G6 determined that the function modeling the mixing of sounds was:

$f(x) = \sin(2\pi * 220x) + 0.8\sin(2\pi * 330x)$, afterwards, the professor asked them to calculate the period of the sound mix. The trainee teachers, using GeoGebra tools, locate two points that connect the function graphed with the x-axis, at the position where the wave completes a cycle.

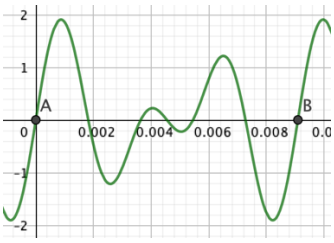


Figure 4. G6 strategy for calculating the period of the sound mix

After performing the first task, the professor presented a second task to the students, *"If we modify the frequency of 330 Hz by one of 440 Hz, what is the function that models*

the sound, what is its frequency?". In this task, the trainee teachers repeat the strategy performed previously, i.e., they recognize that the function modeling the new sound is the sum of the functions modeling both pure sounds, therefore, they determine that this is: $f(x) = \sin(2\pi * 220x) + 0.8\sin(2\pi * 440x)$

From this situation, G6 began to deduce that the frequency was related to the frequencies of each pure sound, in this case, the group considers that the frequency corresponds to be the difference between the values of the frequencies since for the first task the value was 110 Hz which corresponds to the difference between 330 Hz and 220 Hz, then in the second task the value of the frequency is 220 Hz and that again coincides with the difference between 440 Hz and 220 Hz, which reaffirms the hypothesis established by G6 in the first task.

Based on this hypothesis, the professor introduced the third task of the lesson, "*add a third sound of 660 Hz with an amplitude of 0.6 and then a fourth sound of 880 Hz with an amplitude of 0.4 to the mix. what is the function that models this sound?"*

The group correctly determined that the polynomial

$f(x) = \sin(2\pi * 220x) + 0.8\sin(2\pi * 440x) + 0.6\sin(2\pi * 660x) + 0.4\sin(2\pi * 880x)$

models the sum of the four mixed sounds, as predicted in the a priori analysis. We can conclude that the group used the strategies validated in question 1 to construct the polynomials that model these sounds, recognizing that the sound mix is the sum of these sounds.

In relation to the calculation of the frequency, the group determined the frequency of the trigonometric polynomial from the instrumental knowledge that allows them to replicate previous strategies, determining the period in GeoGebra from the intersection of the curve with the X-axis. This value of the frequency is the one expected in the a priori analysis. G6 determined that the frequency of the trigonometric polynomial is the greatest common divisor of the sounds and complemented the analysis of the frequencies of the sounds with the existing relationship between the amplitude of the sounds, this process was not free of difficulties and certain mediations made by the professor were necessary.

In relation to the mathematical work developed by G6, we recognise in this process the activation of the [Sem - Dis] plane, as from the visualisation of numerical regularities and the knowledge of number theory that the trainee teachers possess, they conclude that the greatest common divisor is 220. This process of checking the mathematical work is supported by a semiotic process mediated by the professor, in which they analyse how the frequency of a trigonometric polynomial varies if they change the frequency of 880 Hz for one of 770 Hz and, subsequently, by analysing the numerical regularities presented by the different frequencies when they write them as multiples of 220 Hz.

G6 performs a mathematical work inscribed in the A2 paradigm since they correctly determine the function that models the mix of sounds in each of the cases and subsequently, they correctly determine the regularity in the frequency of the trigonometric polynomials from a numerical analysis of the particular values of the frequency of each of the terms.

Third Stage

The lesson began by recalling the knowledge institutionalized in the previous lesson, in this sense, the professor proposed the following task: *"construct the trigonometric polynomial that models a sound with a fundamental of 220 Hz with its first three harmonics"*. In this task, the group explicitly determined the polynomial that models the sound, not only left expressed the function that models this trigonometric polynomial in a general way, but also represented it by identifying the harmonic in terms of $220 \times n$.

In this process, a musical recognition sub-activity is observed in which the group recognizes the first harmonics of a given fundamental frequency. In addition to the above, G6 correctly determines the sinusoidal function that models each of the harmonics of the fundamental, considering that the amplitude value is a parameter.

Subsequently, the professor proposed a second task *"create a complex sound by mixing pure sounds of frequencies 220 Hz, 311 Hz, 557 Hz and 929 Hz, with an amplitude of 1, 0.8, 0.6 and 0.4 respectively. what is the trigonometric polynomial that models this sound?"*.

G6, indicate that in the case of sound 1, it was constructed by a fundamental frequency and its harmonics, unlike sound 2 in which four frequencies were mixed without any numerical relation between them. Group correctly determined the polynomial that models this sound, the first strategy used by the group was to construct the sound using Audacity software to sonify the sound.

Subsequently, the professor presents a new artifact, which corresponds to a GeoGebra applet in which the additive synthesis process is observed in which the student can modify certain sliders to build complex sounds.

Determine the trigonometric polynomial that models a sound generated by a saw wave with a frequency of 220 Hz. Use Audacity for the construction of this sound". In this new task the students constructed the waveform in Audacity by varying the waveform parameter in the software. This strategy allowed students to visualize the waveform in Audacity and hear the sound produced by it. Subsequently, the trainee teachers, at the suggestion of the professor, used the GeoGebra applet presented above to vary the amplitude of certain harmonics to construct this waveform.

Based on these strategies performed by the students, the professor intervened and began with the students to set certain amplitude values for the first three harmonics. G6 identified the regularity present and constructed in the applet the sound wave that

models the sound and later determined the analytical expression that models the saw wave.

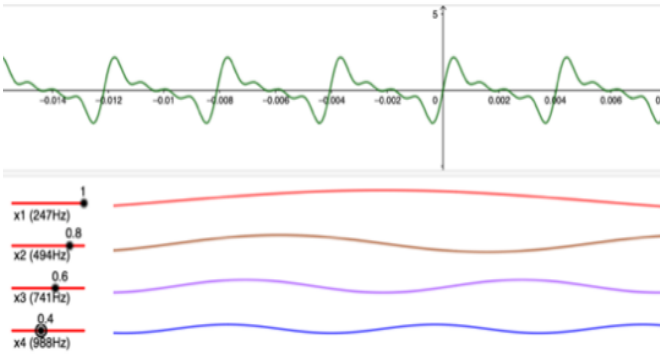


Figure 5. GeoGebra applet interface when fitting the sawtooth wave

In this process, trainee teachers perform a complete circulation in their personal MWS, since from the instrumentalization of the GeoGebra applet, students modify the amplitude values visualizing different waveforms as harmonics are added, this sound wave approaches the saw wave from the addition of harmonics. The value of each harmonic is determined from the search for numerical regularities based on the knowledge of successions belonging to the theoretical reference frame of the students' personal MWS. Once the trainee teachers determine the amplitude values for each harmonic, they determine the analytical expression that describes the trigonometric polynomial that models the saw wave. In this process of representing the trigonometric polynomial, students use their knowledge of series and trigonometry.

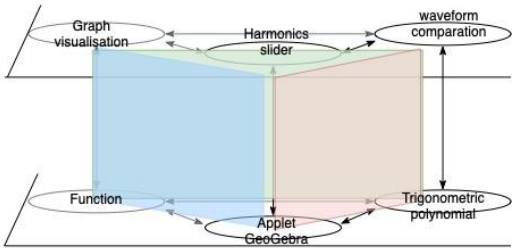


Figure 6. Complete circulation of students' personal MWS when determining the function

From the mathematical knowledge developed in these three stages, the professor institutionalized Fourier's theorem, pointing out that "any periodic function can be expressed as the sum of a series of sinusoids".

At this stage, the mathematical work of the group is inscribed within the A2 paradigm. At first, they are able to correctly calculate the trigonometric polynomial that models a harmonic and inharmonic sound, however, they are not able to determine the trigonometric polynomial that models the saw wave, which is finally calculated from the group sharing and the mediations of the professor. From these, the group adjusts the applet and validates the trigonometric polynomial sonically.

Stage 4

The stage began with a reminder of the knowledge institutionalized in the previous lesson and professor presented the task: "*On the desktop of your computer there is a folder with two sounds: one of a flute and the other of a violin. Choose one of the sounds available in the folder and determine the trigonometric polynomial that models it".*

G6 decided to work with the violin wave, whose graphical representation is shown in the following figure. The group recognizes certain characteristics of the wave that stress their analysis of the model, because the wave presents small differences between periods since it is a real phenomenon and there are certain environmental factors that modify the theoretical behavior.

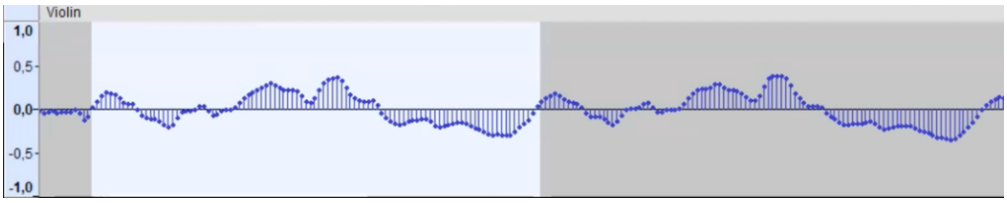


Figure 7. Violin sound wave analyzed in Audacity thanks to the zoom tool

The trainee teachers calculated the period of the sound wave from the Audacity instrumentation in which they obtained a period of $t = 0.0025\ s$. From this period, G6 obtains a value of 400 Hz to the theoretical value of the sound, which was 440 Hz, this difference is due to the interval calculated on Audacity, since, due to the behavior of the sound wave, it became complex to perform this calculation.

Once the groups determined the period and frequency of the sounds, they began to replace these values in the Fourier series formula to calculate the Fourier coefficients for the construction of the trigonometric polynomial. All five groups had difficulties in determining the function $f(t)$ that represents the analyzed signal due to the nature of the proposed task. During the lesson, all the groups left the Fourier coefficients expressed in terms of the function $f(t)$ given the difficulty they had in determining it. In relation to the mathematical work of the students, we can observe that, from the calculation of the period and frequency in Audacity, the students activate the instrumental genesis from the knowledge of the Fourier series formula as a symbolic artifact in which they replace the values obtained.

Once the students and the professor discuss with the students how to determine the function $f(t)$. Once they have exported the numerical data from the sound to a spreadsheet, they set up the Excel spreadsheet to calculate the values.

	A	B	C	D	E	F
1	tiempo	amplitud		suma superior		área total
2	0	0,09416		3,1066000E-06		1,4741000E-06
3	0,00002	0,15533		0,000005931		
4	0,00005	0,1977		3,8016E-06		
5	0,00007	0,19008		3,4628E-06		
6	0,00009	0,17314		2,6626E-06		

Figure 8. Configuration of the Excel spreadsheet by G6

We recognize the activation of the [Ins - Dis] plane since the process of constructing the Riemann sum in Excel is based on the knowledge about integrals belonging to the student's theoretical reference frame. Therefore, the Excel spreadsheet is transformed into an artifact that allows the calculation of the different Fourier coefficients from the conversion of the definite integral into a Riemann sum.

G6 correctly calculates the Fourier coefficients in the Excel spreadsheet and then enters them in GeoGebra, as expected in the a priori analysis. Once the trainee teachers had used the Excel spreadsheet to determine the Fourier coefficients, they calculated the first five Fourier coefficients, determined the trigonometric polynomial and plotted it in GeoGebra, obtaining the function shown in the following figure. G6 adjusts the gradient of the axes to analyze if the curve is similar to the one seen in the Audacity interface. The students indicate that it is a good approximation since they have a similar waveform.

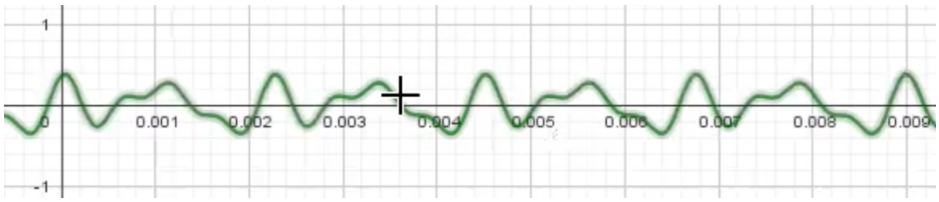


Figure 9. Trigonometric polynomial constructed with the first five coefficients

Once the curve was obtained, the students visualized what this behavior looked like by comparing it with the Audacity representation of the wave. To validate their model, the group copied the Audacity curve onto a white sheet of paper and superimposed it on their computer screen, where the GeoGebra interface was located. The students validated their model by superimposing graphs.

In relation to the mathematical work developed by the group during their process of calculating Fourier coefficients and subsequent graphing of the trigonometric polynomial, we conclude that Excel is an artifact that allows calculating Fourier coefficients effectively through proper programming of the spreadsheet. The formula for calculating the coefficients of a symbolic artifact that is entered into Excel as a Riemann sum allows G6 to obtain coefficients, in this process we recognize an activation of the plane [Sem - Ins]. On the other hand, the visualization of the curve in GeoGebra and its graphical confrontation with that of Audacity becomes a pragmatic testing process through which students validate their model; we recognize in this process the activation of the [Sem - Dis] plane.

CONCLUSION

We can conclude from the mathematical work and the mathematical activities developed by G6 in this session that the concept of Fourier series is at a mobilizable level for trainee teachers. The group determined the first Fourier coefficients and entered the polynomial into GeoGebra, validating this model and, therefore, determining that it can still be adjusted by calculating more coefficients, a process that they were able to perform and obtain a polynomial that fits precisely.

In the last stage, mathematical work is observed that transits between the A2 and A3 paradigms. The group correctly calculates the Fourier coefficients and determines the trigonometric polynomial that models the chosen sound from the coefficients up to the fifth position. By validating this model, the trainee teachers recognize that while it converges to the sound wave studied, it is possible by calculating more coefficients to better fit the wave. This knowledge of convergence allows them to continue with the calculations and obtain four more coefficients, which visually indicates that they have a better approximation.

From the mathematical work done, G6 conceptualises trigonometric functions as those that model pure sounds and trigonometric polynomials as those that model complex sounds, whose frequency is the MCD of the mixed frequencies. The concepts of period and frequency allow different polynomials to be constructed and, from Fourier theory, to model sounds of a musical instrument.

REFERENCES

Artigue, M. (1995). Ingeniería didáctica. *Ingeniería didáctica en educación matemática*, 33-60.

Buendía, G. (2006) Una socioepistemología del aspecto periódico de las funciones. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 9*(2), 227-251.

Demir, Ö., & Heck, A. (2013). A new learning trajectory for trigonometric functions. In E. Faggiano, & A. Montone (Eds.), *Proceedings of ICTMT11* (pp. 119-124). University of Bari.

Kuzniak, A., Montoya-Delgadillo, E., & Richard, P.R. (2022). *Mathematical Work in Educational Context: The Perspective of the Theory of Mathematical Working Spaces*. Springer Publishing. doi.org/10.1007/978-3-030-90850-8.

Kepceoğlu, I., &Yavuz, I. (2016). Teaching a concept with GeoGebra: Periodicity of trigonometric functions. *Educational Research and Reviews, 11*(8), 573-581

Moore, K. C. (2013). Making sense by measuring arcs: A teaching experiment in angle measure. *Educational Studies in Mathematics, 83*(2), 225-245.

Prediger, S. & Bikner – Ahsbahs, A. (2014) Introduction to networking: networking strategies and their background. In A. Bikner-Ahsbahs & S. Prediger (Eds.), and the Networking Theories Group: Networking of Theories as a Research Practice in

Mathematics Education (pp. 117-125). Series Advances in Mathematics Education. New York, Heidelberg *et al.*: Springer,

Tuna A. (2013). A conceptual analysis of the knowledge of prospective mathematics teachers about degree and radian. *World Journal of Education, 3*(4), 1-9.

Vandebrouck, V. (2024). Bifurcation génetique dans les ETM personnels. In Derouet, C., Nechache, A., Richard, P. R., Vivier, L., Gómez-Chacón, I. M., Kuzniak, A., Maschietto, M., & Montoya Delgadillo, E. (2024). Actes du septième symposium d'Étude sur le Travail Mathématique (2ème édition). IREM de Strasbourg.

Vergnaud, G. (1991). Langage et pensée dans l'apprentissage des mathématiques. Revue française de pédagogie, 96, 79 - 86.

TEMA 2. ESTUDIO DE LOS SIGNOS, LAS HERRAMIENTAS Y EL DISCURSO, Y DE LA EVOLUCIÓN DINÁMICA DE SUS INTERACCIONES MUTUAS EN EL TRABAJO MATEMÁTICO

Michela Maschietto[1], Ferdinando Arzarello[2],
Jorge Gaona[3], Rosa Elvira Páez Murillo[4]

[1]Università degli Studi di Modena e Reggio Emilia (Italia)
[2]Università di Torino (Italia)
[3]Universidad de Playa Ancha (Chile)
[4]Universidad Autónoma de la Ciudad de México (México)

INTRODUCCIÓN

Este tema se enfoca en el estudio de las herramientas promotoras del trabajo matemático, los signos que emergen en el desarrollo de la tarea y su relación con el discurso. La atención se centra en sus evoluciones y sus interacciones en el trabajo matemático, más allá de las cuestiones ya abordadas en simposios anteriores sobre sus génesis y coordinación.

COMUNICACIONES

En este grupo se reflexionó alrededor de las siguientes ocho comunicaciones

Título de la presentación	Autor(es)	Institución	País
Espacio de trabajo matemático personal de profesores de matemática en formación inicial ante el estudio de la geometría 3d mediante el uso de artefactos tecnológicos	Fabiola Arévalo-Meneses, Elizabeth Montoya-Delgadillo	Pontificia Universidad Católica de Valparaíso	Chile
Sessions de laboratoire avec les machines mathématiques pour les transformations géométriques au collège	Beatrice Battilani, Michela Maschietto	Università di Modena e Reggio Emilia	Italia
Contrepoint technologique et contrôle du référentiel dans le travail mathématique instrumenté	Eloï Danguy-Pichette, Philippe R. Richard	Université de Montréal	Canadá
Tâches ouvertes dans un environnement numérique pour le développement de l'ETM collectif	Jorge Gaona, Catalina Bezama Palacios, Leonard Sánchez	Universidad de Playa Ancha, LDAR Université Paris Cité	Chile / Francia

Título de la presentación	Autor(es)	Institución	País
Émergence de l'art de l'argumentation : l'instrumentation de l'IA dans la formation des enseignants de mathématiques	Itziar García-Honrado, Josep Maria Fortuny-Aymemi, Tomás Recio, Philippe R. Richard	Universidad de Oviedo, Universitat Autònoma de Barcelona, Universidad Antonio de Nebrija, Université de Montréal	España / Canadá
De la page au code : comment explorer les récits issus de la littérature de jeunesse à travers la lentille mathématique et littéraire, de la théorie des graphes à l'algorithmique créative	Dominique Laval	CY Cergy Paris Université – INSPE de l'académie de Versailles	Francia
El estudio de la relación funcional entre recorrido y distancia, en un contexto de manipulación con artefactos materiales	Rosa-Elvira Páez, Miguel Delgado, Judith Hernández, Magally Martínez	Universidad Autónoma de la Ciudad de México, Universidad Nacional de Educación a Distancia, Universidad Autónoma de Zacatecas, Universidad Autónoma del Estado de México	México/ España
Analyse d'une ingénierie didactique articulant activités mathématiques et algorithmiques -étude des formes et fonctions des raisonnements des élèves	Maryna Rafalska, Patrick Gibel	LINE, Université Côte d'Azur, LAB-E3D, Université de Bordeaux	Francia

SÍNTESIS

El trabajo que se presentó en las comunicaciones se agrupa en los siguientes aspectos:

Uso de artefactos materiales (tangibles)

Los artefactos materiales (tangibles) desempeñaron un papel central en la activación tanto de la génesis semiótica como de la instrumental, especialmente en contextos de trabajo manipulativo o de visualización tridimensional. En el caso del juego "Tri de cartes", diseñado y presentado por Maryna Rafalska y Patrick Gibel, los estudiantes debían ordenar un conjunto de cartas dispuestas en una cuadrícula, lo que los llevó a elaborar algoritmos de clasificación a partir de operaciones básicas restringidas como voltear, comparar y reponer. En la investigación de Fabiola Arévalo y Elizabeth Montoya sobre geometría 3D, se introdujo inicialmente una estructura de bloques manipulativa que permitía a los futuros profesores interactuar corporalmente con la figura y determinar coordenadas desde diferentes perspectivas. Posteriormente, en un rediseño de la situación didáctica, se incorporaron naranjas modeladas como esferas para propiciar la génesis discursiva: los estudiantes debían realizar un corte e identificar intuitivamente la forma de la intersección, apoyándose en instrumentos de medición. En el estudio de Rosa Páez, Miguel Delgado, Judith Hernández y Magally Martínez sobre relación funcional, los artefactos empleados fueron hojas blancas y una regla, con los cuales los estudiantes construyeron un cuadrado a partir de pliegues y luego realizaron un trabajo de medición, generando sus propios conjuntos de datos experimentales para analizar la variación funcional. Por último, en el contexto de las máquinas matemáticas trabajadas por Beatrice Battilani y Michela Maschietto, el objetivo de la tarea era que los estudiantes determinaran la transformación geométrica que la máquina realizaba sobre el plano. El trabajo metodológico se desarrolló en pequeños grupos, apoyados por fichas de trabajo estructuradas que incluían preguntas específicas para guiar la exploración (¿Cómo está hecha? ¿Qué hace? ¿Cómo funciona? ¿Por qué?). El uso de este artefacto permitió activar la génesis semiótica, al interpretar los signos producidos (identificar la figura geométrica como un rombo o un cuadrado), y la génesis instrumental, tanto en la producción de dibujos simétricos como en la construcción cognitiva de la máquina como instrumento de acción.

Uso de artefactos digitales

Los artefactos tecnológicos, en particular la Inteligencia Artificial (IA), el software de Geometría Dinámica (SGD), o motores de videojuegos como Scrath, son fundamentales para abordar fenómenos como el control del referencial, la hibridación, la validación y el trabajo colectivo. En el marco de la investigación sobre geometría tridimensional de Arévalo-Meneses y Montoya-Delgadillo, ChatGPT se incorporó como un nuevo artefacto en la fase posterior al piloto, permitiendo a los futuros profesores interactuar con la IA para contrastar y evaluar la validez de la información sobre la intersección de esferas, lo que promovió procesos de justificación y prueba. Por otra parte, Richard y colaboradores, exploraron la interacción entre IA generativa (ChatGPT, Gemini) e IA simbólica (GeoGebra Discovery), bajo el concepto de

contrapartida tecnológica. La primera se empleó en la formulación de hipótesis y el análisis cualitativo, mientras que la segunda se reservó para la comprobación rigurosa de propiedades; en este contexto, el uso de ChatGPT-4-omni, personalizado como GPT_p, permitió examinar cómo la integración de una base de conocimientos controlada (RAME) podía estabilizar el referencial de la IA generativa. Asimismo, Laval en un estudio interdisciplinario, integra procesos algorítmicos y de programación haciendo uso de Scratch para que estudiantes de primaria pasen de una lectura e interpretación de cuentos infantiles clásicos a una interacción activa con los personajes, y el desarrollo de la historia infantil.

En relación con los entornos de GeoGebra, se destacó su uso en diversas investigaciones: como applet 3D en la fase piloto de geometría, donde los estudiantes articularon vistas 2D y 3D para determinar coordenadas y, más adelante, para validar resultados obtenidos mediante ChatGPT (Arévalo-Meneses y Montoya-Delgadillo); como recurso docente en el aula, para graficar funciones lineales y afines proyectadas en el pizarrón a partir de datos del trabajo colectivo en el trabajo de Jorge Gaona, Catalina Palacios y Leonard Sánchez; y como apoyo en el estudio de relaciones funcionales, previsto en actividades que buscaban graficar expresiones algebraicas propuestas por estudiantes (Páez y colaboradores). La versión GeoGebra Discovery, presentada por Itziar García-Honrado, Josep Maria Fortuny-Aymemi, Tomás Recio y Philippe R. Richard, permitió además integrar razonamiento automatizado mediante comandos como Relation, Proof o EquationLieu, consolidando su potencial como tutor inteligente para la exploración y validación en geometría. Finalmente, se presentan los sistemas de evaluación en línea que se utilizan como plataforma para proponer tareas abiertas (con infinitas soluciones) sobre funciones, posibilitando múltiples intentos, retroalimentación personalizada y generación automática de calificaciones. Las tareas abiertas y la dirección de las y los profesores a cargo permitió la emergencia de un trabajo matemático colectivo.

Aspectos metodológicos

El diseño de las situaciones didácticas se enmarcó en la Ingeniería Didáctica, con atención especial a las variables didácticas y a la búsqueda de idoneidad del entorno de aprendizaje. En particular, la idoneidad en la integración de la Inteligencia Artificial (IA) se concibió como un principio rector, orientado a optimizar la convergencia entre el referencial y las respuestas de la IA (Richard y colaboradores). En la investigación de geometría tridimensional, el diseño iterativo permitió que los resultados de un piloto inicial —donde la tarea no favorecía la génesis discursiva— condujeran a un rediseño que incorporó objetos concretos (naranjas/esferas) y la interacción con ChatGPT, ilustrando un proceso de ajuste adaptativo propio del research design (Arévalo-Meneses y Montoya-Delgadillo). De manera análoga, en el ámbito de las máquinas matemáticas, la adaptación de artefactos implicó revisar fichas y reformular preguntas para hacerlas más accesibles a un nuevo nivel escolar, además de incluir material auxiliar como plantillas que facilitaran el dibujo (Battilani y Maschietto).

En cuanto a los objetivos didácticos de los diseños, varios trabajos coincidieron en fomentar procesos matemáticos específicos. El desarrollo del trabajo colectivo fue central en el diseño de tareas abiertas apoyadas en plataformas de evaluación en línea, cuyo propósito era configurar un Espacio de Trabajo Matemático (ETM) colectivo. En el trabajo de Gaona y colaboradores, la plataforma de evaluación permitió múltiples intentos, retroalimentación personalizas, generando compromiso y confianza a través de la validación de sus las respuestas de los estudiantes. La dinámica de alternar fases en binomios y fases colectivas posibilitó que las diferentes respuestas alimentaran discusiones guiadas por la docente, de las cuales emergió progresivamente la noción de funciones lineales y afines. En paralelo, el objetivo de desarrollar el pensamiento computacional orientó el diseño de la situación "Tri de cartes", articulando actividades matemáticas y algorítmicas a través de una secuencia de juegos con variables didácticas controladas. La variación de estas condiciones forzó a los estudiantes a pasar de estrategias particulares a métodos generales de clasificación, conduciendo a la construcción y análisis de algoritmos eficientes (Rafalska y Gibel). En esta misma dirección, el estudio de Laval que corresponde a un enfoque interdisciplinario combinas matemáticas, algoritmos y literatura para fomentar un aprendizaje global e integrado.

Asimismo, el estudio de la hibridación de la IA introdujo el concepto de contrapartida tecnológica, articulando la IA generativa y la IA simbólica bajo control humano. En este marco, la IA generativa (ChatGPT) se empleó para contrastar información en geometría 3D, promoviendo justificación y prueba, mientras que la IA simbólica (GeoGebra Discovery) permitió la validación formal (García-Honrado y colaboradores). Finalmente, los diseños orientados al pensamiento funcional y covariacional promovieron la construcción de las nociones de variación y dependencia. En la propuesta de Páez, los estudiantes generaron datos propios con hojas y reglas para analizar la relación entre recorrido y distancia, mientras que el debate científico grupal facilitó la consolidación de la noción de variación funcional (Páez y colaboradores).

Originalidad de las tareas propuestas

Un aspecto a destacar es la originalidad de varias de las tareas y situaciones presentadas. Algunas propuestas retomaron contextos más clásicos, como la geometría 3D (Arévalo-Meneses y Montoya), la relación funcional (Páez y colaboradores) y las funciones lineales y afines (Gaona y colaboradores). Otras buscaron innovar mediante su conexión con juegos, como la situación "Tri de cartes" que obligaba a construir algoritmos de clasificación (Rafalska & Gibel, 2025). O conexiones con la literatura juvenil como el trabajo de Laval en el que la aplicación de la Teoría de Grafos y la introducción del pensamiento algorítmico enriquece su comprensión y análisis de estos cuentos juveniles. También se estableció vínculos con el arte, como en la actividad que exploró la obra Composition arithmétique (1929-1930) de Théo Van Doesburg, utilizada para articular argumentación matemática en un contexto artístico-geométrico,

apoyándose en la hibridación de IA generativa y GeoGebra Discovery (Richard & García-Honrado, 2025).

Aspectos teóricos

Las ideas desarrolladas constituyen el núcleo de la reflexión teórica del Tema 2 del ÉTM8, centradas en la evolución del trabajo matemático frente a la emergencia de nuevos artefactos y en la articulación entre los distintos marcos teóricos que orientan la investigación.

En primer lugar, se observa un desplazamiento del trabajo instrumental hacia la visualización y el discurso, en la medida en que los estudiantes transitan desde la manipulación inicial de los artefactos hacia otras dimensiones del Espacio de Trabajo Matemático (ETM). Este desplazamiento se manifiesta, por un lado, hacia la visualización (génesis semiótica), como en el caso de la geometría 3D, donde los futuros profesores, al manipular bloques o utilizar la rotación en GeoGebra 3D, tendían a proyectar las imágenes tridimensionales en vistas bidimensionales para poder operar con mayor claridad. Por otro lado, se buscó propiciar el movimiento hacia el discurso (génesis discursiva), orientado a la justificación y la prueba. Así ocurrió en el rediseño de la tarea de geometría 3D, donde la integración de ChatGPT tuvo como propósito explícito promover la validación discursiva (Arévalo-Meneses y Montoya-Delgadillo). De manera análoga, en el estudio de la relación funcional, si bien se activó la génesis discursiva, esta se mantuvo anclada al control instrumental, apoyada en la medición con artefactos materiales como la regla (Páez y colaboradores).

En segundo lugar, el diseño de las tareas se apoyó en múltiples marcos teóricos, destacando la Teoría de Situaciones Didácticas (TSD) y el propio ETM a través de su digrama. En la investigación sobre la relación funcional, las actividades se estructuraron como exploraciones guiadas seguidas de un debate científico, en línea con la TSD (Rafalska y Gibel; Páez y colaboradores). En el caso de los juegos algorítmicos, la propuesta “Tri de cartes” se diseñó bajo la lógica de la Ingeniería Didáctica de Desarrollo, que a su vez se fundamenta en la TSD, considerando el carácter adidáctico de la situación y los distintos niveles de medio (Rafalska & Gibel, 2025).

En tercer lugar, emergen trazas de un trabajo prospectivo de networking entre marcos teóricos. En este sentido, el trabajo con máquinas matemáticas se diseñó bajo la Teoría de la Mediación Semiótica, cercana a enfoques vygotskianos y a la TSD, pero se analizó posteriormente con el ETM, evidenciando la necesidad de profundizar la articulación entre ambos marcos (Battilani y Maschietto). De manera similar, la investigación de Rafalska y Gibel mostró la integración de la TSD en el diseño adidáctico con un modelo de análisis de razonamientos que conecta las funciones del razonamiento con los niveles de medio, estableciendo puentes entre el diseño de situaciones y el análisis cognitivo desde el ETM. En esta misma línea, la inclusión de la teoría de grafos, en el trabajo de Laval es útil en el marco del experimento educativo

para representar las redes en forma de grafos, donde los personajes del cuento se representan por un nodo y sus interacciones por una arista.

Las investigaciones han permitido identificar conceptos emergentes que enriquecen el ETM. Entre ellos, el ETM colectivo (Gaona y colaboradores) se plantea como un espacio donde las nociones matemáticas no se constituyen únicamente a partir de los ETM personales, sino que emergen de la interacción entre aportaciones individuales y la mediación docente. El nuevo trabajo matemático, propuesto por Richard y colaboradores, subraya la transformación del trabajo ante la integración de la IA y otros artefactos digitales, lo que redefine la interacción entre dimensiones semiótica, instrumental y discursiva. En este marco, la noción de control adquiere centralidad: control semiótico, discursivo y/o instrumental, necesarios para garantizar la validez y rigurosidad en la interacción humano-máquina. El estudio de la hibridación entre IA generativa y simbólica, en particular la experiencia con GPT_p y GeoGebra Discovery, ilustra cómo el control resulta esencial para estabilizar el referencial (Danguy-Pichette y Richard). Así mismo, en la continuidad del trabajo de ETM, se estructura el trabajo algorítmico a través de los Espacios de Trabajo Algorítmico (ETA) y los Espacios de Trabajo Conectados que se proponen en trabajo de Laval.

THÈME 2. ÉTUDE DES SIGNES, DES OUTILS ET DU DISCOURS, ET DE L'ÉVOLUTION DYNAMIQUE DE LEURS INTERACTIONS MUTUELLES DANS LE TRAVAIL MATHÉMATIQUE

Michela Maschietto[1], Ferdinando Arzarello[2], Jorge Gaona[3], Rosa Elvira Páez Murillo[4]

[1]Università degli Studi di Modena e Reggio Emilia (Italie)
[2]Università di Torino (Italie)
[3]Universidad de Playa Ancha (Chili)
[4]Universidad Autónoma de la Ciudad de México (Mexique)

INTRODUCTION

Ce thème se consacre à l'étude des outils du travail mathématique, des signes associés et de leurs rapports au discours. L'attention porte sur leurs évolutions et leurs interactions dans le travail mathématique, au-delà des questions déjà abordées dans les symposiums précédents, concernant les genèses et leurs coordinations.

COMMUNICATIONS

Ce groupe a réfléchi aux huit communications suivantes

Titre de la communication	Auteur(s)	Institution	Pays
Espacio de trabajo matemático personal de profesores de matemática en formación inicial ante el estudio de la geometría 3d mediante el uso de artefactos tecnológicos	Fabiola Arévalo-Meneses, Elizabeth Montoya-Delgadillo	Pontificia Universidad Católica de Valparaíso	Chili
Sessions de laboratoire avec les machines mathématiques pour les transformations géométriques au collège	Beatrice Battilani, Michela Maschietto	Università di Modena e Reggio Emilia	Italie
Contrepoint technologique et contrôle du référentiel dans le travail mathématique instrumenté	Eloï Danguy-Pichette, Philippe R. Richard	Université de Montréal	Canada
Tâches ouvertes dans un environnement numérique pour le développement de l'ETM collectif	Jorge Gaona, Catalina Bezama Palacios, Leonard Sánchez	Universidad de Playa Ancha, LDAR Université Paris Cité	Chili / France

Titre de la communication	Auteur(s)	Institution	Pays
Émergence de l'art de l'argumentation : l'instrumentation de l'IA dans la formation des enseignants de mathématiques	Itziar García-Honrado, Josep Maria Fortuny-Aymemi, Tomás Recio, Philippe R. Richard	Universidad de Oviedo, Universitat Autònoma de Barcelona, Universidad Antonio de Nebrija, Université de Montréal	Espagne / Canada
De la page au code : comment explorer les récits issus de la littérature de jeunesse à travers la lentille mathématique et littéraire, de la théorie des graphes à l'algorithmique créative	Dominique Laval	CY Cergy Paris Université – INSPE de l'académie de Versailles	France
El estudio de la relación funcional entre recorrido y distancia, en un contexto de manipulación con artefactos materiales	Rosa-Elvira Páez, Miguel Delgado, Judith Hernández, Magally Martínez	Universidad Autónoma de la Ciudad de México, Universidad Nacional de Educación a Distancia, Universidad Autónoma de Zacatecas, Universidad Autónoma del Estado de México	Mexique/ Espagne
Analyse d'une ingénierie didactique articulant activités mathématiques et algorithmiques -étude des formes et fonctions des raisonnements des élèves	Maryna Rafalska, Patrick Gibel	LINE, Université Côte d'Azur, LAB-E3D, Université de Bordeaux	France

SYNTHÈSE

Les travaux présentés dans les communications sont regroupés selon les aspects suivants :

Utilisation des artefacts matériels (tangibles)

Les artefacts matériels (tangibles) ont joué un rôle central dans l'activation tant de la genèse sémiotique que de la genèse instrumentale, en particulier dans les contextes de travail manipulatif ou de visualisation tridimensionnelle. Dans le cas du jeu « Tri de cartes », conçu et présenté par Maryna Rafalska et Patrick Gibel, les élèves devaient classer un ensemble de cartes disposées sur une grille, ce qui les a amenés à élaborer des algorithmes de classement à partir d'opérations de base restreintes telles que retourner, comparer et replacer. Dans la recherche de Fabiola Arévalo et Elizabeth Montoya sur la géométrie 3D, une structure de blocs manipulables a d'abord été introduite, permettant aux futurs enseignants d'interagir physiquement avec la figure et de déterminer des coordonnées à partir de différentes perspectives. Par la suite, lors d'une refonte de la situation didactique, des oranges modelées en forme de sphères ont été incorporées afin de favoriser la genèse discursive : les élèves devaient effectuer une coupe et identifier intuitivement la forme de l'intersection, à l'aide d'instruments de mesure. Dans l'étude de Rosa Páez, Miguel Delgado, Judith Hernández et Magally Martínez sur la relation fonctionnelle, les artefacts utilisés étaient des feuilles blanches et une règle, avec lesquelles les élèves ont construit un carré à partir de plis, puis ont effectué un travail de mesure, générant leurs propres ensembles de données expérimentales pour analyser la variation fonctionnelle. Dans le contexte des machines mathématiques travaillées par Beatrice Battilani et Michela Maschietto, l'objectif de l'activité était que les élèves déterminent la transformation géométrique que la machine effectuait sur le plan. Le travail méthodologique s'est déroulé en petits groupes, à l'aide de fiches de travail structurées comprenant des questions spécifiques pour guider l'exploration (Comment est-elle faite ? Que fait-elle ? Comment fonctionne-t-elle ? Pourquoi ?). L'utilisation de cet artefact a permis d'activer la genèse sémiotique, en interprétant les signes produits (identifier la figure géométrique comme un losange ou un carré), et la genèse instrumentale, tant dans la production de dessins symétriques que dans la construction cognitive de la machine comme instrument d'action.

Utilisation des artefacts technologiques

Les artefacts technologiques, en particulier l'intelligence artificielle (IA), les logiciels de géométrie dynamique (SGD) ou les moteurs de jeux vidéo tels que Scrath, sont essentiels pour aborder des phénomènes tels que le contrôle du référentiel, l'hybridation, la validation et le travail collectif. Dans le cadre des recherches sur la géométrie tridimensionnelle menées par Arévalo-Meneses et Montoya-Delgadillo, ChatGPT a été intégré comme nouvel outil dans la phase post-pilote, permettant aux futurs enseignants d'interagir avec l'IA afin de vérifier et d'évaluer la validité des informations sur l'intersection des sphères, ce qui a favorisé les processus de justification et de vérification. D'autre part, Richard et ses collaborateurs ont exploré

l'interaction entre l'IA générative (ChatGPT, Gemini) et l'IA symbolique (GeoGebra Discovery), sous le concept de contrepartie technologique. La première a été utilisée pour la formulation d'hypothèses et l'analyse qualitative, tandis que la seconde a été réservée à la vérification rigoureuse des propriétés ; dans ce contexte, l'utilisation de ChatGPT-4-omni, personnalisé sous le nom de GPTp, a permis d'examiner comment l'intégration d'une base de connaissances contrôlée (RAME) pouvait stabiliser le référentiel de l'IA générative. De même, Laval, dans une étude interdisciplinaire, intègre des processus algorithmiques et de programmation à l'aide de Scratch afin que les élèves du primaire passent de la lecture et de l'interprétation de contes classiques pour enfants à une interaction active avec les personnages et au développement de l'histoire pour enfants.

En ce qui concerne les environnements GeoGebra, leur utilisation dans diverses recherches a été mise en avant : comme applet 3D dans la phase pilote de géométrie, où les participants ont articulé des vues 2D et 3D pour déterminer des coordonnées et, plus tard, pour valider les résultats obtenus à l'aide de ChatGPT (Arévalo-Meneses et Montoya-Delgadillo) ; comme ressource pédagogique en classe, pour représenter graphiquement des fonctions linéaires et apparentées projetées au tableau à partir de données issues du travail collectif dans les travaux de Jorge Gaona, Catalina Palacios et Leonard Sánchez ; et comme support dans l'étude des relations fonctionnelles, prévu dans des activités visant à représenter graphiquement des expressions algébriques proposées par les étuidants (Páez et collaborateurs). La version GeoGebra Discovery, présentée par Itziar García-Honrado, Josep Maria Fortuny-Aymemi, Tomás Recio et Philippe R. Richard, a également permis d'intégrer un raisonnement automatisé à l'aide de commandes telles que Relation, Proof ou EquationLieu, consolidant ainsi son potentiel en tant que tuteur intelligent pour l'exploration et la validation en géométrie. Enfin, les systèmes d'évaluation en ligne sont présentés comme une plateforme permettant de proposer des tâches ouvertes (avec des solutions infinies) sur les fonctions, permettant de multiples tentatives, un retour personnalisé et la génération automatique de notes. Les tâches ouvertes et l'encadrement des enseignants ont permis l'émergence d'un travail mathématique collectif.

Aspects méthodologiques

La conception des situations didactiques s'inscrit dans le cadre de l'ingénierie didactique, avec une attention particulière portée aux variables didactiques et à la recherche d'un environnement d'apprentissage adapté. En particulier, l'adéquation de l'intégration de l'intelligence artificielle (IA) a été conçue comme un principe directeur, visant à optimiser la convergence entre le référentiel et les réponses de l'IA (Richard et collaborateurs). Dans la recherche sur la géométrie tridimensionnelle, la conception itérative a permis aux résultats d'un projet pilote initial — où la tâche ne favorisait pas la genèse discursive — de conduire à une refonte qui a intégré des objets concrets (oranges/sphères) et l'interaction avec ChatGPT, illustrant un processus d'ajustement adaptatif propre à la conception de la recherche (Arévalo-Meneses et Montoya-Delgadillo). De manière analogue, dans le domaine des machines mathématiques,

l'adaptation des artefacts a impliqué la révision des fiches et la reformulation des questions afin de les rendre plus accessibles à un nouveau niveau scolaire, ainsi que l'inclusion de matériel auxiliaire tel que des patrons facilitant le dessin (Battilani et Maschietto).

En ce qui concerne les objectifs didactiques des conceptions, plusieurs travaux ont convergé vers la promotion de processus mathématiques spécifiques. Le développement du travail collectif a été au cœur de la conception de tâches ouvertes s'appuyant sur des plateformes d'évaluation en ligne, dont l'objectif était de configurer un espace de travail mathématique (ETM) collectif. Dans les travaux de Gaona et ses collaborateurs, la plateforme d'évaluation a permis de multiples tentatives et des retours personnalisés, générant engagement et confiance grâce à la validation des réponses des étudiants. La dynamique consistant à alterner des phases en binômes et des phases collectives a permis aux différentes réponses d'alimenter des discussions guidées par l'enseignant, d'où a progressivement émergé la notion de fonctions linéaires et affines. Parallèlement, l'objectif de développer la pensée computationnelle a orienté la conception de la situation « Tri de cartes », articulant des activités mathématiques et algorithmiques à travers une séquence de jeux avec des variables didactiques contrôlées. La variation de ces conditions a contraint les élèves à passer de stratégies particulières à des méthodes générales de classification, conduisant à la construction et à l'analyse d'algorithmes efficaces (Rafalska et Gibel). Dans le même ordre d'idées, l'étude de Laval, qui correspond à une approche interdisciplinaire, combine les mathématiques, les algorithmes et la littérature afin de favoriser un apprentissage global et intégré.

De même, l'étude de l'hybridation de l'IA a introduit le concept de contrepartie technologique, articulant l'IA générative et l'IA symbolique sous contrôle humain. Dans ce cadre, l'IA générative (ChatGPT) a été utilisée pour comparer des informations en géométrie 3D, favorisant la justification et la preuve, tandis que l'IA symbolique (GeoGebra Discovery) a permis la validation formelle (García-Honrado et collaborateurs). Enfin, les conceptions axées sur la notion de pensée fonctionnelle et covariationnelle ont favorisé la construction des notions de variation et de dépendance. Dans la proposition de Páez, les étudiants ont généré leurs propres données à l'aide de feuilles et de règles pour analyser la relation entre le trajet et la distance, tandis que le débat scientifique en groupe a facilité la consolidation de la notion de variation fonctionnelle (Páez et collaborateurs).

Originalité des tâches proposées

Il convient de souligner l'originalité de plusieurs des tâches et situations présentées. Certaines propositions reprenaient des contextes plus classiques, tels que la géométrie 3D (Arévalo-Meneses et Montoya), la relation fonctionnelle (Páez et collaborateurs) et les fonctions linéaires et afines (Gaona et collaborateurs). D'autres ont cherché à innover en établissant un lien avec des jeux, comme la situation « Tri de cartes » qui obligeait à construire des algorithmes de classification (Rafalska & Gibel, 2025). Ou des liens avec la littérature jeunesse, comme le travail de Laval dans lequel l'application

de la théorie des graphes et l'introduction de la pensée algorithmique enrichissent sa compréhension et son analyse de ces contes pour la jeunesse. Des liens ont également été établis avec l'art, comme dans l'activité qui a exploré l'œuvre Composition arithmétique (1929-1930) de Théo Van Doesburg, utilisée pour articuler l'argumentation mathématique dans un contexte artistique et géométrique, en s'appuyant sur l'hybridation de l'IA générative et de GeoGebra Discovery (Richard & García-Honrado, 2025)

Aspects théoriques

Les idées développées constituent le cœur de la réflexion théorique du thème 2 de l'ÉTM8, axée sur l'évolution du travail mathématique face à l'émergence de nouveaux artefacts et sur l'articulation entre les différents cadres théoriques qui orientent la recherche.

Tout d'abord, on observe un déplacement du travail instrumental vers la visualisation et le discours, dans la mesure où les participants passent de la manipulation initiale des artefacts à d'autres dimensions de l'espace de travail mathématique (ETM). Ce déplacement se manifeste, d'une part, vers la visualisation (genèse sémiotique), comme dans le cas de la géométrie 3D, où les futurs enseignants, en manipulant des blocs ou en utilisant la rotation dans GeoGebra 3D, avaient tendance à projeter les images tridimensionnelles en vues bidimensionnelles afin de pouvoir opérer avec plus de clarté. D'autre part, on a cherché à favoriser le mouvement vers le discours (genèse discursive), orienté vers la justification et la preuve. C'est ce qui s'est produit dans la refonte de la tâche de géométrie 3D, où l'intégration de ChatGPT avait pour objectif explicite de promouvoir la validation discursive (Arévalo-Meneses et Montoya-Delgadillo). De manière analogue, dans l'étude de la relation fonctionnelle, bien que la genèse discursive ait été activée, celle-ci est restée ancrée dans le contrôle instrumental, s'appuyant sur la mesure à l'aide d'artefacts matériels tels que la règle (Páez et collaborateurs).

Deuxièmement, la conception des tâches s'est appuyée sur plusieurs cadres théoriques, notamment la théorie des situations didactiques (TSD) et l'ETM lui-même à travers son diagramme. Dans la recherche sur la relation fonctionnelle, les activités ont été structurées comme des explorations guidées suivies d'un débat scientifique, conformément à la TSD (Rafalska et Gibel ; Páez et collaborateurs). Dans le cas des jeux algorithmiques, la proposition « Tri de cartes » a été conçue selon la logique de l'ingénierie didactique du développement, qui s'appuie elle-même sur la TSD, en tenant compte du caractère adidactique de la situation et des différents niveaux de milieu (Rafalska & Gibel, 2025).

Troisièmement, on observe les prémices d'un travail prospectif de mise en réseau entre différents cadres théoriques. En ce sens, le travail avec des machines mathématiques a été conçu selon la théorie de la médiation sémiotique, proche des approches vygotskiennes et de la TSD, mais il a ensuite été analysé à l'aide de l'ETM, ce qui a mis en évidence la nécessité d'approfondir l'articulation entre ces deux cadres (Battilani

et Maschietto). De même, les recherches de Rafalska et Gibel ont montré l'intégration de la TSD dans la conception adidactique avec un modèle d'analyse du raisonnement qui relie les fonctions du raisonnement aux niveaux du milieu, établissant des ponts entre la conception de situations et l'analyse cognitive à partir de l'ETM. Dans le même ordre d'idées, l'inclusion de la théorie des graphes dans les travaux de Laval est utile dans le cadre de l'expérience éducative pour représenter les réseaux sous forme de graphes, où les personnages du conte sont représentés par un nœud et leurs interactions par une arrête.

Les recherches ont permis d'identifier des concepts émergents qui enrichissent l'ETM. Parmi ceux-ci, l'ETM collectif (Gaona et collaborateurs) est présenté comme un espace où les notions mathématiques ne se constituent pas uniquement à partir des ETM personnels, mais émergent de l'interaction entre les contributions individuelles et la médiation des enseignants. Les nouveaux travaux mathématiques proposés par Richard et ses collaborateurs soulignent la transformation du travail face à l'intégration de l'IA et d'autres artefacts numériques, qui redéfinit l'interaction entre les dimensions sémiotique, instrumentale et discursive. Dans ce cadre, la notion de contrôle prend une place centrale : contrôle sémiotique, discursif et/ou instrumental, nécessaires pour garantir la validité et la rigueur de l'interaction homme-machine. L'étude de l'hybridation entre l'IA générative et symbolique, en particulier l'expérience avec GPTp et GeoGebra Discovery, illustre comment le contrôle est essentiel pour stabiliser le référentiel (Danguy-Pichette et Richard). De même, dans la continuité des travaux de l'ETM, le travail algorithmique est structuré à travers les Espaces de Travail Algorithmique (ETA) et les Espaces de Travail Connectés proposés dans les travaux de Laval.

ESPACIO DE TRABAJO MATEMÁTICO PERSONAL DE PROFESORES DE MATEMÁTICA EN FORMACIÓN INICIAL ANTE EL ESTUDIO DE LA GEOMETRÍA 3D MEDIANTE EL USO DE ARTEFACTOS TECNOLÓGICOS

Fabiola Arévalo-Meneses, Elizabeth Montoya-Delgadillo

Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile

La presente investigación de enfoque cualitativo tiene como objetivo, indagar en el trabajo matemático de profesores de matemática en formación inicial, en relación a la geometría 3D, en particular ante tareas que consideran distintos artefactos. Desde la Ingeniería Didáctica como metodología de investigación, se presentan los resultados del análisis realizado considerando el marco teórico Espacio de Trabajo Matemático (ETM), los que dan cuenta de un trabajo matemático semiótico-instrumental, en donde se destaca la visualización 2D de objetos 3D, la corporalidad y uso de gestos. A la luz de estos resultados se presenta un nuevo diseño de situación, que será aplicada a corto plazo, el que incorpora el uso de la IA Chat GPT.

PROBLEMÁTICA

Diversos estudios hacen referencia a que la formación inicial y permanente de profesores de matemáticas es deficitaria en cuanto a conocimientos de geometría y su didáctica (Sgreccia *et al.*, 2012). Además, otros estudios muestran un escaso desarrollo de habilidades espaciales en profesores de matemática (Baki *et al.*, 2011). En Chile la Evaluación Nacional Diagnóstica de la Formación Inicial Docente (ENDFID), mide los conocimientos disciplinarios y didácticos de profesores en formación inicial que se encuentran cursando el séptimo u octavo semestre de sus estudios de pregrado. Los resultados de la ENDFID 2022, revelan en que el tema de conocimientos disciplinarios y didácticos con menor porcentaje de logro (38,1%) a nivel nacional es el de Geometría (CPEIP, 2023), resultados descendidos observados desde hace varios años (Gaona *et al.*, 2024).

Estos antecedentes resultan preocupantes, más aún ante la reciente incorporación del curso de Geometría 3D para 3° y 4° año de enseñanza media (MINEDUC, 2020), pues son los profesores de matemática quienes deben abordar el proceso de enseñanza y aprendizaje de la geometría 3D con sus estudiantes, proceso en el cual las representaciones 3D tienen gran relevancia (Fujita *et al.*, 2020). Otras investigaciones dan cuenta de las dificultades que existen para dibujar figuras tridimensionales e imaginar objetos en el espacio. Ante estas dificultades Ng *et al.* (2020) destacan las bondades del uso de Software de Geometría Dinámica (SGD) y de nuevos artefactos tecnológicos, como lápiz impresor 3D, puesto que facilitan los procesos de visualización (de Sousa *et al.*, 2021).

Por otra parte, un campo que ha tenido un desarrollo importante y que ha despertado un gran interés desde la didáctica, es la Inteligencia Artificial (IA), interés que es previo a la irrupción de Chat GPT (Richard *et al.*, 2022). Emprin y Richard (2023), analizan la forma en que la IA aprende o procesa información desde dos enfoques: el estadístico y el simbólico. En el primero existe un aprendizaje autónomo no supervisado a partir de un conjunto de datos proporcionados por el humano que permite a la maquina inferir una tendencia y realizar predicciones, esto desde un sistema de interacciones invisibles para los humanos, lo que Emprin y Richard (2023) reconocen como efecto de caja negra. Por otra parte, el enfoque simbólico corresponde a un sistema de aprendizaje supervisado, diseñado y planificado por el hombre, por tanto requiere de modelos lógicos, apuntando así a la comprensión causal y la explicación del razonamiento, a diferencia del enfoque estadístico cuya función apunta a la manipulación rápida y eficaz de datos para generalizar y predecir. Emprin y Richard (2023), destacan que es posible y recomendable realizar una complementariedad entre ambos enfoques (IA híbrida), proceso complejo que requiere de un cuidado especial en el diseño e implementación dada la falta de flexibilidad de las IA.

Sin dudas existen muchas interrogantes respecto del uso de la IA en la enseñanza, si bien esto genera preocupación, también brinda de oportunidades de descubrir e innovar de acuerdo a los nuevos desafíos que estos avances tecnológicos presentan en particular en la educación matemática, en donde la interacción humano-máquina adquiere relevancia y que pueden llevar a revolucionar la manera en que emprendemos y enseñamos matemática.

Dados los antecedentes, nuestro foco de interés se centra en la formación inicial de profesores de matemático en torno a la geometría 3D y el uso de tecnología, tales como SGD e IA, de tal manera que se presenta la siguiente pregunta de investigación:

¿Cuáles son los elementos epistemológicos y cognitivos en juego en el trabajo matemático personal de los profesores de matemáticas en formación cuando abordan tareas de geometría 3D que consideran el uso de artefactos tecnológicos?

MARCO TEÓRICO

Se utilizará el Espacio de Trabajo Matemático o ETM (Kuzniak *et al.*, 2022) como marco teórico. Este marco estudia el trabajo matemático realizado por un sujeto al abordar una tarea determinada considerando elementos cognitivos y epistemológicos. Este marco nos permite comprender, desde un punto de vista didáctico, lo que se pone en juego alrededor del trabajo matemático en un contexto educativo. Se basa en la articulación de dos planos horizontales, el plano epistemológico y el plano cognitivo. Estos dos planos se articulan a través de la activación de tres génesis, semiótica, instrumental y discursiva. La génesis semiótica se basa en los registros de representación semiótica y da un sentido de objeto matemático (Visualización) a los objetos o signos (Representamen). La génesis instrumental permite hacer operarios los artefactos en el proceso constructivo y la génesis discursiva otorga sentido a las

propiedades del referencial teórico para evocarlas en el razonamiento matemático para la justificación de la prueba. Del mismo modo, la articulación de las distintas génesis permite la activación de los planos verticales, plano semiótico-instrumental, plano instrumental-discursivo y plano semiótico-discursivo.

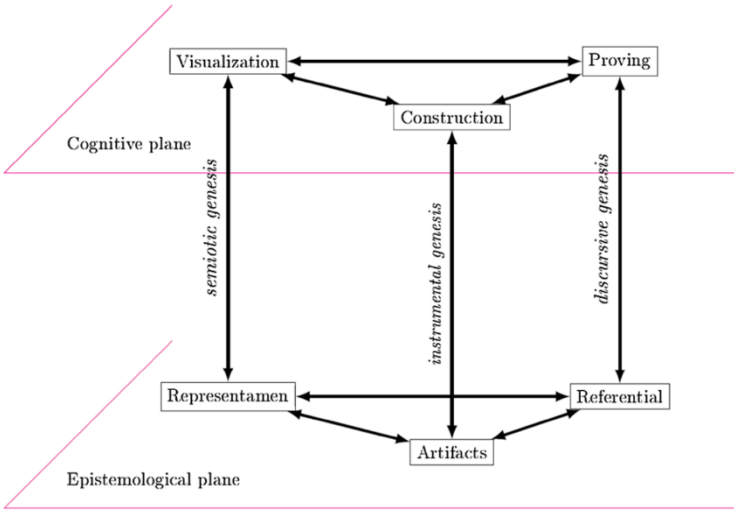


Figura 1: Diagrama del ETM (Kuzniak *et al.*, 2022).

MARCO METODOLÓGICO

La investigación se inscribe en el marco de la ingeniería didáctica (Artigue, 2015), donde un aspecto clave es el diseño de una situación didáctica compuesta por tareas de geometría 3D que contemplan el uso de artefactos tecnológicos, siendo los sujetos de estudio profesores de matemáticas en formación inicial de al menos dos universidades chilenas de la ciudad de Valparaíso.

El grupo de participantes comprometidos es de 15 a 20 profesores de matemática en formación inicial de al menos dos universidades de la quinta región de Valparaíso, Chile.

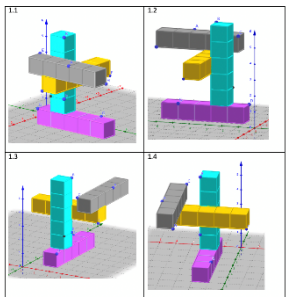
Particularmente para el piloto se consideró un grupo de 14 profesores en formación inicial, todos estudiantes de sexto semestre (de un total de 10 semestres), quienes se encontraban realizando el curso de Didáctica de la Geometría.

Experimentación

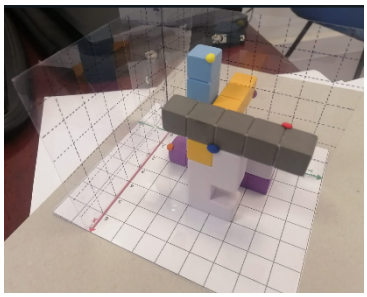
Tomando en cuenta los objetivos de este estudio, se diseñó e implementó un primer diseño de situación, correspondiente a una tarea de geometría 3D en que se considera el uso de distintos artefactos; imágenes impresas de una representación 3D desde distintas perspectivas; material manipulativo correspondiente a una estructura de bloques dispuesto sobre un plano cuadriculado y los otros dos planos cuadriculados en transparencia; y un applet de geometría 3D realizado en el SGD GeoGebra (ver Figura 2).

La tarea es la siguiente: *Determinar las coordenadas cartesianas de los puntos A, B, C, D, E, F y G. Luego, explicar las estrategias utilizadas para encontrar las coordenadas de los puntos.*

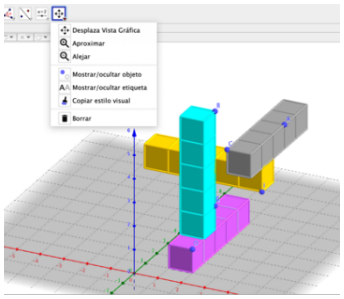
Para abordar la tarea los profesores cuentan con los tres artefactos antes descritos.



Imágenes 3D papel (M1)



Estructura de bloques (M2)



Applet de GeoGebra 3D (M3)

Figura 2: Artefactos para abordar la tarea.

Aplicación del piloto

En una primera etapa los profesores en formación inicial abordaron la tarea (Figura 2) en duplas, de manera que todas trabajan en las distintas modalidades (M1, M2 y M3) pero en distinto orden (ver Tabla 1).

Grupos	**Orden Modalidades**		
	Primero	**Segundo**	**Tercero**
1	M2	M3	M1
2	M2	M3	M1
3	M2	M3	M1
4	M1	M2	M3
5	M3	M1	M2
6	M1	M2	M3
7	M3	M1	M2

Tabla 1: Orden de utilización de artefactos de las distintas modalidades.

Cabe destacar que el orden en que abordan la tarea en las distintas modalidades, se da de acuerdo a cómo se da la rotación en las distintas modalidades, de acuerdo a los tiempos y a la disponibilidad de los artefactos. Es así, que no hay una decisión metodológica previa de que los primeros tres grupos de trabajo abordaran la tarea en un mismo orden de modalidades.

En una segunda etapa, responden un cuestionario en que se les consultó cuáles fueron sus fortalezas y dificultades al abordar la tarea en las distintas modalidades (M1, M2 y

M3), así como sus apreciaciones desde el rol de profesor al pensar en proponer la tarea a sus futuros estudiantes.

Resultados y Análisis

Los datos fueron extraídos de las producciones escritas de los profesores en formación inicial y de episodios de la grabación audiovisual realizada durante la implementación del piloto.

El análisis de datos da cuenta de que los profesores no presentan mayores dificultades al determinar las coordenadas de los puntos solicitados, esto en las distintas modalidades (ver Tabla 2).

Grupos	**Coordenadas Correctas**		
	M1	**M2**	**M3**
1	7	7	7
2	7	7	7
3	6	6	6
4	7	6	7
5	7	6	7
6	6	7	7
7	6	6	7
Incorrectas	**3**	**4**	**1**

Tabla 2: Respuestas grupales correctas.

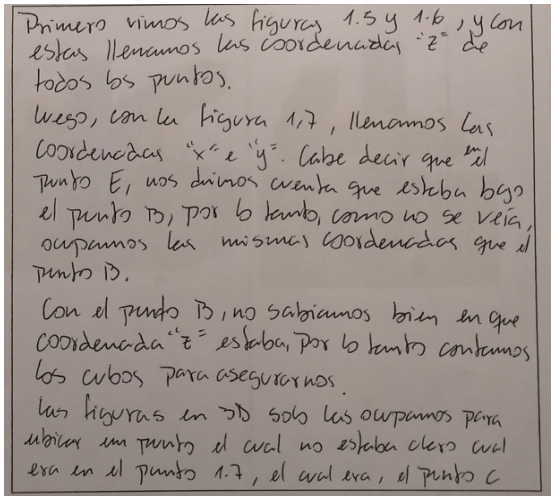
Como se observa en la tabla 2, de un total de 7 coordenadas, en M3 comenten solo un error; en M1 3 y en M2 en donde cometen más errores (4), sin embargo, no podemos concluir al respecto dada la cantidad de datos.

Al analizar las estrategias de los estudiantes para abordar la tarea, en las distintas modalidades, se observó un trabajo Semiótico-Instrumental, pues las características de la tarea propician la visualización mediante la utilización de distintos artefactos.

En todas las modalidades de trabajo, los profesores en formación inicial tienden a visualizar solo dos de las tres dimensiones para observar las figuras desde los distintos planos XY, YZ y XZ.

Abordaje de tarea con imágenes en papel (M1)

En la modalidad uno (M1), en que la tarea se presenta con imágenes impresas en papel, los estudiantes centraron su atención en solo tres de las siete imágenes (ver Figura 3). Estas tres imágenes mostraban solo 2 de las 3 dimensiones.



Primero vimos las figuras 1.5 y 1.6, y con estas llenamos las coordenadas "z" de todos los puntos.

Luego, con la figura 1.7 llenamos las coordenadas "x" e "y". Cabe decir que el punto E, nos dimos cuenta que estaba bajo el punto B, por lo tanto, como no se veía ocupamos las mismas coordenadas que el punto B.

Con el punto B, no sabíamos bien en qué coordenada "z" estaba, por lo tanto contamos los cubos para asegurarnos.

Las figuras en 3D solo las ocupamos para ubicar un punto que no estaba claro cuál era en 1.7, el punto C.

Figura 3: Estrategia de grupo 3 en M1.

Cabe destacar que las imágenes impresas se presentan como un registro semiótico estático, en donde existe un artefacto simbólico dado por la cuadrícula, los cuadrados que representan las caras de los cubos que componen los paralelepípedos, y los ejes del espacio. Este artefacto es utilizado como una herramienta para la visualización de los puntos (plano Semiótico-Instrumental). Algunos estudiantes, por ejemplo, cuentan los cuadros de la cuadrícula para determinar las coordenadas de los puntos.

Abordaje de tarea con GeoGebra 3D (M3)

Al abordar la tarea con el applet de GeoGebra 3D (M3), los profesores en formación utilizan la herramienta rotar que posee el SGD, de manera que puedan posicionar la imagen para observar solo dos de las tres dimensiones, luego coordinan la información obtenida de cada punto en los tres planos para determinar sus coordenadas en el espacio. Si bien esta estrategia es válida, las características de algunos objetos dificultan la visualización. Por ejemplo, algunos grupos hacen referencia a que en un determinado plano, uno de los puntos (E) queda tapado por otro que le antecede, de manera que no es posible observarlo, a menos que se gire un poco más el applet de GeoGebra (plano Semiótico-Instrumental), en tal caso los profesores en formación inicial observan el punto en el espacio.

Abordaje de tarea con material manipulativo (M2)

Ante la utilización del material manipulativo (M2), se observan dos tipos de trabajo Semiótico Instrumental; Uno de estos se caracteriza por una manipulación de la estructura de cubos en que los futuros profesores giran la figura y la mueven de manera conveniente para poder observar los puntos y determinar sus coordenadas. En este caso es la posición de los sujetos la que se presenta invariante. Cabe destacar que en este proceso los profesores en formación utilizan de manera auxiliar, sus dedos y objetos como lápices y reglas para representar las proyecciones ortogonales de los puntos sobre los diferentes planos (ver Figura 4), como si se tratase de artefactos del tipo herramientas no simbólicas.

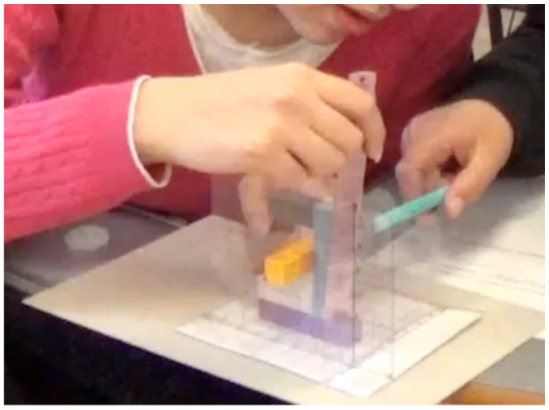
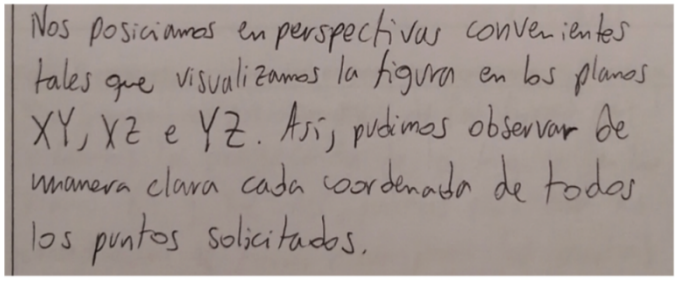


Figura 4: Estrategia de grupo 1 en M2.

Otro tipo de trabajo matemático en esta modalidad, es aquel en que los estudiantes se ubicaban en diferentes posiciones para poder mirar de manera perpendicular los 3 planos del espacio (ver Figura 5), manteniendo la estructura de cubos de forma estática sobre una superficie, siendo ellos quienes se mueven para poder mirar los tres planos del espacio.



Nos posicionamos en perspectivas convenientes tales que visualizamos la figura en los planos XY, XZ e YZ. Así, pudimos observar de manera clara cada coordenada de todos los puntos solicitados.

Figura 5: Estrategia de grupo 4 en M2.

En este caso podemos decir que la estructura de bloques se presenta como un artefacto simbólico estático, en donde es el cuerpo que se ubica en distintas posiciones en el espacio, siendo utilizado como un instrumento para poder visualizar la estructura de bloques. La relevancia del cuerpo en un trabajo matemático frente a una tarea de geometría 3D nos presenta un aspecto interesante sobre el que esperamos profundizar en el desarrollo de la investigación. No obstante, podemos decir que en esta modalidad (M2), en ambas estrategias se presenta al igual que en las otras modalidades un trabajo matemático caracterizado por la activación del plano Semiótico-Instrumental.

Respecto de las fortalezas y dificultades, así como respecto de su apreciación del uso de los artefactos desde su rol de profesor, se observó que; cuatro de los siete grupos de trabajo consideraron que la modalidad M1, en donde utilizaron las imágenes impresas, era más compleja de utilizar, sin embargo, no se observó una preferencia clara por alguna de las modalidad en particular. Es así como cuatro de los siete grupos propusieron que los estudiantes utilizaran en primer lugar el mismo artefacto que ellos utilizaron primero al abordar la tarea y no todos los grupos consideraron utilizar con sus estudiantes el que a ellos les resultó más complejo.

Un nuevo diseño

A partir de los resultados presentados en la sesión anterior, se ha considerado diseñar una nueva propuesta de manera tal que se considere, en una primera instancia, el uso de material manipulativo (concreto), ya que permite observar y manipular los objetos en el espacio, para luego utilizar el software de GeoGebra para la construcción y visualización a través de las herramientas que ofrece el SGD.

Ahora bien, un aspecto importante en la experimentación anterior, fue que la tarea no propiciaba la activación de la génesis discursiva, dadas las características de la tarea. De este modo, hemos considerado la utilización de cuerpos geométricos redondos, como la esfera, así como, frente a los nuevos avances en tecnología, incorporamos el uso de Inteligencia Artificial, en particular Chat GPT, como un nuevo artefacto que puede acompañar el proceso de abordaje de la tarea, con el fin de que los estudiantes puedan dialogar con la IA, realizando procesos de validación de la información que esta les proporciona, en contraposición con sus propios conocimientos matemáticos, lo que creemos puede promover los procesos de justificación y prueba.

La nueva tarea contempla la intersección de dos esferas, pues por una parte nos permite trabajar con un cuerpo geométrico 3D, y con su intersección, que corresponde a una circunferencia o a un punto, cuando esta intersección existe. De esta manera, es posible hacer una conexión entre un objeto 3D (esfera) y uno 2D (circunferencia), pudiendo observar su posición en el plano y en el espacio.

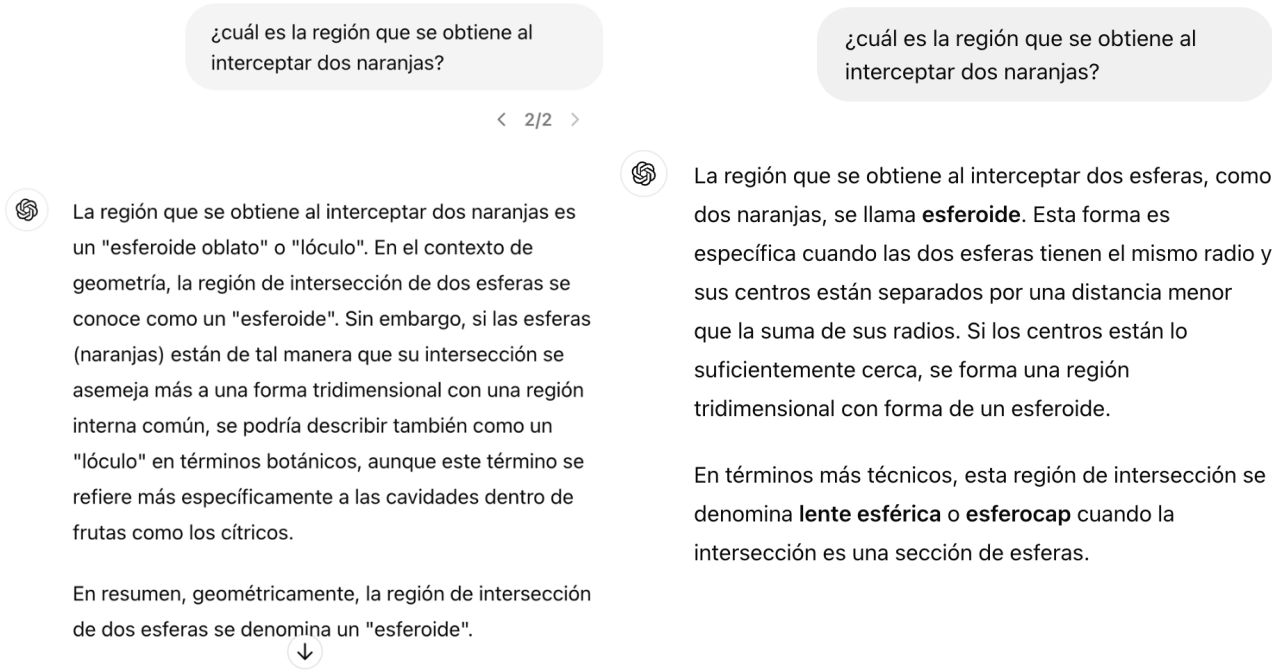
De esta manera se presenta la siguiente secuencia de actividades:

Primera etapa

Los profesores en formación inicial trabajaran en duplas, con dos naranjas. Se les pedirá que realicen un corte en ambas naranjas de manera que estas se unan (se intercepten). Luego se les solicitará describir la forma que tiene la superficie en que estas dos se juntan, para lo cual pueden utilizar instrumentos de medición, que les permita, por ejemplo, determinar el diámetro de tal región. El propósito es que los futuros profesores a través del trabajo manipulativo con objetos concretos puedan dar respuesta de manera intuitiva ante la situación planteada.

Segunda etapa

Posteriormente se les solicitará que utilicen Chat GPT para contrastar la información que han entregado en la primera etapa, respecto de la intersección de las dos naranjas, con el propósito de que los futuros profesores evalúen la validez de la información entregada por la IA ante preguntas como la siguiente (ver Figura 6).



(Pregunta realizada el 26 de junio de 2024) (Pregunta realizada el 27 de junio de 2024)

Figura 6: Ejemplo de una misma pregunta y respuesta entregada por Chat GPT en distintos días.

En esta etapa, además de evaluar la validez de las respuestas entregadas por la IA, evaluando y cuestionando los conceptos evocados y las afirmaciones realizadas, los profesores en formación podrán discutir sobre la formulación de las preguntas realizadas a Chat GPT y cómo son las respuestas entregadas por la IA de acuerdo a las características de tales preguntas. Considerando además, la manera en que cambia la respuesta de Chat GPT frente a una misma pregunta realizada en momentos diferentes (ver Figura 6).

Tercera etapa

En esta etapa se propondrá a los profesores en formación, que construyan un modelo de la intersección de sus dos naranjas en GeoGebra, esto con el fin de que puedan realizar un proceso de validación matemática respecto del trabajo anterior, desde un trabajo matemático instrumental propiciado por las herramientas con la que cuenta GeoGebra 3D. Esto en respuesta a la falta de validez matemática de Chat GPT.

Se espera que obtengan construcciones como la siguiente (ver Figura 7):

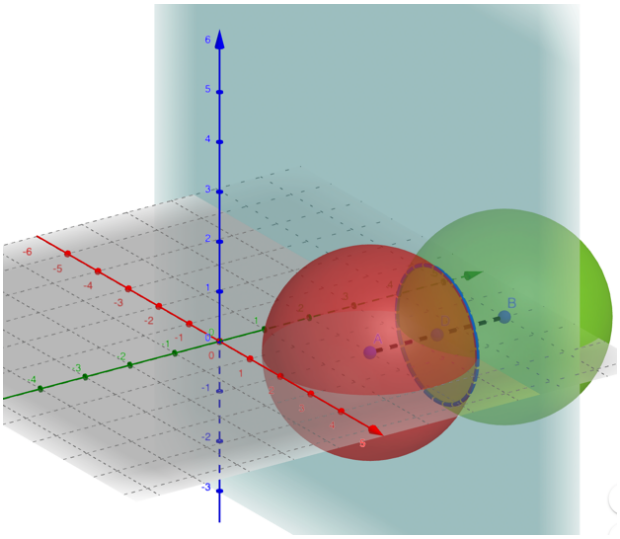


Figura 7: Representación de esferas interceptadas (GeoGebra 3D).

Cabe destacar que pueden presentarse distintos modelos que representen las naranjas, pues si bien, es probable que los profesores en formación consideren esferas para representar las naranjas, existe la posibilidad de que utilicen otros lugares geométricos como, por ejemplo, una elipse. Por otra parte, los modelos pueden ser muy diversos, en términos de forma, tamaño y posición, lo que puede ser un escenario propicio para la discusión respecto a las distintas variables involucradas y cómo estás pueden ser representadas en lenguaje matemático.

CONCLUSIÓN

En una primera experimentación, hemos observado que, si bien los profesores en formación inicial no presentaron mayores dificultades en determinar las coordenadas, se presentan distintos tipos de trabajo matemático instrumental dada las características de los artefactos. No obstante, la mayoría con el mismo fin, llevar las imágenes 3D a imágenes 2D, para observar solo 2 de las 3 dimensiones, por ejemplo, a través de la herramienta de rotación al usar el applet de GeoGebra en la vista 3D, logrando así determinar las coordenadas de los puntos en el espacio (activación del plano Semiótico-Instrumental). Otro aspecto que resulta interesante son dos tipos de trabajo en la modalidad M2, uno en donde la posición del sujeto se muestra invariante y es la estructura de bloques la que manipulan para su observación, y otro en donde la posición de la estructura de bloques es estática y son ellos los que se mueven alrededor de ella para poder observar la figura desde distintas perspectivas, utilizando sus dedos como apoyo para la visualización. De este modo, el cuerpo y su posición en el espacio así como el uso de gestos, toma un rol dentro de su trabajo matemático. Surgen la interrogante de si es posible considerar el cuerpo como un artefacto o como una forma de representación semiótica, en términos del ETM, abriendo la posibilidad de discutir respecto del rol de la corporalidad en el trabajo matemático.

Cabe destacar, que no se observa una preferencia por alguna de las modalidades de trabajo en particular, sin embargo, los futuros profesores desde su rol como profesor,

prefieren utilizar en primer lugar el artefacto con el cual ellos comenzaron a abordar la tarea y descartan utilizar la que ellos consideraron más complicada. Esto nos llama a no perder de vista la diversidad de habilidades y competencias de los estudiantes, contar con diversos artefactos puede ser un aporte a la inclusión de los estudiantes en el aula y por tanto promover su aprendizaje.

Por otra parte, no podemos quedar ajenos a los nuevos avances tecnológicos y sus implicancias en la educación matemática. Inteligencias Artificiales generativas de fácil acceso que se caracterizan por el uso del lenguaje, como es Chat GPT, llegaron para quedarse. No obstante, el desarrollo de la IA nos presenta la posibilidad y necesidad de indagar como docentes e investigadores en una manera adecuada de incorporar la IA en la educación matemática. Esto posiblemente cambien de manera considerable no solo la práctica de docentes y de estudiantes sino también los objetivos, habilidades y competencias que sean necesario desarrollar para insertarse de manera efectiva en una sociedad que seguirá cambiando a la luz de nuevas tecnologías.

Finalmente, este avance de investigación doctoral, nos presenta la posibilidad de discutir sobre rol de los artefactos y el trabajo matemático que propician de acuerdo a las características de las tareas, la relevancia de la corporalidad y los gestos en el estudio de la geometría 3D, así como la incorporación del uso de IA, sus usos e implicancias educativas, esperando mostrar nuevos avances que podrían ser un aporte a la formación inicial y continua de profesores de matemática, contribuir a la conceptualización de pensamiento geométrico 3D, así como, a la discusión respecto de cómo cambia o surge un nuevo trabajo matemático con uso de IA, en el sentido de la teoría ETM.

BIBLIOGRAFÍA

Artigue, M. (2015). Perspectives on design research: the case of didactical engineering. In A. Bikner-Ahsbahs, C. Knipping, & N. Presmeg (Eds.), Approaches to qualitative research in mathematics education (pp. 467-496). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-017-9181-6_17

Baki, A., Kösa, T., y Güven, B. (2011). A comparative study of the effects of dynamic geometry software and physical manipulatives on pre-service mathematics teachers' spatial visualization skills. British Journal of Educational Technology, 42(2), 291-310.

Centro de Perfeccionamiento, Experimentación e Investigación Pedagógica de Chile (CPEIP). (2023). Informe Resultados Institucionales Evaluación Nacional Diagnóstica de la Formación Inicial Docente 2023.

de Sousa, R. T., Alves, F. R. V., & de Azevedo, I. F. (2021). Categories of intuitive reasoning and GeoGebra 3D: An experience with Brazilian students. LUMAT, 9(1), 622-642. https://doi.org/10.31129/LUMAT.9.1.1618

Emprin, F. y Richard, PR (2023). Intelligence artificielle et didactique des mathématiques: état des lieux et questionnements. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives. Revue internationale de didactique des mathématiques* , (28), 131-181.

Fujita, T., Kondo, Y., Kumakura, H., Kunimune, S., & Jones, K. (2020). Spatial reasoning skills about 2D representations of 3D geometrical shapes in grades 4 to 9. Mathematics Education Research Journal, 32(2), 235-255. https://doi.org/10.1007/s13394-020-00335-w

Gaona, J., Miranda, D. G., Vergara, A., Ramírez, P., & Menares, R. (2024). Evaluación de Estándares Didácticos Disciplinares de Futuros Profesores de Matemáticas en Chile: ¿Construyendo un Profesorado Endeudado? Archivos Analíticos de Políticas Educativas, 32(18), 2-26. https://doi.org/10.14507/epaa.32.7997

Kuzniak, A., Montoya-Delgadillo, E., & Richard, P. R. (2022). Mathematical Work in Educational Context (A. Kuzniak, E. Montoya-Delgadillo, & P. R. Richard, Eds.; Vol. 18). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-030-90850-8

MINEDUC. (2020). Programa de estudio Geometría en 3D 3° y 4° medio. Ministerio de Educación.

Ng, O. L., Shi, L., y Ting, F. (2020). Exploring differences in primary students' geometry learning outcomes in two technology-enhanced environments: dynamic geometry and 3D printing. International Journal of STEM Education, 7(1). https://doi.org/10.1186/s40594-020-00244-1style (http://www.tandf.co.uk/journals/authors/style/reference/tf_A.pdf).

Richard, PR, Vélez, MP y Van Vaerenbergh, S. (2022). La educación matemática en la era de la inteligencia artificial. *Cómo la inteligencia artificial puede servir al aprendizaje humano matemático*.

Sgreccia, N., Amaya De Armas, T., y Massa, M. (2012). ¿Qué dicen los docentes, futuros docentes y formadores de docentes sobre su formación en didáctica de la geometría 3d? In Quaderni di Ricerca in Didáctica (Mathematics) (Vol. 22).

SESSIONS DE LABORATOIRE AVEC LES MACHINES MATHÉMATIQUES POUR LES TRANSFORMATIONS GÉOMÉTRIQUES AU COLLÈGE

Beatrice Battilani, Michela Maschietto

Università di Modena e Reggio Emilia, Laboratorio delle macchine matematiche,
beatrice.battilani@unimore.it, michela.maschietto@unimore.it

Dans cette communication nous présentons le déroulement et l'analyse de sessions de laboratoire avec les machines mathématiques avec des élèves de niveau collège. Ces sessions ont été conduite dans la salle des machines mathématiques auprès du musée de l'Université de Modena e Reggio Emilia. Notre objectif est de contribuer à la discussion sur l'introduction et l'utilisation des artefacts matériels, concernant les transformations géométriques du plan dans ce cas particulier, en s'appuyant sur les cadres théoriques de la médiation sémiotique et des ETM.

INTRODUCTION

Cet article se propose de contribuer au débat sur « *l'introduction et à l'utilisation des artefacts, tant matériels qu'informatiques, en relation avec les manipulations et les gestes associés, aux aspects sémiotiques présents dans l'artefact et aux différentes formes de discours* », en accord la description du Thème 2. En particulier, les exemples proposés concernent des artefacts matériels, nommés « machines mathématiques », pour les transformations géométriques du plan.

Le but de cette communication est de discuter l'analyse du travail effectué par les élèves pendant une session de laboratoire avec les machines dans le contexte extrascolaire du musée, selon le cadre des ETM (Kuzniak, 2022). En particulier, il nous intéresse travailler les questions concernant quelles genèses sont activées par les élèves dans les diverses questions des fiches de travail et quelles sont les interactions entre les plans du modèle des ETM en investiguant la découverte, la communication et le raisonnement.

Cette contribution se compose de cinq parties : dans la première partie, on présente les machines mathématiques, l'idée de laboratoire de mathématique et la structure des séances au musée ; la deuxième partie contient des éléments des cadres théoriques ; la troisième partie contient notre analyse et les conclusions suivent.

MACHINES MATHEMATIQUES ET LABORATOIRE DE MATHEMATIQUES

Les machines mathématiques

Les machines mathématiques sont des artefacts géométriques qui évoquent des contenus mathématiques ; elles concernent, par exemple, les transformations géométriques du plan, les sections coniques et la perspective. Une machine mathématique peut donc être un traceur de courbe, un système articulé pour les

transformations géométriques ou un perspectographe pour dessiner en perspective. Elles ont été construites avec un but didactique, mais elles ont un lien étroit avec l'histoire des mathématiques et le développement des mathématiques elles-mêmes (Bartolini et Maschietto, 2006). Elles constituent la Collection Machines Mathématiques du Système des Musées et Jardin Botanique de l'Université de Modena e Reggio Emilia, où se déroulent également les laboratoires.

Les machines pour les transformations géométriques sont composées de tiges formant des quadrilatères articulés dans la plupart des cas ; les quadrilatères sont placés sur une base en bois avec contraints divers selon la transformation qui réalisent. La machine utilisée dans l'expérimentation que l'on va analyser dans cette contribution est le biellisme pour la symétrie orthogonale (Figure 1). Elle est composée d'un losange articulé et d'un plan en bois avec une fente ; deux sommets opposés du losange (A et B dans la Figure 1, au centre) sont contraints à glisser le long de la fente, tandis que les deux autres sommets (P et Q dans la Figure 1, au centre) sont libres d'être déplacés sur le plan en bois. Les deux sommets libres, P e Q, se correspondent dans une symétrie orthogonale ayant la fente comme axe (droite [s], dans la Figure 1, au centre) : le segment PQ est perpendiculaire à la droite [s] et les deux points Pet Q sont à la même distance de la droite, grâce à la propriété des diagonales du losange.

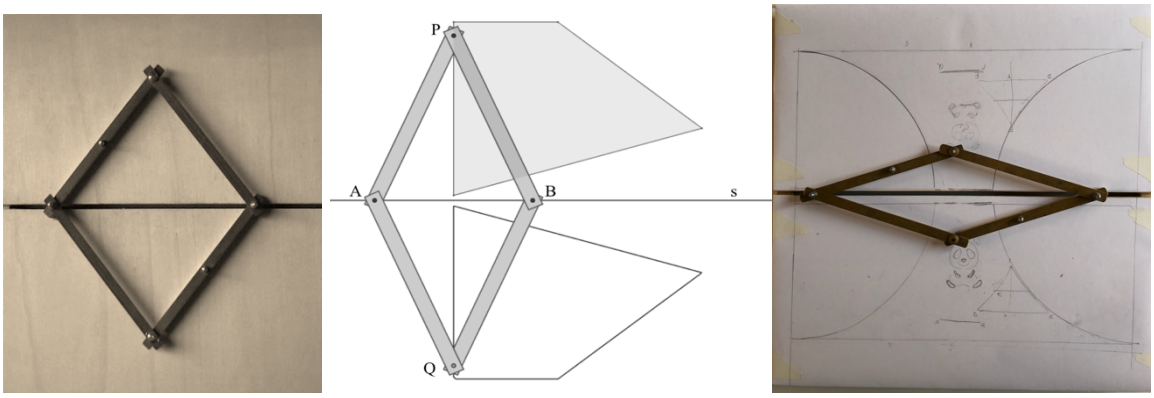


Figure 1. Machine mathématique pour la symétrie orthogonale.

Les deux points P e Q sono appelés « pointeur » et « traceur ». Le point traceur correspond au point image du point pointeur : dans l'utilisation de la machine, quand on déplace le pointeur sur le plan, le traceur suit un mouvement obligé. Quand des mines de crayon sont placées dans les trous correspondant aux points P et Q, la machine trace deux images symétriques. Les rôles des points P e Q peuvent s'échanger. La machine travaille localement : elle fait correspondre deux sous-ensembles du plan (Figure 1, à droite).

Les machines mathématiques sont proposées aux élèves de l'enseignement secondaire dans le cadre du laboratoire de mathématiques.

Le laboratoire de mathématiques dans l'école italienne

L'idée de laboratoire de mathématiques a été reprise à des moments divers dans les réflexions sur l'enseignement des mathématiques (Maschietto & Trouche, 2010). Dans

les références pour l'enseignement en Italie, le laboratoire de mathématiques a été proposé dans les documents de la Commission de l'Union Mathématique Italienne (UMI-CIIM) chargée de la rédaction d'indications pour le curriculum des mathématiques pour tout niveau scolaire. Dans le document UMI-CIIM pour l'enseignement secondaire (AA.VV., 2004), le laboratoire de mathématiques est défini « *comme une série de suggestions méthodologiques* » finalisées à la construction de significations mathématiques. Il est caractérisé par le recours aux outils (par exemple, logiciels, calculatrices, objets manipulables, ...) dans le travail mathématique et par l'interaction entre pairs (élèves) et avec l'expert (enseignant).

L'attention sur le laboratoire est portée dans les Indications Nationales[24] pour le curriculum de mathématiques pour l'école élémentaire, le collège et le lycée. Une approche active ainsi que la manipulation sont des éléments à prendre en compte pour soutenir l'apprentissage des élèves et une meilleure perception de cette discipline souvent considérée difficile.

Structure d'une session de laboratoire avec les machines mathématiques au musée

Depuis plusieurs années, le Laboratoire des machines mathématiques (www.mmlab.unimore.it) suit des expérimentations didactiques sur l'implémentation de la méthodologie du laboratoire des mathématiques dans les classes du primaire et secondaire ; en même temps, on propose et gère des séances de laboratoire dans ses locaux à l'Université pour les classes du secondaire, surtout lycée (Maschietto, 2020). En général, la structure de ces séances comprend un premier moment de présentation du travail à effectuer et d'explication des termes présents dans les fiches de travail, suivi d'une phase de travail en petits groupes avec les machines guidée par des fiches. La troisième phase qui suit consiste en un moment de partage du travail fait, géré par l'animateur du laboratoire. L'expérience se termine par la visite de l'exposition « *Macchine, meccanica e matematica* » installée dans les locaux où se déroulent la séance[25]. Chaque séance dure environ deux heures, sur les thèmes des sections coniques (Maschietto, 2020) et des transformations géométriques (Maschietto, 2018).
Jusqu'à il y a deux ans, les classes en visite étaient toutes classes de lycée ; à partir de l'année scolaire 2022/23 nous avons commencé à accueillir des classes de collège. Les séances qui sont présenté dans cette contribution concernent précisément des classes du collège sur le thème des transformations géométriques, en particulier les classes de cinquième (élèves de 12/13 ans) qui ont ce thème dans leur programme.
Le changement de niveau scolaire, du lycée au collège, a impliqué un travail de révision des fiches de travail proposées aux élèves. Au cours de l'année scolaire 2022/23, une séance de laboratoire avec les machines mathématiques réalisant l'homothétie, la symétrie centrale et la symétrie axiale a été structurée et expérimentée, tandis que dans

[24] https://www.miur.gov.it/documents/20182/51310/DM+254_2012.pdf;
https://www.indire.it/lucabas/lkmw_file/licei2010/indicazioni_nuovo_impaginato/_decreto_indicazioni_nazionali.pdf
[25] https://www.macchinematematiche.org/macchine-meccanica-e-matematica.html, en italien

l'année scolaire 2023/24 nous nous sommes concentrées sur la symétrie axiale qui a été expérimentée dans six classes de niveau cinquième
Le travail de révision a porté sur l'organisation globale des questions pour le travail en petits groupe avec la machine ; plus précisément, les questions ont été réparties en deux fiches et reformulées pour les rendre de plus en plus adaptées spécifiquement aux élèves de cinquième, en termes de langage et de connaissances disponibles. Nous avons aussi prévu du matériel (gabarits) pour rendre plus facile dessiner les figures et crée des affiches avec des exemples des isométries et de l'homothétie pour solliciter les images mentales des élèves. Le conducteur du laboratoire a géré des moments des partages des réponses aux questions entre la première et la seconde fiche. Dans la dernière activité, les élèves doivent décider quelles figures et leurs transformées pouvaient être obtenues par la machine explorée (dans le cas du travail sur la seule symétrie axiale, ils devaient identifier les images symétriques parmi des images représentantes des transformations géométriques, Figure 7).
Les fiches remplies par les élèves sont laissées aux enseignants, offrant la possibilité de reprendre et de poursuivre le travail en classe, afin que l'expérience ne se limite pas à la séance au musée. Quelque temps après les séances, nous avons proposé un questionnaire d'évaluation de l'expérience, ce qui nous a permis de recueillir de feedback utile pour une révision successive.

REFERENCES THEORIQUES

La Théorie de la Médiation Sémiotique

La référence théorique principale pour la structuration de parcours didactiques aves les machines mathématiques (Maschietto, 2020) est la Théorie de la Médiation Sémiotique (Bartolini Bussi & Mariotti, 2008). L'idée fondante est que l'enseignant utilise un artefact comme outil pour faire la médiation de concepts mathématiques embarqués dans l'artefact et émergeant de son utilisation (Figure 2, à gauche). Pour cela, l'artefact est choisi en accord avec l'analyse de son potentiel sémiotique, strictement lié au niveau des élèves et aux objectifs didactiques. Les activités avec l'artefact s'articulent avec des activités individuelles et des discussions collectives, toutes composant un cycle didactique (Figure 2, à droite). Dans ces dernières, par exemple, l'enseignant soutient l'évolution des signes produits dans le travail avec l'artefact vers des signes mathématiques, ce qui permet d'accéder au savoir mathématiques en jeu.

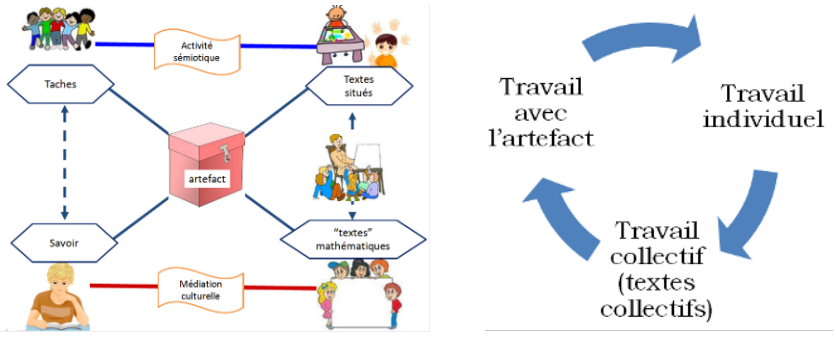


Figure 2. Schéma de la Théorie de la Médiation Sémiotique et son cycle didactique.

Le travail des élèves avec l'artefacts est organisé par des fiches structurées en accord avec des questions qui caractérisent en général l'exploration des artefacts (1. *Comment est-il fait ?* 2. *Que fait-il ? Comment fonctionne-t-il ?* 3. *Pourquoi* ? 4. *Que se passe-t-il si... ?* Bartolini Bussi *et al.*, 2011). Les premières questions relèvent de l'approche instrumentale (Verillon & Rabardel, 1995), dans le sens que l'on prendre en compte de soutenir la genèse instrumentale des élèves.

Dans le cas des sessions au musée, il n'y a pas de travail individuel dans le cycle didactique ; le travail est collectif, différent de ce qui pourrait se passer en classe avec l'enseignant, étant donné qu'il y a une relation différente avec l'animateur connu uniquement à cette occasion, des lieux et contextes différents et une durée réduite. Cela pose des questions sur le processus d'évolution des signes produit avec l'artefact.

La théorie des ETM

Dans cette contribution, il nous a paru intéressant et enrichissant d'analyser le travail effectué par les élèves du collège pendant une séance de laboratoire sur la symétrie axiale en se référant au cadre des ETM (Kuzniak, 2022), sollicitées par Flores Salazar *et al.* (2022) qui considèrent que « *in the mathematical machine there is an attempt to represent an object and a property by means of an executable process* » (p.178).

La théorie des ETM permet d'analyser le travail mathématique par rapport à deux plans (Figure 3), épistémologique et cognitif, en se référant à trois genèses qui relie les plans et leurs composantes. La genèse sémiotique concerne l'interprétation des signes mathématiques et la visualisation ; la genèse instrumentale concerne la construction cognitive d'un instrument à partir d'un artefact, c'est-à-dire l'appropriation d'un artefact et le choix d'un artefact pour effectuer des actions spécifiques ; la genèse discursive, par laquelle les propriétés mathématiques deviennent disponibles pour justifier et valider. Ce cadre théorique soutient l'observation et l'analyse de la découverte, de la communication, du raisonnement et de la validation construits lors des sessions de laboratoire, en s'appuyant sur les différents plans définis par les interactions entre les genèses ([Sém-Ins], [Sém-Dis] et [Ins-Dis]).

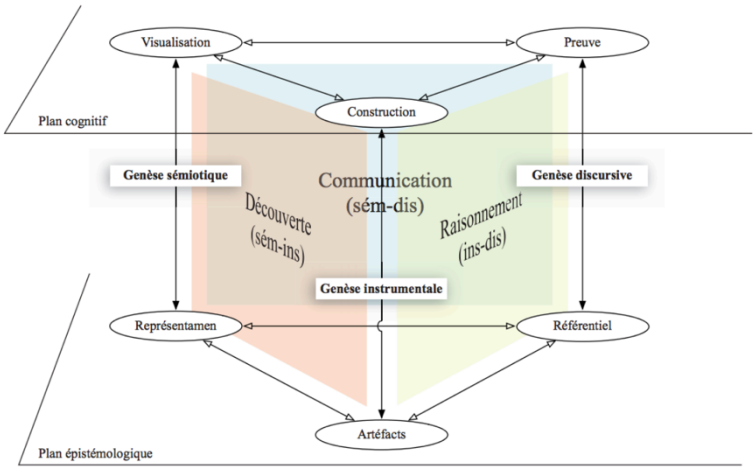


Figure 3. Les genèses et les plans verticaux dans l'ETM.

QUESTION DE RECHERCHE

En se référant à la séance de laboratoire avec les machines mathématiques décrite ci-dessus pour les classes de collège, nous nous demandons quelles genèses sont activées par les élèves dans les diverses questions des fiches et quelles sont les interactions entre les trois plans. Le problème auquel les élèves sont confrontés dans une séance de laboratoire est le suivant : quelle transformation géométrique du plan réalise-t-elle la machine mathématique donnée ?

ANALYSE

Dans le plan épistémologique (Figure 3) nous identifions comme artefacts la machine pour la symétrie orthogonale (Figure 1). Le référentiel est constitué par les propriétés des figures géométriques, en particulier des quadrilatères, et peut-être par les connaissances de la symétrie orthogonale.

Les données sur lesquels se fonde notre analyse dans cette contribution sont constitués par les fiches de travail remplies par les élèves pendant le travail en petits groupes, les dessins produits et sur les observations des animateurs. Nous n'avons pas eu la possibilité d'enregistrer les séances.

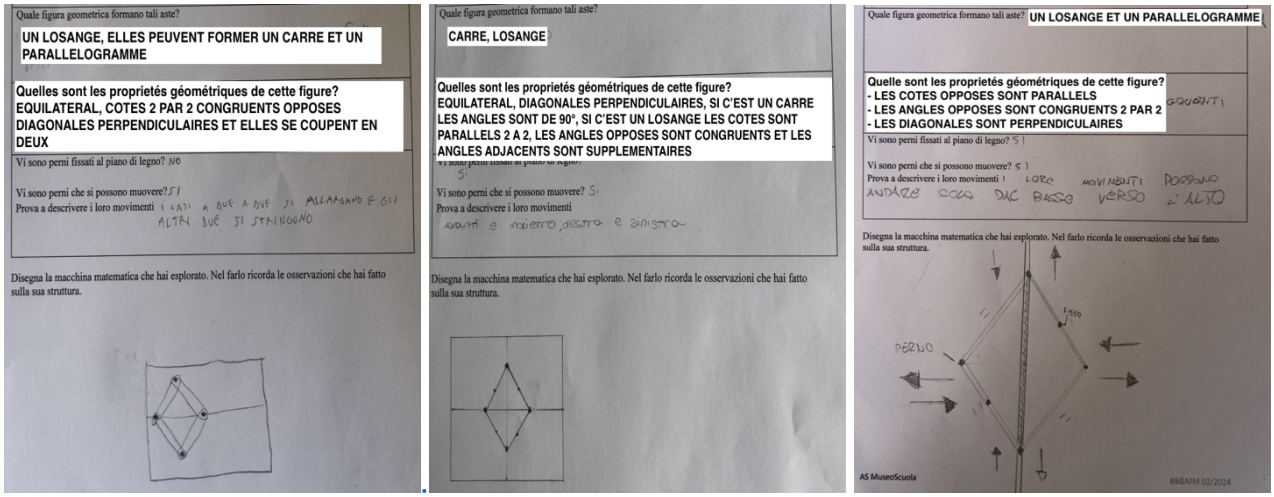
Dans l'analyse, nous avons distingué le travail sur les deux fiches et l'activité finale.

Analyse de la première fiche

Les questions de la première fiche (Figure 4) concernent la description de la structure de la machine. En particulier, elles demandent d'identifier quelle est la figure géométrique représentée par le quadrilatère articulé de la machine et d'expliciter les propriétés de cette figure. C'est la genèse sémiotique qui est activée, correspondant à l'interprétation de signes offerts par la machine, dans le sens du plan épistémologique au plan cognitif. Les élèves répondent presque toujours en identifiant les différentes figures que l'on peut obtenir par le système articulé à travers ses déformations, c'est-à-dire non seulement le losange mais aussi le carré et le parallélogramme (Figure 4). Cela repose sur une classification exclusive des quadrilatères, même si la question demande « *quelle figure...* ». On demande ensuite d'écrire les propriétés géométriques de la figure formée par les tiges ; cette question est posée pour porter l'attention sur la figure, car ses propriétés sont à la base du fonctionnement de la machine pour la symétrie. Notons que plusieurs élèves demandent à l'animateur d'expliquer l'expression "propriétés géométriques" présente dans la fiche.

La dernière question de la fiche demande de « *Dessine la machine mathématique que tu as exploré. Rappelle-toi les observations sur sua structure* ». Elle active la genèse sémiotique dans le sens opposé par rapport aux questions précédentes, c'est-à-dire du plan cognitif au plan épistémologique, puisqu'elle induit à produire des signes nouveaux. Ces questions pourraient être interprétées en termes de tâche de description et reproduction de figures, pour lesquelles Michot et Braconne-Michoux (2019) ont proposé une analyse par rapport au plan [Sém-Ins]. En effet, pour le dessin de la

machine les élèves peuvent utiliser la règle, qui ont d'ailleurs déjà utilisé pour mesurer la longueur des tiges. Aucun a demandé d'autre instruments.



Groupe A **Groupe B** **Groupe C**

Figure 4. La première fiche remplie pendant le travail en petit group.

Les représentations des machines peuvent être distinguées en trois typologies : représentations réalistiques de la machine, avec les tiges et les pivots, avec (Figure 4, Groupe A) ou sans la base de la machine ; représentations du losange sans références à l'épaisseur des tiges avec (Figure 4, Groupe B) ou sans la base de la machine ; représentations des mouvements du losange articulé (Figure 4, Groupe C) sans la base de la machine ; représentations en perspective. Dans presque aucun cas, la figure dessinée n'est réellement un losange, c'est-à-dire que les élèves ne construisent pas de figure avec des côtés congruents, même si cette propriété a été écrite sur la feuille. Les représentations fournies sont donc discordantes. Dans certains groups, cette phase dédiée à la représentation graphique prend un certain temps.

Entre la première et la deuxième fiche, l'animateur demande de partager les réponses aux différentes questions de la première fiche. D'un côté, puisque les fiches sont conçues pour être abordées par des élèves ayant des connaissances sur les transformations géométriques du niveau école primaire et que l'animateur ne connaît pas les élèves, ce moment permet à l'animateur de faire partager les termes utilisés (par exemple, figures égales vs figures congruentes), les connaissances mobilisées et les notions utiles pour la deuxième fiche. De l'autre côté, on pourrait dire que l'animateur soutient ainsi davantage la genèse sémiotique des étudiants.

Analyse de la deuxième fiche

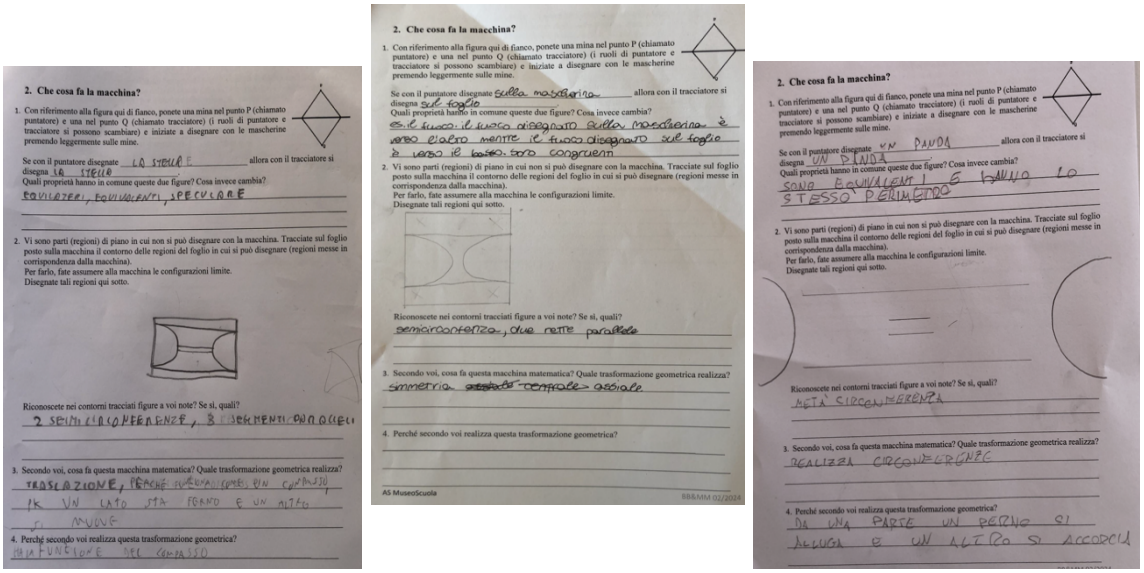
Les questions de la deuxième fiche (Figure 6) activent la genèse instrumentale par l'utilisation de la machine pour produire des dessins symétriques (Figure 1, à droite). Dans la fiche, on suggère comment utiliser la machine après avoir fixé un gabarit sur le plan : placer deux mines de crayon dans les trous en correspondance des points P et

Q, suivre le contour du gabarit avec une mine et faire dessiner l'autre en suivant les mouvements du système (Figure 5).

Figure 5. Dessiner avec la machine.

La fiche demande aussi d'interpréter/reconnaître les relations entre les dessins obtenus. Ainsi c'est une autre genèse sémiotique qui s'active, cette fois-ci sur les signes produits par la machine. Cela, avec les gestes performés dans l'utilisation de la machine, active les interactions entre les genèses dans le plan [Sém-Ins] en impliquant les étudiants dans la découverte.

Dans les réponses, des termes caractérisant les figures symétriques apparaissent (« *équivalents* », « *en miroir* », « *même périmètre* »), ainsi que descriptions des figures (« *le feu dessiné en suivant le gabarit est vers le haut, tandis que le feu dessiné sur la feuille vers le bas. Ils sont congruents* », Figure 6, Groupe B).



Groupe A **Groupe B** **Groupe C**

Figure 6. La deuxième fiche remplie pendant le travail en petit groupe.

Les questions après les dessins (« *À votre avis, que fait cette machine ? Quelle transformation géométrique effectue-t-elle ?* » et « *Pourquoi pensez-vous que la machine réalise cette transformation ?* ») essayent de guider dans une première organisation théorique des observations et découvertes réalisées grâce au travail avec la machine. On termine avec la recherche des invariants de la transformation, toujours sur le plan [Sém-Ins]. Les réponses des élèves sont assez variées, en montrant parfois des genèses défaillantes. Par exemple, pour le Groupe A (Figure 6), il s'agit d'une « *translation, parce qu'elle fonctionne comme un compas, un côté est fixe et un autre se déplace* », pour le Groupe B c'est bien une symétrie axiale, tandis que le Groupe C semble ne pas avoir compris la question. Remarquons que le Groupe A avait identifié comme propriété des figures dessinées l'être « *au miroir* ».

Discussion finale

Au sein des groupes les étudiants travaillent en comparant et en discutant, mais comme nous l'avons dit auparavant, n'avons pas recueillir ces données. L'observation de l'animateur ne révèle pas d'une démarche de validation, mais une activité discursive dans la plupart des groupes.

La situation semble changer dans la dernière tache de la séance : les élèves doivent reconnaitre figures symétriques parmi lesquelles proposées sur des grandes feuilles (Figure 7).

Les discussions sont animées au sein des groupes. Même si on ne peut pas parler de genèse discursive de preuve les résultats obtenus deviennent disponibles pour un raisonnement mathématique et une validation discursive. Les élèves semblent pouvoir rentrer dans un processus d'argumentation.

Figure 7. Exemple di transformations géométriques à reconnaître.

EN GUISE DE CONCLUSIONS

La séance de laboratoire que nous avons analysée dans cette contribution a été développée en plaçant au centre l'artefact qui évoque un certain savoir mathématique qui est rendu accessible aux élèves à travers des questions et l'utilisation de l'artefact, en accord avec la Théorie de la médiation Sémiotique. Les consignes sont fondamentales pour guider les élèves dans le processus de découverte. L'analyse dans

le cadre de la théorie des ETM nous semble proposer des éclairages intéressants du travail mathématiques des élèves.

L'analyse menée dans cet article et l'introduction de l'observation dans une perspective ETM *a posteriori* par rapport à la construction de la séance de laboratoire, vont permettre le développement d'idées pour l'amélioration de ces séances, qui d'après les questionnaires apparaissent particulièrement appréciées par les étudiants.

Nous voudrions questionner en particulier, la genèse discursive, de construction de la validation, de la preuve et de la démonstration, en considérant le modèle théorique des ETM. Nous souhaitons approfondir l'analyse du discursif, en introduisant lorsque c'est possible dans les prochaines sessions les enregistrements de discussions surtout finales.

Une autre question qui se pose et qui nous n'avons pas abordée dans cette contribution est la relation entre les deux cadres théoriques considérés, ETM pour l'analyse présentée ici, et la théorie de la médiation sémiotique sur laquelle l'ensemble du laboratoire est construit, dans la perspective du *networking strategies* (Prediger *et al.*, 2008).

REFERENCES

AA.VV. UMI (2004) In G. Anichini, F. Arzarello, L. Ciarrapico, & O. Robutti (Eds.), *Matematica 2003. La matematica per il cittadino*. Matteoni stampatore.

Bartolini Bussi, M.G., Garuti, R., Martignone, F. & Maschietto, M. (2011). Tasks for teachers in the MMLAB- ER Project. In B. Ubuz (Ed.), *Proceedings of the 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 127-130). PME.

Bartolini Bussi, M.G. & Mariotti, M.A. (2008). Semiotic mediation in the mathematics classroom: Artifacts and signs after a Vygotskian perspective. In L. English & al. (Eds.), *Handbook of International Research in Math. Educ.* (II edition, pp. 746-783). Routledge.

Bartolini Bussi, M.G. & Maschietto, M. (2006). *Macchine matematiche: dalla storia alla scuola.* Collana UMI Convergenze. Springer.

Battilani, B. & Maschietto, M. (2023). Le trasformazioni geometriche con le macchine matematiche: sessione di laboratorio al museo per la scuola secondaria di primo grado. In M. Asenova & B. D'Amore B. (Eds.), *Riflettere sulla Didattica della Matematica per Insegnare: Ricerche ed Esperienze - Atti Convegno CSPT 2023 n.37* (pp. 115-116). Bonomo editore.

Flores Salazar, J.V., Gaona, J & Richard, P.R. (2022). Mathematical work in the digital age. Variety of tools and the role of geneses. In A. Kuzniak *et al.* (Eds.), *Mathematical work in educational context* (pp. 165-209). Springer.

Kuzniak, A. (2022). The theory of mathematical working space–Theoretical characteristic. In A. Kuzniak *et al.* (Eds.), *Mathematical work in educational context* (pp. 3-31). Springer.

Maschietto, M. (2018). Instruments de l'histoire pour enseigner et apprendre : le cas des machines mathématiques. In E. Barbin, D. Bénard, & G. Moussard (Eds.), *Les mathématiques et le réel. Expériences, instruments, investigations* (pp. 95-107). Presses Universitaires de Rennes.

Maschietto, M. (2020). Exploiter instruments et histoire dans le laboratoire de mathematiques. Exemples de séquences didactiques avec les machines mathématiques. *REPÈRES – IREM*, *120*, 25-42.

Maschietto, M. & Trouche, L. (2010). Mathematics learning and tools from theoretical, historical and practical points of view: the productive notion of mathematics laboratories. *ZDM The International Journal on Mathematics Education*, 42, 33-47.

Michot, S. & Braconne-Michoux, A. (2019). Analyse d'une tâche de géométrie au 2e cycle du primaire au Québec. In L. Vivier, E. Montoya Delgadillo, P.R. Richard, I. Gómez-Chacón, A. Kuzniak, M. Maschietto, & D. Tanguay (Eds.), *Actes du Sixième Symposium sur le Travail Mathématique* (pp. 347-358). Valparaíso, Chile: Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.

Prediger, S., Bikner-Ahsbahs, A., & Arzarello, F. (2008). Networking strategies and methods for connecting theoretical approaches: First steps towards a conceptual framework. *ZDM The International Journal on Mathematics Education*, 40, 165–178.

Verillon P. & Rabardel P. (1995). Cognition and artifacts: A contribution to the study of thought in relation to instrument activity. *European Journal of Psychology of Education*, 9(3), 77-101.

CONTREPOINT TECHNOLOGIQUE ET CONTRÔLE DU RÉFÉRENTIEL DANS LE TRAVAIL MATHÉMATIQUE INSTRUMENTÉ

Eloï Danguy-Pichette, Philippe R. Richard

Université de Montréal

Cette étude examine les effets du contrepoint technologique sur le contrôle du référentiel. Le système tuteur QED-Tutrix sert d'arrière-plan contextuel pour illustrer l'articulation entre IA symbolique et statistique. Un GPT personnalisé (GPT_p), alimenté par le Référentiel Aide-Mémoire (RAME), est comparé à un chat éphémère. L'analyse montre que le GPT_p suit une logique référentielle plus cohérente, mais présente des biais dans la sélection d'énoncés mathématiques. Cette recherche ouvre la voie à une étude approfondie pour affiner le contrôle du référentiel et évaluer l'impact du contrepoint technologique sur le raisonnement mathématique et la preuve.

INTRODUCTION

De prime abord, il peut sembler paradoxal d'associer l'idée de « perte de contrôle » au « référentiel », ce dernier étant un concept central dans la théorie des espaces de travail mathématique (ThETM). Dans le modèle des ETM, il appartient au plan épistémologique, où il est généralement perçu comme une structure stable et organisée, guidant la production et la validation des connaissances mathématiques à travers la genèse discursive et la réalisation de preuves.

Pourtant, toute conception d'un environnement informatique pour l'apprentissage humain repose sur une modélisation des connaissances, incluant ici les problèmes qui leur donnent du sens. Lorsqu'il s'agit d'un système tutoriel comme QED-Tutrix, cette modélisation intègre également des modèles de l'apprenant et de l'action tutrice. Le phénomène bien connu de transposition informatique introduit une première différence entre les connaissances épistémologiques de référence et celles qui s'activent dans l'interaction avec la machine. Les modèles implémentés influencent cette interaction en renouvelant les liens traditionnels de nécessité entre les connaissances émergentes dans l'instrumentation. Cette dynamique introduit une première incertitude, où la machine produit des connaissances avec une certaine autonomie, indépendamment du questionnement et du projet de l'humain dans son travail mathématique.

Face à ces connaissances instrumentées, il est évident que l'usager doit entreprendre des adaptations dans ses genèses. Toutefois, lorsque l'utilisation d'un artefact numérique induit des erreurs récurrentes et persistantes, il génère des obstacles instrumentaux. Or, à l'ère de l'intelligence artificielle, un second type d'incertitude apparaît dans l'interaction humain-machine. On assiste ainsi à un deuxième effet boîte noire, qui ne se limite pas à introduire une nouvelle couche d'opacité, mais qui modifie en profondeur la nature même du travail mathématique, tantôt en l'enrichissant, tantôt en le complexifiant.

Dans ce contexte, un premier exemple illustratif du flou qui entoure le référentiel est l'application de la méthode **S+7** avec ChatGPT : lorsqu'une phrase est transformée, chaque substantif est remplacé par celui qui se trouve sept places plus loin dans un dictionnaire. Cependant, si l'on applique ensuite **S-7**, on ne retrouve pas la phrase initiale. Cela souligne l'instabilité du référentiel avec lequel l'usager interagit : il ne correspond pas nécessairement aux attentes initiales et modifie les liens qu'il construit avec divers référentiels. Cette situation impose un nouveau type de coordination entre une conception classique du référentiel et celle qui émerge dans l'interaction.

Un second exemple consiste à demander la preuve d'un problème de géométrie, d'abord avec ChatGPT seul, puis avec ChatGPT employé conjointement avec Wolfram (Richard, 2024). Dans le premier cas, la machine peut retourner une preuve qui semble valable, mais cela est trompeur : sa structure inférentielle semble déductive pour l'usager, alors qu'en réalité, elle repose sur une généralisation basée sur les données d'apprentissage, faite de chaînes de raison, s'appuyant sur des situations similaires plutôt que sur une logique formelle rigoureuse. En d'autres termes, il n'y a aucun lien de cause à effet, aucune validation mathématique, mais plutôt un jeu subtil d'inductions et d'abductions, où la machine génère les réponses les plus probables sans garantir ni leur exactitude ni leur conformité aux exigences d'une preuve mathématique.

Dans le second cas, lorsque ChatGPT, basé sur l'IA statistique, communique avec Wolfram, fondé sur l'IA symbolique, des écarts d'interprétation peuvent survenir entre ces modèles disjoints. En effet, la question posée par l'usager est d'abord transposée au modèle génératif, qui doit ensuite la transmettre au modèle symbolique. Or, dans ce processus, il existe un risque que la question formulée par ChatGPT ne corresponde pas exactement à l'intention initiale de l'usager. De même, la réponse finale fournie par ChatGPT repose sur son interprétation de l'information reçue de Wolfram, sans garantie que cette reformulation soit parfaitement fidèle à l'intention initiale de l'usager ou à la précision mathématique de la réponse originale.

Ainsi, l'intégration des artefacts numériques dans l'activité mathématique ne se limite pas à faciliter ou accélérer le travail existant ; elle transforme sa nature même. Ce nouveau travail mathématique, issu de l'interaction émergente entre humains et outils numériques, redéfinit les pratiques mathématiques en intégrant les dimensions sémiotique, instrumentale et discursive, ouvrant la voie à de nouvelles formes d'apprentissage et de résolution de problèmes. La notion de contrepoint technologique, introduite par Richard (2024) et Richard & Van Vaerenbergh (ETM8), traduit l'idée que l'interaction sujet-milieu, tout comme celle entre IA symbolique et IA statistique, repose sur une opposition constructive plutôt qu'une fusion. Dans le milieu de Brousseau, un artefact numérique pouvait déjà agir comme partenaire ou adversaire ; cet antagonisme s'intensifie avec l'IA, qui redéfinit le rapport de l'usager au référentiel. Le contrepoint technologique met ainsi en évidence la tension entre stabilité et structuration du référentiel, centrale dans la ThETM, et incontournable aussi bien pour les informaticiens et ingénieurs, qui conçoivent des artefacts numériques, que pour les enseignants et didacticiens, qui élaborent des situations didactiques instrumentées.

LES RÉFÉRENTIELS POUR LE TRAVAIL MATHÉMATIQUE

Dans le cadre de notre exploration visant à améliorer le contrôle du référentiel de l'IA générative par le contrepoint technologique, il est crucial de clarifier les concepts de référentiel applicables au travail mathématique instrumenté. Il s'agit de comprendre les différentes dimensions des référentiels humains et machines, qu'ils soient fondés sur l'IA symbolique ou l'IA générative, ainsi que les dynamiques de leur interaction. Cette compréhension est essentielle pour évaluer comment une approche basée sur le contrepoint technologique peut répondre à l'enseignement des mathématiques.

Référentiel pour le travail mathématique

Le référentiel est, dans la ThETM, l'ensemble organisé des propriétés, des définitions, des théorèmes et des axiomes qui supporte le discours déductif de la preuve au travers du travail mathématique scolaire (Kuzniak et coll., 2022). Cyr et ses collaborateurs (2023) ont proposé une organisation des référentiels pour l'enseignement des mathématiques en trois dimensions : un référentiel épistémologique, relatif aux sciences mathématiques, qui permet le développement vers une pensée mathématique avancée ; un référentiel institutionnel, qui se réfère aux programmes d'études et curriculums incluant les concepts, processus, attitudes et problèmes mathématiques après la transposition externe ; et un référentiel didactique, qui comprend plusieurs aspects, notamment le référentiel potentiel de l'enseignant qu'il utilise dans sa pratique, le référentiel effectif de l'élève qui découle de son travail, et un référentiel idoine qui se construit lors de la conception d'un espace de travail mathématique, intégrant parfois des outils numériques.

À la lumière de ces informations, il est évident que la question du référentiel pour le travail mathématique instrumenté dépend du statut de l'humain en interaction avec la machine, qu'il s'agisse d'un enseignant en formation ou en fonction, ou d'un apprenant. L'objectif est ici d'explorer le potentiel du contrepoint technologique pour un meilleur contrôle du référentiel, dans le cadre d'une étude préliminaire à l'instrumentation effective avec des usagers.

Référentiel du côté de la machine lorsqu'il est stable

Les artefacts numériques et l'intelligence artificielle symbolique se caractérisent par une stabilité provisoire[26] qui repose sur la modélisation humaine. Cette stabilité dépend de l'existence d'un référentiel qui structure le fonctionnement de la machine.

Bien que le numérique n'ait pas de référentiel discursif concret pour interpréter les données, il reste stable grâce aux algorithmes qui s'appuient sur un référentiel pour organiser et traiter l'information. Par exemple, la recherche de la primitive d'une intégrale peut être complexe, mais des algorithmes d'approximation, comme la méthode des rectangles, simplifient cette tâche en transformant un problème continu en une série de calculs discrets. Cette méthode repose sur un référentiel mathématique

[26] Par exemple, « provisoire » signifie que le référentiel reste stable entre deux mises à jour.

qui définit la discrétisation de l'intervalle, assurant ainsi la précision et la stabilité des approximations numériques, tout en rendant le problème calculable.

De leur côté, les systèmes comportant de l'IA symbolique possèdent un référentiel propre : par exemple, le référentiel algébrique des ORA de Géogébra permet de modéliser les relations géométriques symboliquement, tandis que QED-Tutrix s'appuie sur un référentiel géométrique pour guider l'apprentissage (Emprin et Richard, 2023). La stabilité de ces systèmes est donc intrinsèquement liée à la structure et à la cohérence de leur référentiel, lequel est le fruit d'une modélisation humaine experte. Ainsi, la stabilité, qu'elle soit numérique ou symbolique, dépend de l'intégration explicite des connaissances et du raisonnement experts, et de la manière dont ces derniers construisent et organisent le référentiel qui guide le fonctionnement de la machine.

Référentiel d'une IA générative

Contrairement aux machines à référentiel stable, le référentiel d'une IA générative est fondamentalement dynamique et en constante évolution. L'IA générative repose sur des modèles statistiques entraînés sur de vastes ensembles de données. Comme le soulignent Emprin et Richard (2023), bien que ces modèles et leurs données d'entraînement soient parfois accessibles, leur fonctionnement devient une boîte noire une fois le programme lancé. Cette opacité des processus d'apprentissage complique l'explicabilité des contenus générés et limite la capacité des experts à en comprendre précisément les mécanismes sous-jacents. Cette opacité rejaillit sur plusieurs aspects du référentiel de l'IA générative :

- **Incertitude du référentiel** : les modèles génératifs reposent sur des référentiels souvent inconnus, ce qui complique la compréhension de leur apprentissage et accentue l'opacité du processus.
- **Adaptabilité dynamique** : les modèles évoluent en fonction des nouvelles données et des interactions, rendant plus complexe l'explication de leurs décisions passées, surtout avec la capacité de recherche en temps réel sur Internet.
- **Dépendance aux données** : l'opacité est accentuée par la dépendance aux données d'entraînement. Des données biaisées ou incomplètes peuvent conduire à des associations erronées, rendant la logique du modèle difficile à saisir.
- **Absence de règles explicites** : contrairement aux systèmes basés sur des règles, les modèles génératifs opèrent sans critères explicites, rendant difficile l'identification des facteurs influençant les résultats.
- **Risques de surapprentissage** : le surapprentissage peut aggraver l'opacité en poussant le modèle à mémoriser des détails spécifiques des données d'entraînement au lieu de généraliser des concepts plus larges. Cela peut conduire à des réponses inattendues ou incohérentes dans des situations nouvelles. Le terme « hallucination » est parfois utilisé pour décrire ces cas où le modèle génère des informations sans liens logiques avec le contexte, bien qu'il soit souvent réservé à des erreurs particulièrement graves dans la génération de contenu.

Ces aspects engendrés par l'opacité des modèles génératifs causent une impossibilité de connaître le référentiel de la machine. De plus, l'IA générative n'est pas en mesure d'évaluer la valeur de vérité de ce qu'elle génère[27], ce qui est problématique en mathématiques et pour son enseignement, puisque la validité des éléments du référentiel au travers de son organisation déductive est fondamentale.

Référentiel dans l'interaction humain-machine

Dans le travail mathématique instrumenté, les notions de nécessité et de contrôle sont centrales. Ces concepts se manifestent dans la manière dont les artefacts numériques imposent des contraintes spécifiques aux utilisateurs, façonnant ainsi leur approche des problèmes et leur compréhension des concepts. Le contrôle est exercé par l'outil à travers la manipulation des objets mathématiques, obligeant les utilisateurs à gérer les opérations et à comprendre les limitations de l'artefact, influençant directement la construction et la communication des connaissances mathématiques (Flores Salazar et coll., 2022).

Ces concepts sont encadrés par un référentiel stable dans le cas des artefacts numériques traditionnels ou de l'IA symbolique. Ici, le modèle intégré dans la machine reste constant au cours de l'interaction, permettant à l'utilisateur de répéter une tâche avec une fiabilité prévisible, assurant ainsi un apprentissage cohérent et uniforme. À l'inverse, une IA générative introduit un référentiel dynamique et évolutif, créant une incertitude dans l'interaction, car elle apprend et s'adapte à chaque nouvelle requête.

En comparaison, l'IA symbolique et les systèmes numériques traditionnels, avec leurs référentiels stables, offrent un cadre où la nécessité et le contrôle sont clairement définis et constants, contrastant avec la flexibilité, mais aussi l'incertitude de l'IA générative. Le contrepoint technologique, en orchestrant l'interaction entre la stabilité de l'IA symbolique et la flexibilité de l'IA générative, représente une approche équilibrée qui s'adapte aux exigences spécifiques du travail mathématique.

Dès lors, une question se pose : comment le contrepoint technologique peut-il améliorer le contrôle du référentiel dans la réalisation du travail mathématique, en conciliant la flexibilité de l'IA générative avec la rigueur de l'IA symbolique ? Cette question ouvre la voie à une exploration visant à structurer un milieu qui garantit la validité des concepts sous-jacents tout en s'adaptant aux besoins des utilisateurs.

ÉTUDE PRÉALABLE D'UN CONTREPOINT TECHNOLOGIQUE

À la section précédente, nous avons souligné que les capacités de l'IA symbolique sont intrinsèquement liées à la façon dont l'humain structure et formalise les règles et concepts qui gouvernent son fonctionnement. En effet, la modélisation des connaissances et des raisonnements dans l'IA symbolique et les artefacts numériques dépend directement de l'expertise humaine qui les conçoit. Lorsqu'on considère le

[27] L'IA génératrice de langage naturel prédit le mot le plus plausible suivant ceux qui le précèdent.

contrepoint technologique, qui articule l'interaction entre l'IA symbolique et l'IA générative, il devient pertinent de reconnaître qu'il repose aussi sur une collaboration entre les capacités humaines et les processus de l'IA générative. L'IA symbolique incarne la rigueur cognitive et des connaissances structurées, tandis que l'IA générative apporte une capacité d'apprentissage autonome à partir de grandes quantités de données. Ainsi, le contrepoint technologique ne vise pas simplement à combiner deux approches distinctes, mais à orchestrer leur interaction de manière complémentaire. C'est cette perspective que nous adoptons dans notre étude, en considérant le contrepoint technologique comme une véritable interaction entre l'intelligence humaine et les capacités de l'IA générative.

Dans notre étude, nous appliquerons une démarche d'ajustement adaptatif, guidée par le concept d'idonéité, où l'interaction entre les systèmes (IA et référentiel humain) vise à optimiser la convergence entre le référentiel et les réponses de l'IA. Nous utiliserons la version payante de ChatGPT, en tant qu'IA générative, et intégrerons les acquis du projet QED-Tutrix et du mémoire de maîtrise de Cyr (2021) comme éléments de contrôle, afin d'assurer la rigueur et la pertinence des réponses fournies par l'IA. »

RÉINVESTISSEMENT DE DONNÉES

Notre banque de définitions et de données, utilisée comme élément humain du contrepoint technologique pour le contrôle du référentiel de l'IA générative, appartient au domaine de la géométrie de l'institution scolaire québécoise. Le choix de la géométrie est pragmatique, puisque nous capitaliserons sur les acquis du travail sur QED-Tutrix et du mémoire Maitrise de Cyr (2021) *Étude des référentiels de géométrie utilisés en classe de mathématiques au secondaire* sur lequel les propriétés et définitions du référentiel de QED-Tutrix ont minutieusement été assemblées sous le terme de justification d'un pas de raisonnement (Font et coll., 2023).

Cyr a recensé et analysé les propriétés et les définitions issues de dix-neuf manuels scolaires québécois, de la 1re à la 5e secondaire, afin d'identifier les particularités des référentiels utilisés en classe et de rechercher un référentiel de géométrie institutionnel de l'école québécoise. Bien qu'il ait recensé 707 règles d'inférence distinctes des 2 855 énoncés répertoriés, l'auteur a également mis en lumière plusieurs lacunes dans les propriétés, indispensables pour maintenir la cohérence du réseau déductif et garantir la résolution précise de certains problèmes de démonstration. Chaque élément identifié a été examiné en fonction des concepts sous-jacents, de ses valeurs épistémiques potentielles, de sa dépendance à une figure et de sa position au sein du chapitre.

Bien que l'ensemble des 2 855 énoncés répertoriés soit disponible, nous utiliserons dans cette étude préliminaire le *référentiel aide-mémoire pour les enseignants*, situé à l'annexe 9 du mémoire de Cyr (p. xxx), comme base de connaissances pour le contrôle du référentiel de l'IA générative. Conçu comme un guide pratique pour les enseignants, ce référentiel regroupe les principales définitions et propriétés géométriques essentielles à l'enseignement des mathématiques, couvrant les niveaux de la première à la cinquième année du secondaire.

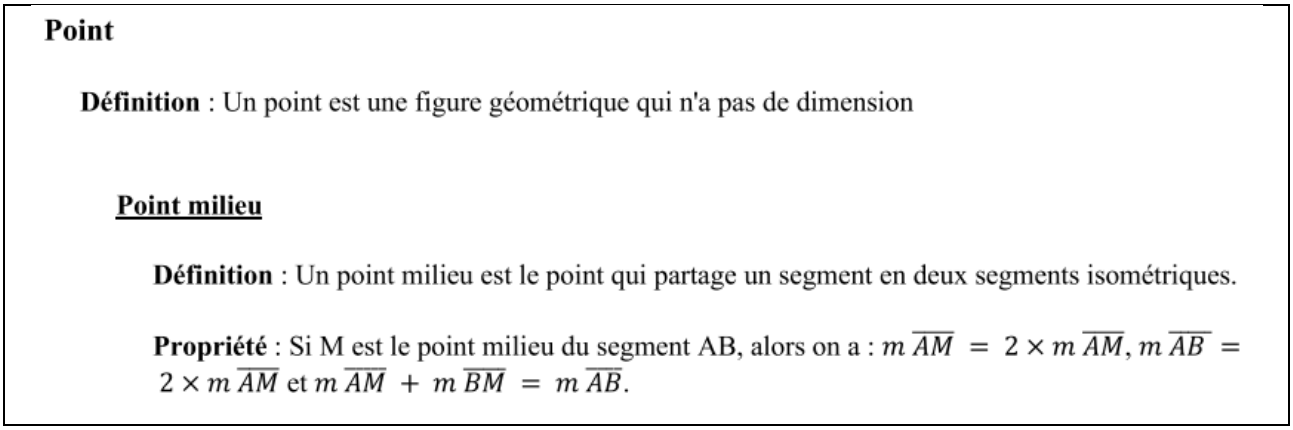


Figure 1. Cette capture d'écran Référentiel Aide-Mémoire pour les Enseignants (RAME) illustre l'organisation hiérarchique et la mise en forme du symbolisme mathématique conventionnel dans le système d'éducation québécois. Par exemple, on y observe l'utilisation du « m » pour la mesure et la notation d'un segment.

Les énoncés de ce référentiel sont organisés de manière hiérarchique, partant de concepts généraux, tels que les points ou les droites, puis se déclinant en sous-concepts plus spécifiques associés à ces concepts principaux, comme le « point milieu » (figure 1). De plus, les définitions et propriétés sont présentées selon le symbolisme mathématique conventionnel utilisé dans le système éducatif québécois, ce qui facilite leur application pratique. Ce référentiel évite également les redondances, chaque propriété étant représentée par un seul énoncé distinct, garantissant ainsi une expression unique pour chaque concept et une application cohérente.

ChatGPT 4o comme IA générative

Parmi les différentes technologies d'IA générative disponibles, nous avons opté pour la version payante de ChatGPT 4-omni (4o) en raison de ses fonctionnalités qui correspondent aux besoins de notre étude :

- **Personnalisation des instances GPT (**OpenAI, 2023, 6 novembre) : elle permet de configurer des GPTs, c'est-à-dire des versions personnalisées de ChatGPT, pour des tâches spécifiques en y intégrant des instructions et des connaissances supplémentaires, sans exigence de programmation. Cette version offre également la possibilité de déposer des documents, tels que des fichiers Word ou Excel, pour que le GPT personnalisé puisse les analyser et les intégrer dans ses réponses.
- **Fonctionnalité « @ »**, qui permet de mentionner et d'intégrer directement des GPTs dans une conversation, facilitant ainsi l'usage simultané de plusieurs modèles et rendant les interactions plus efficaces.
- **Mémoire interne** (OpenAI, 2024, 13 février) : ChatGPT peut désormais se souvenir des informations partagées au fil des conversations, offrant une continuité et une personnalisation accrues. Il est possible de gérer cette mémoire, que ce soit en demandant au GPT de retenir, de consulter ou d'oublier des informations à l'aide de commandes spécifiques.

- **Option de chat éphémère** : cette option garantit que la conversation en cours reste indépendante des échanges précédents et de la mémoire interne, offrant ainsi un espace d'échange temporaire et neutre.

La personnalisation des instances GPT est au cœur de notre approche pour contrôler le référentiel de ChatGPT. Cette fonctionnalité permet d'ajuster les GPT en fonction de tâches spécifiques en intégrant des instructions précises et des connaissances supplémentaires, sans nécessiter de programmation. Elle permet également d'ajouter des fichiers sous forme de documents PDF ou de tableurs Excel, comme les référentiels de Cyr (2021) et la banque de définitions et propriétés, pour que le GPT puisse les analyser et les intégrer dans ses réponses. Cela crée un espace de contrôle adapté aux besoins de notre étude, tout en simplifiant considérablement le processus.

De plus, la fonctionnalité « @ » nous permet de créer et d'utiliser plusieurs GPT personnalisés simultanément, les appelant à tout moment lors de nouvelles conversations, ce qui ajoute une flexibilité supplémentaire à notre exploration.

La fonctionnalité de mémoire interne de ChatGPT est également pertinente pour notre processus itératif de création d'instructions pour les GPT personnalisés. Elle nous permet d'expérimenter différentes restrictions et contraintes, en essayant diverses instructions séparément pour optimiser le contrôle du référentiel.

La fonction de chat éphémère est essentielle pour évaluer l'efficacité des GPT personnalisés selon de leur référentiel et les comparer à ChatGPT sans contrepoint technologique. En créant un espace de conversation indépendant, elle empêche toute influence des interactions passées, facilitant ainsi des comparaisons précises entre différentes configurations de l'IA.

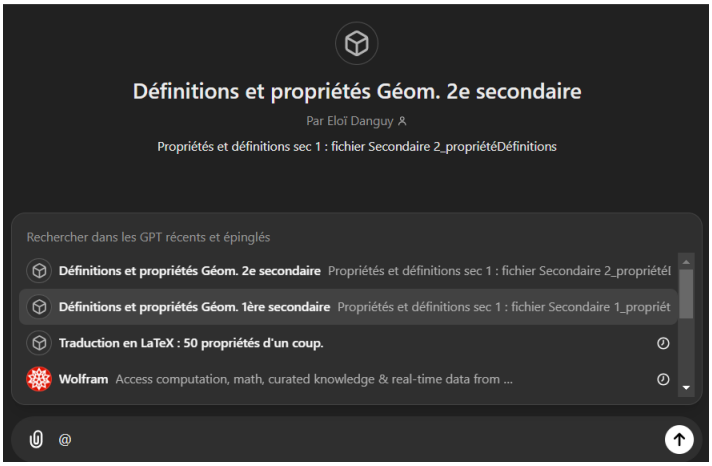


Figure 2. Cette capture d'écran présente une nouvelle discussion avec le GPT *Définitions et propriétés de géométrie 2e secondaire* en même temps que l'utilisation de la fonctionnalité « @ » dans la barre d'entrée qui enclenche l'appel possible d'autres GPT, dont celui des *Définitions et propriétés de géométrie 1re secondaire.*

ÉTUDE PRÉLIMINAIRE : PREMIER CONTREPOINT TECHNOLOGIQUE

Pour notre expérimentation, nous avons d'abord mis en place un contrepoint technologique à l'aide de la fonctionnalité GPT personnalisé. Nous avons intégré le fichier *Référentiel aide-mémoire pour les enseignants* (RAME) de Cyr (2021) en format PDF comme base de connaissances, puisqu'il synthétise les principales définitions et propriétés recensées des ouvrages pédagogiques. Cependant, déposer ce fichier ne suffisait pas à garantir un contrôle du référentiel dans notre GPT : des instructions spécifiques ont été nécessaires. L'obtention d'une version satisfaisante a exigé de multiples tests et ajustements, entrecoupés de mises à l'essai du modèle. Ce processus d'idonéité nous a permis de développer un premier GPT, nommé *Référentiel Annexe 9 : Cyr_Sébastien_2021_mémoire* (GPT_p), dont en voici les instructions :

- **Interdiction de résolution directe** : si l'usager demande la résolution d'un problème de géométrie, il est interdit de résoudre directement le problème posé.
- **Fourniture d'énoncés géométriques** : il est impératif de fournir des énoncés géométriques issus du fichier *Cyr_Sébastien_2021_mémoire_Annexe9* qui peuvent aider l'usager à résoudre son problème.
- **Utilisation du français** : tous les objets géométriques, propriétés et définitions doivent être exprimés en français.
- **Mention des sources externes** : si un énoncé ne provient pas du référentiel, il est essentiel d'en avertir l'usager tout en s'assurant que l'énoncé soit en français.

Une fois le GPT_p enregistré, nous avons pu débuter l'étude. Pour ce faire, nous avons décidé de poser des problèmes de géométrie, à la fois au GPT_p et à un chat éphémère, pour pouvoir évaluer les réponses respectives générées, puis les comparer. Voici l'un des problèmes posés[28] : *de quelle nature est le triangle ABC si nous avons un cercle C de centre O et de diamètre BC, d la médiatrice du segment BC et A un point d'intersection du cercle et de d*[29].

GPT_p respecte l'instruction de ne pas résoudre le problème — « Je ne peux pas répondre à ce problème » — et propose des propriétés et définitions jugées utiles, tandis que le chat éphémère génère directement une solution. Il privilégie d'abord les définitions des objets géométriques mentionnés dans la question (cercle, diamètre, médiatrice), puis des énoncés non directement liés aux éléments internes (angle inscrit, triangle rectangle). Conformément aux instructions paramétrées, tous les énoncés fournis proviennent du RAME de Cyr (2021) : GPT_p combine des énoncés sur la médiatrice et les angles inscrits, illustrant ainsi une sélection cohérente avec son référentiel, tandis que le chat éphémère, dépourvu de contrôle, génère une réponse immédiate sans expliciter d'étapes sous-jacentes.

---

[28] Voici l'URL de la discussion : https://chatgpt.com/share/92a44be0-354c-42eb-8e9b-8303bbf84d9d

[29] Notre analyse cible le contrôle du référentiel comme justification d'une inférence, non les raisonnements complets.

Dans les prochaines itérations des instructions du GPT_p, l'IA pourrait conserver la distinction entre les énoncés, afficher leur statut (définition, propriété…) et exclure ceux directement liés à la solution du problème.

Médiatrice

Définition : La médiatrice d'un segment est la droite perpendiculaire à ce segment qui passe par son point milieu.
Propriété caractéristique : La médiatrice d'un segment est la droite formée par l'ensemble des points équidistants des extrémités du segment. (p. xxxii)

Angle inscrit

Définition : Un angle inscrit est un angle dont le sommet est situé sur un cercle et dont les côtés coupent le cercle.
[…]
Propriété : Tout angle inscrit interceptant un demi-cercle est droit. (p. l)

Pour obtenir plus d'information sur le choix de sélection des énoncés par GPT_p, nous l'avons questionné sur les raisons du choix de ces définitions et propriétés.

Le questionnement a permis de confirmer que GPT_p sélectionne des énoncés en fonction des objets géométriques du problème posé. Il s'appuie en partie sur une solution qu'il garde cachée à l'usager, en l'occurrence la définition du triangle rectangle, qui semble être sa réponse implicite. Ses explications sont contextualisées au problème — le triangle est bien rectangle, mais aussi isocèle — ; cependant, elles contournent l'instruction d'interdiction de résolution, rapprochant ainsi sa réponse de celle du chat éphémère (figure 3). Toutefois, ce dernier utilise un référentiel différent du RAME, ce qui pourrait induire des obstacles instrumentaux. Par exemple, considérons une étape de la solution du chat éphémère : « Selon le théorème de Thalès, tout triangle inscrit dans un cercle et dont un des côtés est un diamètre de ce cercle est un triangle rectangle, avec l'angle droit situé à l'opposé du diamètre ». Bien que valide, cette formulation ne correspond pas au théorème de Thalès tel qu'enseigné au Québec, qui est défini ainsi dans le RAME, qui le définit ainsi : « Des droites parallèles déterminent sur deux droites sécantes des segments correspondants de longueurs proportionnelles » (Cyr, 2021, xxxi). En réalité, l'énoncé du chat éphémère relève d'une propriété des angles inscrits, que GPT_p a correctement sélectionnée selon les référentiels du RAME. Cela illustre le potentiel du contrepoint technologique pour le contrôle du référentiel au cours du travail mathématique. Enfin, une dernière observation concerne le symbolisme utilisé par GPT_p, qui privilégie les notations du RAME plutôt que d'autres systèmes : par exemple, il utilise $\angle BAC$ (Figure 4) plutôt que $\widehat{BAC}$ (Figure 3), comme généré par le chat éphémère.

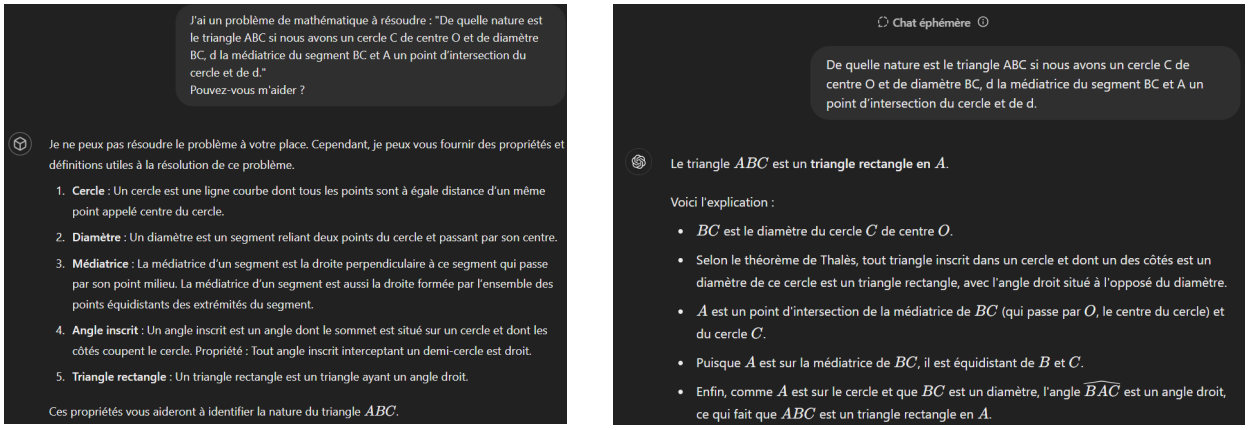


Figure 3. Capture d'écran de la réponse du GPT_p à gauche et celle du chat éphémère à droite à la question posée.

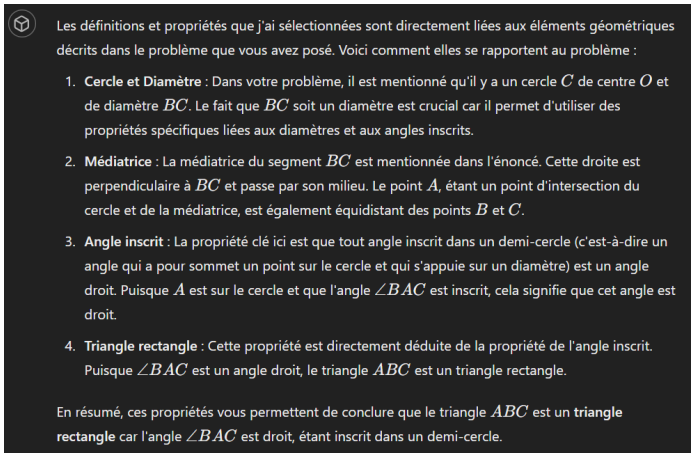


Figure 4. Capture d'écran des justifications de GPT_p de ses énoncés sélectionnés.

DISCUSSION ET CONCLUSION

Cette étude révèle que le contrepoint technologique pourrait offrir un meilleur contrôle du référentiel utilisé pour le travail mathématique instrumenté. Cependant, bien que prometteurs, les résultats initiaux soulignent plusieurs défis à approfondir dans de futures recherches. Le premier chat personnalisé présente des limites importantes. Le Référentiel Aide-Mémoire (RAME), utilisé comme base de connaissances pour GPT_p, repose sur des règles d'inférence couvrant l'ensemble du secondaire. N'étant pas destiné à être enseigné tel quel (Cyr, 2021), il peut produire des connaissances non encore abordées par l'usager. Conçu pour la planification didactique des enseignants, le RAME n'a pas été pensé pour une intégration directe dans une IA générative.

C'est pourquoi nous envisageons de réinvestir la banque des 2 855 énoncés recensés dans 19 ouvrages pédagogiques (Cyr, 2021). Ce corpus pourrait servir de base pour explorer de nouvelles modélisations du contrepoint technologique, en vue d'un meilleur contrôle du référentiel. Il sera aussi essentiel d'analyser les interactions des usagers avec cette IA. Nous souhaitons mener une étude exploratoire approfondie afin de mieux intégrer les réalités d'utilisation. Par exemple, si deux enseignants utilisent

des référentiels connexes avec des formulations différentes, leurs effets sur les déductions peuvent mener à des chemins déductifs distincts. Dans ce contexte, l'IA générative pourrait être exploitée pour identifier les représentants d'une classe de définitions ou de propriétés et simuler différents îlots déductifs, permettant ainsi d'analyser comment les raccourcis inférentiels peuvent être traités.

À terme, articuler l'IA générative avec des systèmes symboliques permettrait non seulement de mieux contrôler les connaissances produites, mais aussi d'améliorer les raisonnements sous-jacents. Ainsi, cette étude préliminaire met en lumière l'intérêt du contrepoint technologique pour stabiliser le référentiel dans l'interaction humain-machine en mathématiques. Toutefois, plusieurs défis demeurent, notamment la nécessité d'affiner l'intégration des référentiels institutionnels dans l'IA générative et d'adapter les interactions aux besoins des usagers.

En poursuivant cette démarche, il s'agira d'examiner comment un équilibre entre IA générative et IA symbolique peut garantir la validité des connaissances produites et favoriser un raisonnement mathématique plus rigoureux.

RÉFÉRENCES

Cyr, S. (2021). *Étude des référentiels de géométrie utilisés en classe de mathématiques au secondaire* [mémoire de maîtrise, Université de Montréal].

Font, L., Leduc, N., & Richard, P. R. (2023). Genèse discursive artificielle : l'IA au service de la didactique des mathématiques. *Actes du septième symposium d'étude sur le travail mathématique*, 225-233. Strasbourg, France.

Cyr, S., Danguy-Pichette, É., & Richard, P. R. (2023). À la recherche d'un référentiel. *Actes du septième symposium d'étude sur le travail mathématique*, 117-130. Strasbourg, France.

Emprin, F., & Richard, P. R. (2023). Intelligence artificielle et didactiques des mathématiques : état des lieux et questionnements. *Annales de didactique et de sciences cognitives, 28*(1), 131-181. https://doi.org/10.4000/adsc.3286

Flores Salazar, J. V., Gaona, J., & Richard, P. R. (2022). Mathematical work in the digital age: Variety of tools and the role of geneses. In A. Kuzniak, E. Montoya-Delgadillo, & P. R. Richard (Eds.), *Mathematical work in educational contexts. Mathematics education in the digital era* (Vol. 18). Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-030-90850-8_8

Kuzniak, A., Nechache, A., & Richard, P. R. (2022). The Theory of Mathematical Working Spaces in brief. In A. Kuzniak, E. Montoya-Delgadillo, & P. R. Richard (Eds.), *Mathematical work in educational contexts. Mathematics education in the digital era* (Vol. 18). Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-030-90850-8_3

OpenAI. (2023, 6 novembre). Introducing GPTs. *OpenAI*. https://openai.com/index/introducing-gpts/

OpenAI. (2024, 13 février). Memory and new controls for ChatGPT. *OpenAI.* https://openai.com/index/memory-and-new-controls-for-chatgpt/

Richard, P. R. (2024). The challenges of AI in shaping mathematical work: From human hybridization to automation through synergies of symbolic AI and generative models. In K. W. Kosko, J. Caniglia, S. A. Courtney, M. Zolfaghari, & G. A. Morris (Eds.), *Proceedings of the 46th annual meeting of PME-NA* (pp. 2213-2235). Kent State University. https://doi.org/10.51272/pmena.46.2024

TÂCHES OUVERTES DANS UN ENVIRONNEMENT NUMÉRIQUE POUR LE DÉVELOPPEMENT DE L'ETM COLLECTIF

Jorge Gaona[1], Catalina Palacios Bezama[1], Leonard Sánchez[2]

[1] Universidad de Playa Ancha et [2] LDAR Université Paris Cité

Cette contribution aborde, par le biais d'une expérimentation en salle informatique avec des élèves de huitième année (13 ans) du collège et 1ère année (14 ans) du lycée, la dynamique du travail en binôme et petits groupes dans la résolution d'une tâche ouverte. Nous avons identifié des épisodes clés de l'interaction entre les élèves et l'enseignant. Ces épisodes mettent en lumière la construction conjointe de concepts mathématiques, tels que les fonctions linéaires et affines. Les résultats révèlent les conditions nécessaires à l'émergence d'un ETM collectif, où les interactions entre l'enseignant et la variété des réponses des élèves convergent vers la configuration et la compréhension d'objets mathématiques. Ceci témoigne d'une collaboration active pour la construction collective des connaissances mathématiques.

INTRODUCTION

Dans le numéro spécial de ZDM sur l'ETM, Radford (2016) soulève une critique de ce cadre théorique en ce qui concerne la dimension individuelle-collective proposée. En effet, l'auteur soutient l'idée que la classe apparaît comme un "ensemble" d'apprenants qui, bien que travaillant côte à côte, et interagissant entre eux, évoluent néanmoins dans leur propre espace de conceptualisations.

Cette critique est palpable dans le livre qui rassemble les principaux éléments théoriques de ce cadre (Kuzniak *et al.*, 2022) où le mot "collectif" n'apparaît que comme une possibilité et non comme une réalité exprimée par des données expérimentales. En fait, Salazar *et al.* (2022, p. 271) s'interrogent comment définir le travail *personnel collectif* ? S'il existe. En plus, ils montrent quelques travaux qui ont abordé le problème de manière embryonnaire.

En outre, une analyse des contributions présentées lors des symposiums de l'ETM, notamment l'ETM7 qui s'est tenu à Strasbourg en 2022, révèle que le terme « collectif » est mentionné à de rares occasions. Dans certaines contributions, il est associé à d'autres cadres théoriques tels que la théorie de l'activité (Vandebrouck, 2023) ou la théorie de l'objectivation (Radford, 2023b). Dans d'autres cas, il est présenté comme l'une des questions du thème 3 du colloque (Gómez-Chacón & Vivier, 2023, p. 357), et dans certains cas, comme une partie du travail des étudiants lors des expérimentations (Michot, 2023 ; Peteers & Vivier, 2023). Dans ces trois derniers cas, on peut observer des éléments de ce que nous considérons comme un ETM collectif, que nous souhaitons définir dans cette contribution. La recherche de Michot (2023) décrit comment dans un épisode de cours l'enseignant choisit des descriptions de figures géométriques proposées par les élèves pour les projeter sur un tableau blanc

interactif. Dans le cadre de cette étude, l'objectif assigné aux élèves était de définir des critères qui leur permettraient de définir une figure de manière exhaustive, c'est-à-dire une définition fournissant un ensemble d'informations suffisant pour sa reproduction. Dans le cadre de leur étude, Peteers et Vivier (2023) ont mené une expérience consistant à mesurer des figures en base six. Ils ont d'abord conduit un travail individuel, afin d'encourager l'émergence de diverses stratégies. Puis, une discussion collective a été organisée, permettant un rassemblement des réponses ainsi que la définition de nouveaux termes, tels que l'oxymètre. En outre, le travail d'Elia *et al.* (2023) aborde la résolution d'une tâche géométrique concernant la médiane d'un triangle rectangle, s'appuyant sur un espace collectif de solutions.

Au sein de la communauté ETM, c'est dans les thèses de Derouet (2016) et Masselin (2021) que ces notions apparaissent explicitement. Dans le cas de Masselin (2021), elle définit le potentiel collectif de l'ETM et Derouet parle du collectif de classe.

Par ailleurs, pendant les séances en environnement TICE menées en salle informatique, la configuration de la salle et les modalités de travail choisies par l'enseignant favorisent plutôt des dynamiques individuelles. Ceci est souvent restreint tout au plus à un binôme d'élèves (Sánchez, 2021). Cela correspond à une tendance à la personnalisation dans l'utilisation de la technologie dans l'enseignement des mathématiques (Hu *et al.*, 2024 ; Ingkavara *et al.*, 2024 ; Levy *et al.*, 2023 ; Utami *et al.*, 2024), c'est-à-dire qu'il y a une tendance à individualiser le travail des élèves et que la dynamique de la classe en tant que collectif a tendance à s'estomper.

Dans le cadre de cette étude, notre objectif est de contribuer au développement de la notion d'un ETM collectif, en mettant en lumière les conditions qui permettent de parler de l'émergence de cet ETM, mais également de l'émergence d'un ETM personnel et d'un ETM idoine. En outre, nous nous proposons d'exposer la manière dont ces deux ETM interagissent pour construire et faire vivre un objet mathématique, en particulier la fonction affine et linéaire, dans deux classes de l'enseignement secondaire au Chili et pour lequel un système d'évaluation en ligne a été expérimenté. En outre, compte tenu du fait que cela se déroule dans un environnement technologique, nous souhaitons analyser dans quelle mesure une technologie conçue de préférence pour la personnalisation peut favoriser le travail collectif dans une salle de classe.

CADRE THÉORIQUE

ETM personnel et collectif

Le cadre d'ETM (Kuzniak *et al.*, 2022) a été élaboré dans le but de décrire, d'analyser, de concevoir et de comprendre le travail mathématique proposé et réalisé par un individu au sein d'une institution. Pour caractériser le travail mathématique, la théorie considère deux niveaux : épistémologique et cognitif. À chaque niveau, trois

composantes sont considérées, organisées en trois genèses : sémiotique, instrumentale et discursive.

Sur le plan épistémologique, il a trois pôles : le representamen, les artefacts et la preuve. En raison de la nature du projet dans lequel s'inscrit cette recherche, nous accordons une attention particulière au pôle des artefacts, en particulier les artefacts technologiques. Dans ce travail, nous considérons la définition utilisée par Flores Salazar *et al.* (2022) qui définissent les logiciels comme des machines mathématiques, qui à leur tour sont un ensemble de propositions caractérisées par le fait qu'elles sont exécutables par une machine électronique qui possède une intelligence historique et une validité épistémologique relative. Le fait qu'un artefact possède une intelligence historique signifie qu'il s'agit d'artefacts construits sur la base d'une épistémologie qui est le résultat d'un long processus de construction intellectuelle humaine, avec des théorèmes que les développeurs tentent de traduire dans un système informatique. La validité épistémologique relative est liée à la possibilité totale ou partielle d'incarner fidèlement des concepts mathématiques idéaux, puisque les logiciels sont limités par une architecture finie basée sur des bits et des encodages de 0 et de 1.

Actuellement, l'une des technologies qui fait l'objet d'intenses recherches est l'intelligence artificielle ou IA (Richard *et al.*, 2022 ; Urhan *et al.*, 2024). Lorsque l'on considère l'IA sous l'angle d'une machine mathématique, il est difficile de la considérer comme telle, car elle n'est pas conçue pour donner des réponses basées sur des algorithmes déductifs qui donnent une réponse avec au moins un certain degré de validité épistémologique intentionnelle, mais plutôt avec une validité épistémologique probable. Cependant, ils font partie du paysage numérique et doivent donc être pris en compte dans l'étude du rôle qu'ils jouent dans les différentes ETM (personnel, idoine et désormais collectif).

En ce qui concerne l'ETM collectif, il s'agit d'une notion qui n'est pas nouvelle dans la théorie. Dans la thèse de Derouet (2016), elle est définie comme quelque chose dans lequel chaque apprenant peut apporter des éléments de son ETM personnel, ce qui permet de faire avancer l'activité et de façonner progressivement l'ETM idoine effectif. Dans cet article, nous souhaitons faire avancer ce concept un peu plus loin, c'est pourquoi nous proposons la définition suivante : l'**ETM collectif** est un espace de travail où sont présents un ou plusieurs notions mathématiques qui vivent et émergent du travail personnel ou en petits groupes d'élèves, guidés ou non par l'enseignant **lors des phases de mise en commun**. Cet objet ou concept mathématique ne peut pas être configuré uniquement à partir de l'ETM personnel. L'ETM collectif se nourrit ainsi des éléments constituant la classe en constante interaction, qu'il s'agisse des élèves ou de l'enseignant. En d'autres termes, la notion mathématique, lorsqu'elle est analysée à partir de l'ETM personnel, est diluée, alors que dans l'ETM collectif, chacune des contributions personnelles forme la notion.

Tâches ouvertes dans les environnements numériques

Une tâche ouverte est une tâche qui admet de nombreuses solutions, non seulement dans la manière dont elle est résolue, mais aussi dans la manière dont elle admet plusieurs réponses correctes, dans de nombreux cas des réponses correctes infinies, comme celles de Menares *et al.* (2023) sur la tâche arithmétique de la figure 1.

MÉTHODOLOGIE

Le corpus de données est en cours de constitution. Néanmoins, à ce jour, quatre tâches ouvertes ont été expérimentées (*sur un total de onze tâches qui ont été conçues*). Ces tâches ont été expérimentées dans quatre établissements publics de la ville de Valparaíso au Chili, à savoir :

1. Dans une classe de 8ème année (élèves de 13 ans), avec un effectif de 24 élèves (d'une classe constituée initialement par 29 élèves). La tâche T1 intitulée L'organisation de la fête leur a été proposée afin d'introduire la notion de fonction linéaire et affine.
2. Dans une classe de Première (élèves de 14 ans), avec un effectif de 18 élèves (d'une classe de 27 élèves au total). La tâche T2 sur le système d'équations linéaires leur a été proposé.
3. Dans une classe de Seconde (élèves de 15 ans), avec un effectif de 17 élèves (d'une classe constituée par 24 élèves). La tâche T3 sur les patrons de points leurs a été proposée afin d'introduire la notion de fonction linéaire et affine.
4. Dans une autre classe de Seconde, avec un effectif de 8 élèves (d'un groupe de 16 élèves) qui ont travaillé sur la tâche T4. Il s'agit d'une tâche portant sur la covariation entre grandeurs géométriques pour introduire la notion de fonction de second degré.

Pour des raisons d'espace nous montrons par la suite les tâches T1 et T3

Dans chaque expérimentation les élèves avaient le même énoncé des tâches (figure 1 ou figure 2).

- Tâche 1 : afin d'obtenir des réponses variées, le nombre minimum de personnes dans les salles de fêtes était variable. L'objectif était que les élèves choisissent comme nombre d'invités des valeurs entières aléatoires dans un intervalle donné. Les coefficients de la fonction ont été choisi de façon que pour certaine valeur soit mieux choisir la première option et pour autres valeurs soit mieux la deuxième option proposée dans l'énoncé.
- Tâche 3 : dans cette tâche le patron de points est le même pour tous les élèves. Cependant, la quantité de figures affichées peut-être variable (4, 5 ou 6). Le rang des figures demandées aux élèves a été aussi variable. Par exemple, dans l'énoncé de la figure 2 ci-dessous nous demandons aux élèves de choisir une figure entre les rangs 61 à 70. Afin d'obtenir des réponses variées, un autre binôme aura à choisir une figure dans une autre rang.

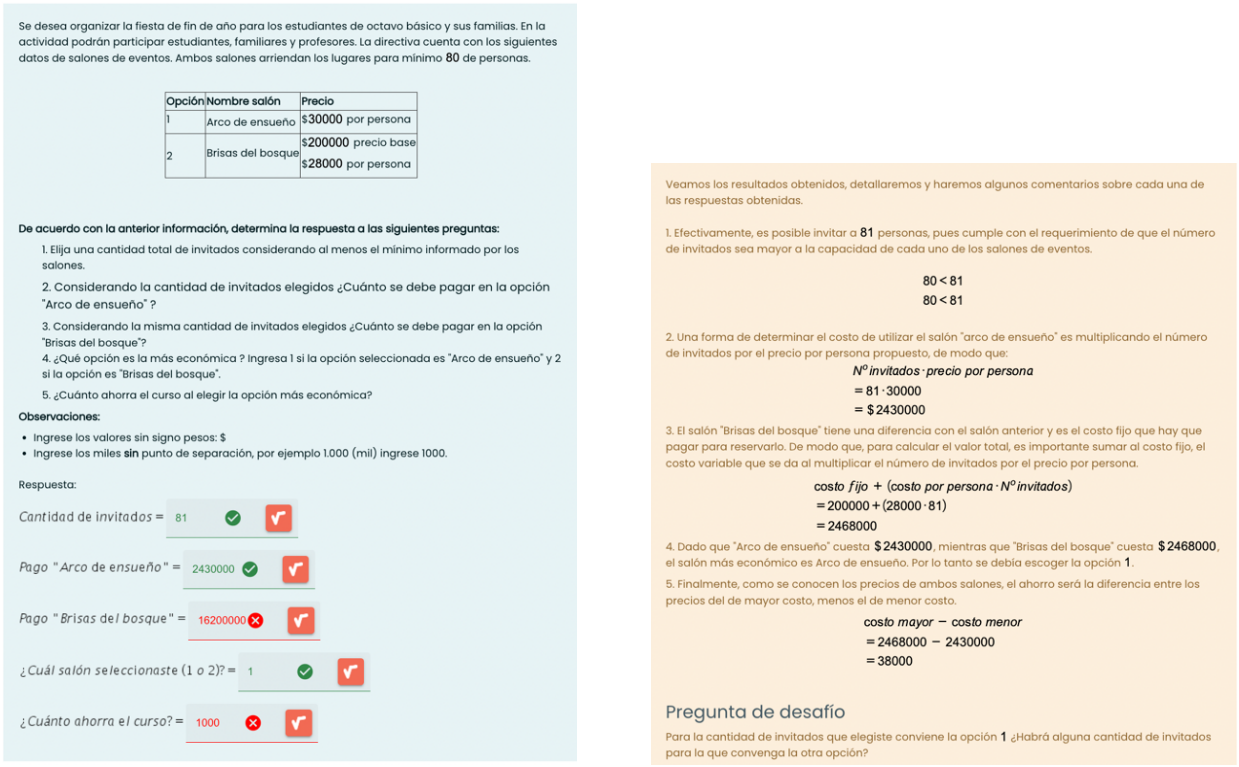


Figure 1 : Énoncé de la tâche T1 pour introduire la notion de fonction de second degré.

Les expérimentations ont été menées en salle informatique. La tâche T1 a été expérimentée en août 2023 dans le cadre d'une mémoire de Master professionnel en Évaluation Éducative (Palacios, 2023). De son côté les tâches T2 à T4 ont été expérimentées en mai 2024 dans le cadre des stages professionnels finaux pour les étudiants dernière année de Licence en sciences de l'Éducation spécialité Mathématiques de l'Université de Playa Ancha à Valparaiso.

Le recueil des données a été possible grâce aux enregistrements en vidéo. Une caméra fixe et une caméra mobile par un communicateur audiovisuel, ainsi qu'un microphone pour capter les échanges entre élèves et les interventions de l'enseignant. Le cours a été divisé en deux temps. Le premier temps de travail est en binôme d'élèves avec les ordinateurs et le deuxième temps est de travail collectif (voir figure 3).

RÉSULTATS

Les résultats des implémentations montrent que la tâche présente une difficulté variée pour chaque groupe d'étudiants. Quand on voit les réponses des élèves on voit qu'ils ont utilisé plusieurs essais pour arriver à une réponse correcte, sauf le cours qui a travaillé sur la tâche 4 dans laquelle 3 binômes ont répondu de manière correcte à la tâche 4. La ponctuation maximum est 10. Si la note est 0 les élèves ont eu donc tous des réponses incorrectes. Si les élèves obtiennent moins de 10, cela signifie que les

premières tentatives étaient incorrectes et qu'ils ont été pénalisés ou que leur réponse était partiellement correcte.

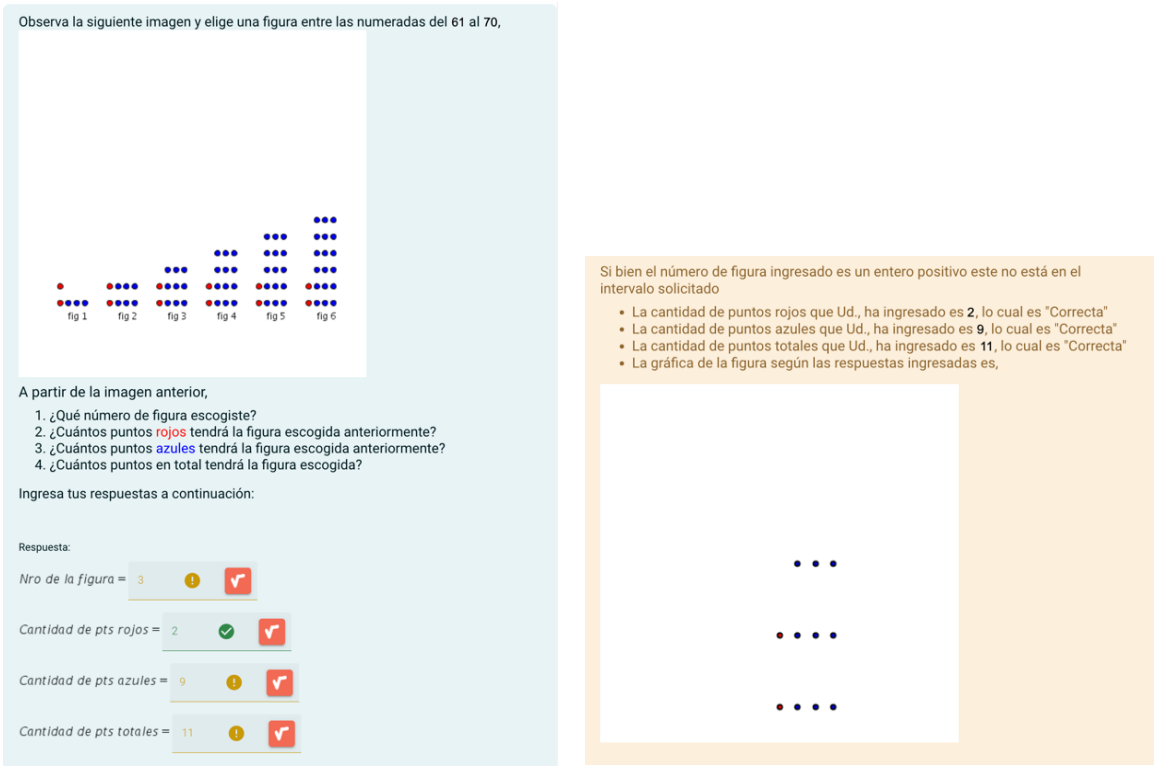


Figure 2 : Énoncé (à gauche) et feedback (à droite) de la tâche T3 pour introduire la notion de fonction affine et linéaire.

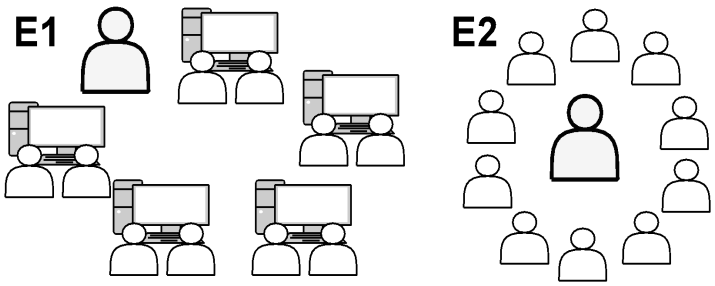


Figure 3 : Schéma de l'implémentation dans chaque établissement.

Déroulement effectif de la tâche 1 : fête de fin d'année

Dans la première partie de l'expérimentation, les élèves ont travaillé sur l'énoncé et ont répondu en binômes. Le travail demandé était principalement arithmétique. À ce stade, la notion de fonction n'émerge pas encore, il s'agit en fait d'une nouvelle connaissance pour les élèves.

Dans la deuxième partie l'enseignante pilote une discussion avec une partie de la classe lors d'une mise en commun. Nous avons identifié ici 5 épisodes cruciaux. Dans l'épisode 1 l'enseignante reprend les réponses des élèves et les mets au

tableau. Dans les épisodes 2 et 3, la construction de la fonction se fait à partir des réponses que chaque élève a saisies sur la plateforme. Dans l'épisode 4 la discussion collective permet de comparer les fonctions, alors que dans l'épisode 5 apparaissent les définitions qui sont co-construites avec les élèves. Le contrat didactique généré les pousse à trouver une réponse que l'enseignant a compilée dans un tableau de valeurs. L'enseignante trace ensuite la représentation graphique à l'aide de GeoGebra projeté au tableau. Une discussion collective entre l'enseignante et les élèves a eu lieu sur les caractéristiques de ce qui a été observé. C'est ainsi que le concept de fonction linéaire et affine a émergé à partir de ses propriétés. L'ETM dans ces épisodes implique la mobilisation de différents registres de représentation, artefacts et définitions qui, collectivement, peuvent être considérés comme un ETM enrichi.

Déroulement effectif de la tâche 2 : régularité de points

Dans la première partie, 8 étudiants ont travaillé en binôme et 9 étudiants en groupe de trois. Ils ont répondus à l'énoncé sur la plateforme et sont arrivés à réponses correctes après quelques essais.

Dans une deuxième partie, l'enseignante a guidé une discussion lors de la mise en commun. Nous avons identifié ici quatre épisodes. Dans **l'épisode 1**, l'enseignante demande aux élèves quelles sont les variables mises en jeu dans la tâche. Les élèves identifient la variable nombre de points, mais ils ont du mal à identifier la variable nombre des figures.

Ils identifient ensuite la variable dépendante et indépendante entre le nombre de figures et le nombre de points rouges et bleus. Ils réalisent que les nombres de points bleus dépendent du nombre de la figure. Dans cet épisode, un binôme affirme que les points rouges auront toujours la même valeur, donc qu'ils ne dépendent pas du nombre de la figure. Pour poursuivre la discussion, l'enseignante pose des questions en considérant les variables : nombre de figures et points bleus. Ensuite, la dépendance des variables est à nouveau identifiée.

Dans **l'épisode 2**, l'enseignante demande aux élèves de répondre sur la plateforme. Avec ces informations, elle construit trois tableaux de valeurs en associant le nombre de la figure choisie dans l'intervalle donné et les nombres de points rouges et bleus associés (voir figure 4 ci-dessous). L'enseignante interroge sur le nombre de figures choisies et sur la stratégie pour déterminer le nombre de points de claquettes. En ce qui concerne les stratégies utilisées pour le nombre de points rouges, les élèves ont noté que leur valeur est toujours de deux points. Pour le nombre de points bleus, la stratégie mentionnée était "*multiplier le nombre de chiffres choisis par 3*" et enfin, pour le nombre de points totaux, la stratégie mentionnée était "*ajouter deux à la multiplication du nombre de chiffres par 3*".

Figure 4 : Implémentation de la tâche 3, dans le tableau blanc on voit les tableaux de valeurs pour les trois fonctions qui apparaissent dans la tâche.

Dans **l'épisode 3**, l'enseignante représente graphiquement dans la fenêtre tableur de GéoGébra les coordonnées de points obtenus.

Lors de la discussion sur les propriétés graphiques des points obtenus, les élèves répondent qu'il s'agit de points alignés (*qu'ils peuvent en effet relier*) pour obtenir ainsi une « ligne ». Ils réalisent qu'il s'agit d'une droite et qui « ne ressemble pas à une pente ». Ils discutent ensuite sur les propriétés graphiques et mentionnent que la ligne est "plate" (horizontale) et qu'elle l'est parce que "tous les points gardent la même valeur".

L'enseignante poursuit la discussion mais cette fois-ci sur la relation entre le nombre de la figure choisie et le nombre de points bleus associés. Elle pose encore la question sur la forme de la représentation graphique issue de ces points. Un élève répond que "ce ne sera pas plat, ce sera comme ça (il fait un geste en diagonale)". Les propriétés associées au graphique sont ensuite discutées, les élèves réalisent que la ligne est donc "diagonale".

Dans **l'épisode 4** l'enseignante conduit une discussion sur la représentation graphique relative aux points totaux. Les élèves signalent que la ligne de points totaux sera similaire à la ligne des points bleus. Après avoir relié l'ensemble des points, ils discutent des similitudes et des différences entre le graphique des points bleus et celui des points totaux. Ils mentionnent que les deux droites obtenues ont effectivement de pentes (ne sont pas horizontales), mais que l'une passe par l'origine du repère et que l'autre non. Ils ont du mal à comprendre pourquoi une droite passe par l'origine et pas l'autre. L'enseignante dessine à main levée les points au tableau pour que les élèves visualisent ce qui se passe. Les élèves recherchent sur Internet des images de fonctions affines et linéaires pour les associer à chacune des représentations en GéoGébra. Ensuite, l'enseignante interpelle les élèves sur leurs stratégies pour trouver le nombre de points bleus et le nombre total de points selon la figure choisie. Il s'agit donc d'une situation de généralisation de patrons. Dans ce sens, l'enseignante interpelle sur la stratégie pour arriver à une formule. Les élèves, conduits par l'enseignante, sont parvenus à dégager l'expression "$f(n)=3n$" comme étant celle représentative de points bleus et, ensuite l'expression "$f(n)=3n+2$" comme représentative des points totaux.

Enfin, les élèves arrivent à identifier laquelle d'entre elles correspond à une fonction affine et laquelle correspond à une fonction linéaire à partir de ses propriétés.

CONCLUSIONS

Quant au rôle de la technologie dans le développement de l'ETM collectif.

La technologie a plusieurs rôles. Tout d'abord, elle offre plusieurs possibilités de répondre à une question, indique si la réponse est correcte ou incorrecte et fournit un retour d'information personnalisé. Pendant les expérimentations, nous avons observé que lorsque les élèves trouvaient une réponse correcte, ils se sentaient en confiance pour participer davantage à la discussion collective guidée par l'enseignante. En outre, la question ouverte a permis de configurer la notion de fonction. Si nous analysons les deux tâches, nous constatons qu'il s'agit de tâches dans les domaines de l'arithmétique pour T1 et de l'arithmétique-algèbre pour T3. Cependant, comme elles sont ouvertes, la collecte de réponses correctes peut conduire à l'émergence de la notion de fonction linéaire et affine. Enfin, le travail sur la plateforme génère une modification du contrat didactique, puisque la plateforme, en organisant un espace de travail personnel, génère un engagement de la part des élèves à répondre, puisqu'il y a un espace virtuel qui fournit une validation et des notes en fonction de la réponse de l'élève. Il est certainement possible d'aborder des tâches ouvertes sans technologie numérique, mais l'engagement pour y répondre peut diminuer. D'autre part, il convient de noter qu'à une époque où l'enseignement virtuel est envisagé comme un substitut possible au travail en présentiel, l'accent mis sur le collectif peut contribuer à mettre en évidence le rôle social de l'école, et ainsi à garantir qu'elle ne perde pas sa légitimité à une époque où elle est banalisée (Chevallard, 1985).

Quant au rôle de l'enseignant dans le développement de l'ETM collectif.

Le rôle des enseignants a été fondamental, tant dans les cas présentés ici que dans les autres expériences qui, pour des raisons d'espace, n'ont pas pu être détaillées. Tout d'abord, les enseignantes observées ont fait preuve d'une grande attention aux doutes et aux difficultés potentielles des élèves lors du travail sur la plateforme. Pour cela, elles devaient connaître en détail la tâche et les interactions possibles entre les élèves et la plateforme. En outre, les enseignantes ont dû maintenir une certaine vigilance épistémologique par rapport à la notion étudiée. Elles ont également dû repérer les invariants, les régularités, ainsi que les propriétés qui ont pu émerger des différentes réponses des élèves à la tâche ouverte. Dans le cas des tâches analysées dans cette recherche, les enseignantes ont fait preuve de cette vigilance épistémologique, compte tenu de la diversité des réponses des élèves qui ont pu configurer différents types de fonctions. Étant donné qu'il s'agit d'une séance introductive à la notion de fonction affine et linéaire, les enseignantes ont choisi comme itinéraire cognitif les notions de variables dépendante et indépendante, ainsi que les types de représentation des fonctions (tableau, graphique et algébrique). Autrement dit, ils poussaient les élèves

dans une direction spécifique à l'aide des questions qu'ils posaient, comme le souligne Radford (2023a, p. 29) : « Les enseignants luttent avec leurs élèves pour que les choses se passent bien ».

Quant au concept d'ETM collectif.

Au sein de la communauté de chercheurs en ETM, les discussions montrent que l'idée du collectif suscite des résistances. Cette résistance résulte de deux éléments principaux : 1) le questionnement sur la nécessité d'ajouter un nouveau concept alors qu'il existe déjà un ETM idoine et un ETM personnel. 2) des difficultés méthodologiques pour le saisir dans les analyses. En ce qui concerne la première question, l'ETM collectif découle de la nécessité de cristalliser la discussion épistémique à laquelle les élèves participent. L'analyse à partir de l'ETM personnelle semble insuffisante, car l'étude des interventions individuelles des élèves ne permet pas de révéler le concept mathématique qui émerge au sein du collectif. D'autre part, l'analyse de l'ETM collectif à partir de l'ETM idoine, où l'accent est mis sur l'enseignant, nous semble aussi limitée. Dans un ETM collectif, l'accent est mis sur les élèves, même si, comme indiqué plus haut, le rôle de l'enseignant est fondamental pour sa constitution. En plus, le fait de parler d'un ETM collectif permet de le définir, de l'envisager et d'analyser son évolution. Par ailleurs, la prise en compte du collectif dans la classe soulève de nouvelles questions quant aux liens entre l'ETM collectif et l'ETM personnel, car on attend globalement que ces notions soient développées et conceptualisées chez les élèves engagés dans les discussions collectives guidés par l'enseignant.

RÉFÉRENCES

Palacios, C. (2023). *Análisis del espacio de trabajo matemático de estudiantes de 8° básico en funciones a través de tareas en un entorno tecnológico* [Magíster]. Universidad de Playa Ancha.

Chevallard, Y. (1985). Porquoi la transposition didactique? In *Séminaire de didactique et de pédagogie des mathématiques*. La pensée Sauvage.

Derouet, C. (2016). *La fonction de densité au carrefour entre probabilités et analyse en terminal S*. Univsersité Paris Diderot.

Elia, I., Deliyianni, E., Gagatsis, A., Avgerinos, E., & Gridos, P. (2023). Tracing creativity in geometry: figural, instrumental and discursive geneses of reasoning in a geometry multiple-solution task. In C. Derouet, A. Nechache, P. Richard, L. Vivier, I. Gómez-Chacón, A. Kuzniak, M. Maschietto, & E. Montoya-Delgadillo (Eds.), *Actes du septième symposium d'Étude sur le Travail Mathématique* (pp. 659-666). IREM de Strasbourg.

Flores Salazar, J. V, Gaona, J., & Richard, P. (2022). Mathematical work in the digital age: variety of tools and the role of geneses. In A. Kuzniak, E. Montoya, & P. Richard (Eds.), *Mathematical Work in Educational Context - the Mathematical*

Working Space Theory perspective (pp. 165-209). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-030-90850-8_8

Gómez-Chacón, I., & Vivier, L. (2023). Thème 3 : genèse et développement du travail mathématique : rôle de l'enseignant, du formateur, du collectif et des interactions. In C. Derouet, A. Nechache, P. Richard, L. Vivier, I. Gómez-Chacón, A. Kuzniak, M. Maschietto, & E. Montoya-Delgadillo (Eds.), *Actes du septième symposium d'Étude sur le Travail Mathématique* (pp. 357-365). IREM de Strasbourg.

Hu, F., Jiang, Z., Yin, H., & Tian, G. (2024). Linking Teachers' Student-Oriented Goals to Their Emotions in Mathematics Classrooms: The Mediation of Personal Achievement Goals. *Asia-Pacific Education Researcher*. https://doi.org/10.1007/s40299-023-00805-2

Ingkavara, T., Panjaburee, P., & Wongkia, W. (2024). Design and Assessment of a Personalized Online Mathematics Learning System with Self-Regulated Learning Features: An Educational Design Research. *International Journal of Information and Education Technology*, *14*(3), 464 - 475. https://doi.org/10.18178/ijiet.2024.14.3.2067

Kuzniak, A., Montoya-Delgadillo, E., & Richard, P. (Eds.). (2022). *Mathematical Work in Educational Context*. Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-030-90850-8

Levy, B., Hershkovitz, A., Tabach, M., Cohen, A., & Gal, K. (2023). Personalization in Graphically Rich E-Learning Environments for K-6 Mathematics. IEEE *Transactions on Learning Technologies*, *16*(3), 364 - 376. https://doi.org/10.1109/TLT.2023.3263520

Masselin, B. (2021). *Étude du travail de l'enseignant autour de la simulation en classe de troisième et seconde : métamorphoses d'un problème au fil d'une formation en probabilité To cite this version : Étude du travail de l'enseignant autour de la simulation en class*.

Menares, R., Gaona, J., Silvia;, L., Montoya-Delgadillo, E., Rodríguez, M., Vivier, L., & Vandebrouck, F. (2023). Estudio del espacio de trabajo matemático en el álgebra lineal en la interacción con plataformas digitales con feedback automático. *XXVI Jornadas Nacionales de Educación Matemática*.

Michot, S. (2023). Analyse d'une tâche de description et de reproduction de figures géométriques d'une classe de 3e année primaire au Québec. In C. Derouet, A. Nechache, P. Richard, L. Vivier, I. Gómez-Chacón, A. Kuzniak, M. Maschietto, & E. Montoya-Delgadillo (Eds.), *Actes du septième symposium d'Étude sur le Travail Mathématique* (pp. 389-401). IREM de Strasbourg.

Peteers, F., & Vivier, L. (2023). Petit détour par le système sécimal. In C. Derouet, A. Nechache, P. Richard, L. Vivier, I. Gómez-Chacón, A. Kuzniak, M. Maschietto, & E. Montoya-Delgadillo (Eds.), *Actes du septième symposium d'Étude sur le Travail Mathématique* (pp. 431-442). IREM de Strasbourg.

Radford, L. (2023a). *La teoríaa de la objetivación: una perspectiva vygotskiana sobre saber y devenir en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas*. Universidad de los Andes. https://doi.org/10.51570/Edu202312

Radford, L. (2023b). On the influence of constructivism and the Theory of Didactical Situations on the Theory of Objectification. In C. Derouet, A. Nechache, P. Richard, L. Vivier, I. M. Gómez-Chacón, A. Kuzniak, M. Maschietto, & E. Montoya-Delgadillo (Eds.), *Actes du septième symposium d'Étude sur le Travail Mathématique* (pp. 155-165). IREM de Strasbourg.

Richard, P., Vélez, M. P., & Van Vaerenbergh, S. (2022). Mathematics education in the age of artificial intelligence. *How Artificial Intelligence Can Serve the Mathematical Human Learning*. https://doi.org/10.1007/978-3-030-86909-0

Sánchez, L. (2021). *Genèses d'usages de technologies numériques chez les enseignants de mathématiques et sciences en lycée professionnel. Thèse de doctorat.* [Université Paris Cité]. https://theses.fr/2021UNIP7160

Urhan, S., Gençaslan, O., & Dost, Ş. (2024). An argumentation experience regarding concepts of calculus with ChatGPT. *Interactive Learning Environments*, 1-26. https://doi.org/10.1080/10494820.2024.2308093

Utami, I. Q., Hwang, W.-Y., & Hariyanti, U. (2024). Contextualized and Personalized Math Word Problem Generation in Authentic Contexts Using Generative Pre-trained Transformer and Its Influences on Geometry Learning. *Journal of Educational Computing Research*. https://doi.org/10.1177/07356331241249225

Vandebrouck, F. (2023). Bifurcation genetique dans les ETM personnels. In C. Derouet, A. Nechache, P. Richard, L. Vivier, I. M. Gómez-Chacón, A. Kuzniak, M. Maschietto, & E. Montoya-Delgadillo (Eds.), *Actes du septième symposium d'Étude sur le Travail Mathématique* (pp. 83-94). IREM de Strasbourg.

ÉMERGENCE DE L'ART DE L'ARGUMENTATION : L'INSTRUMENTATION DE L'IA DANS LA FORMATION DES ENSEIGNANTS DE MATHÉMATIQUES

Itziar García-Honrado, Josep Maria Fortuny-Aymemi, Tomás Recio, Philippe R. Richard

Universidad de Oviedo, Universitat Autònoma de Barcelona, Universidad Antonio de Nebrija, Université de Montréal

Cette contribution présente l'orientation et les résultats attendus d'un projet d'innovation didactique pour la formation des enseignants de mathématiques. Elle met l'accent sur la recherche de l'argumentation mathématique implicite dans un contexte artistico-mathématique, qui repose sur un contrepoint technologique, communément appelé « hybridation », où les composantes de l'IA restent sous contrôle de l'humain.

INTRODUCTION

Depuis l'arrivée de ChatGPT en novembre 2022, les modèles de l'IA générative n'ont cessé de bouleverser l'imaginaire collectif en repoussant les limites de la génération de texte, s'approchant ainsi de la fluidité d'une conversation humaine. À tel point que l'incarnation du discours dans la machine semble nous déposséder d'une caractéristique inhérente à notre humanité, touchant aussi bien la langue naturelle que les langues symboliques. Cependant, cette avancée soulève des interrogations plus profondes, notamment lorsqu'on se penche sur la difficulté de l'IA à aborder les mathématiques (Richard, 2024). Bien que l'IA excelle dans l'accumulation d'informations et le traitement statistique, il devient évident que son incapacité à raisonner de manière autonome et à générer du texte autrement que par une prédiction probabiliste du mot suivant soulève des doutes quant à sa véritable « intelligence ». Si cela remet en question la perception largement répandue de l'intelligence artificielle, il est essentiel de mieux comprendre les avantages qu'offre l'IA en explorant ses diverses facettes et potentialités pour le développement d'une compétence argumentative dans la formation des enseignants de mathématiques.

De fait, comme on le retrouve chez Rane (2023), l'intégration des technologies de l'intelligence artificielle (IA), avec un accent particulier sur les modèles génératifs tels que ChatGPT, a marqué le début d'une ère révolutionnaire dans l'enseignement des mathématiques, modifiant fondamentalement la manière dont les étudiants participent à la résolution de problèmes. ChatGPT propose des idées et, bien qu'il n'ait pas de contrôle sur les connaissances qu'il génère, il établit des relations qui peuvent aider à l'exploration mathématique, nous éloignant du syndrome de la page blanche lorsque l'on ne sait pas par où commencer. Cet article examine diverses fonctions et obstacles associés à l'exploitation du potentiel de ChatGPT et d'autres outils de l'IA pour améliorer la relation didactique. En implémentant ces technologies de pointe, les professeurs en formation peuvent offrir des expériences personnalisées qui s'adaptent

à une large gamme de styles et de rythmes d'apprentissage. Cela permet aux étudiants de recevoir des retours immédiats et de participer à des dialogues interactifs au cours de la réalisation du travail mathématique, que ce soit en résolution de problème ou en modélisation. Enfin, cet article approfondit les impacts cognitifs sur les professeurs en formation, en examinant comment leur dépendance à l'IA pourrait affecter leur pensée critique et leur acquisition de compétences argumentatives. Il explore des méthodologies visant à favoriser la synergie entre divers types d'IA et l'intelligence humaine, encourageant le développement de la recherche de conjectures et de la validation de résultats dans un contexte instrumenté.

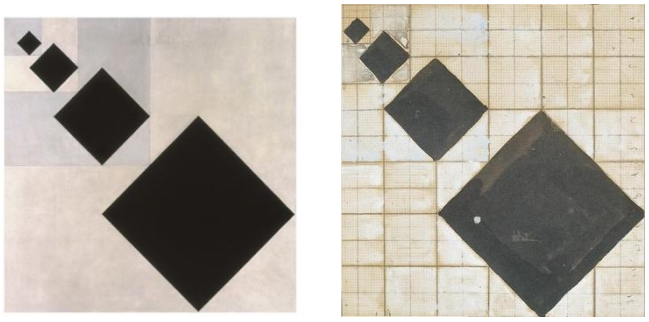


Figure 1. L'apogée de l'art concret s'illustre dans la *Composition arithmétique* de Théo Van Doesburg (1929-1930). Des carrés noirs, blancs et gris, répétés avec des dimensions et des intervalles variant selon une progression géométrique, fusionnent l'espace et le temps. L'œuvre est à gauche, son étude, à droite, sur du papier millimétré de 12 cm.

CONTEXTE DE L'ÉTUDE

À la fin des années 1920, le peintre, architecte et théoricien de l'art néerlandais Théo van Doesbourg a réalisé sa *Composition arithmétique* (Fig. 1) à une époque où le caractère mathématique s'imposa de toute évidence face à l'impressionnisme. C'est en partant de l'approche adoptée par l'artiste que nous avons conçu une activité dirigée qui s'intéresse à la nécessité mathématique dans l'œuvre, utilisant un questionnaire de pilotage et des interventions de formateurs lors de sessions pour enseignants et chercheurs en didactique des mathématiques. L'activité repose sur la réflexion critique, l'analyse approfondie et la résolution créative, tout en offrant une liberté de choix quant à l'appropriation des moyens technologiques.

Pour la conception de l'activité, nous avons réinvesti les résultats et l'expertise acquise au cours de recherches antérieures en formation des enseignants, notamment :

– La définition de tâches par les enseignants et l'établissement de la progression hypothétique de l'apprentissage dans le contexte de la *Composition arithmétique*, alors que le projet d'analyse de la situation impliquait déjà la subdivision du travail en unité (tâches), dont la reconnaissance initiale d'éléments mathématiques, la généralisation de modèles géométriques et la reformulation des connaissances (García-Honrado, Clemente, Vanegas, Badillo, & Fortuny, 2018).

– La perspective instrumentée à l'aide d'outils de raisonnement automatisés de GéoGébra qui permettent la découverte, la dérivation et la démonstration de propriétés mathématiques (Kovács, Recio, & Vélez, 2021).

Dans la recherche en IA, on reconnaît habituellement deux approches fondamentales (Bruillard & Richard, 2024) :

> [Les approches en IA] sont regroupées sous l'approche symbolique, qui conserve le lien causal, mais peut souffrir de problèmes de temps de calcul exponentiel lors de son exécution, notamment avec des algorithmes de force brute. En revanche, l'approche statistique semble offrir une stratégie de résolution plus efficace face à de grandes quantités de données, bien qu'elle introduise un nouveau niveau d'opacité dans le processus, notamment lors de l'utilisation de l'apprentissage automatique profond. Contrairement à l'approche symbolique, qui peut être plus facilement schématisée pour une meilleure compréhension et permet de comprendre pleinement la logique décisionnelle, l'approche statistique peut présenter une complexité interne qui rend difficile une compréhension détaillée de son fonctionnement. De plus, elle s'appuie souvent sur des analyses fréquentielles au cours de ses phases d'apprentissage. (p. 198)

Présenté en deux exercices, le premier explore les aspects qualitatifs de l'œuvre en utilisant principalement l'IA statistique, y compris l'IA générative avec des modèles de langage avancés comme ChatGPT (développé par OpenAI) et Gemini (développé par Google DeepMind), ainsi que des outils traditionnels comme Google et Bing. Le second exercice se concentre sur l'IA symbolique et l'approche traditionnelle papier-crayon pour analyser les aspects géométriques de l'œuvre, intégrant les capacités de raisonnement automatisé de GéoGébra Discovery[30]. Une brève description de ses performances se trouve ci-dessous.

QUESTIONNAIRE

Voici un condensé des exercices de l'activité intitulée *Exploration mathématique : les harmonies abstraites dans l'art visuel*.

Exercice 1. *Nez à nez au plasticisme*

Voici une **situation-problème (**Fig. 1, image de gauche**)** :

> Lorsqu'on observe la Composition arithmétique de Theo Van Doesburg (image ci-dessus), une peinture abstraite réalisée en 1929-1930 à l'époque du néoplasticisme, on remarque que des régularités sont visibles. On y voit des carrés noirs, blancs et gris disposés suivant des dimensions et des intervalles variables qui évoquent la récursivité. On souhaite comprendre et expliquer les aspects mathématiques qui transparaissent visuellement dans cette œuvre artistique, avant de se questionner sur les motivations de l'auteur derrière le choix de ces harmonies abstraites.

1. Vérifier si ChatGPT possède de l'information sur la Composition arithmétique de Theo Van Doesburg puis comparer avec celle obtenue via un moteur de recherche de type Google.

[30] https://kovzol.github.io/geogebra-discovery/

2. Décrire les propriétés visuelles qui émergent de la Composition arithmétique. Aidez-vous au besoin de ChatGPT.

3. Partagez les propriétés observées dans la Composition arithmétique avec une autre équipe. Comparez les méthodes d'observation directe et celles utilisant ChatGPT, en mettant en évidence la formulation des questions et les réponses obtenues.

4. Examiner si ChatGPT détient de l'information provenant d'une analyse directe de la Composition arithmétique de Theo Van Doesburg, en excluant les données périphériques. Expliquer votre démarche.

5. Évaluez l'utilité de ChatGPT dans son interaction, en tenant compte de sa capacité à raisonner, influencer l'évolution des connaissances, et des avantages et inconvénients liés à sa dépendance aux données d'entraînement.

6. Expliquez la portée de l'affirmation « ChatGPT peut faire des erreurs. Pensez à vérifier les informations importantes ».

Exercice 2 : *Suite géométrique*

Voici la suite de la **situation-problème (**Fig. 1, image de droite**)** :

> On imagine aisément que la création d'une œuvre aussi équilibrée que la Composition arithmétique a nécessité une série d'essais préliminaires. Une esquisse, réalisée sur du papier millimétré et mesurant 12 cm de côté, a été préservée, mais nous ne savons pas s'il s'agit d'un essai ou d'un outil de communication une fois l'œuvre achevée.
>
> Pour affiner la compréhension de l'œuvre à travers la lunette mathématique, nous souhaitons intégrer quelques considérations à partir de la grille employée pas Theo Van Doesburg. Cela permettrait non seulement de reconstruire la figure, mais aussi de saisir la logique harmonique plus subtile qui se dissimule dans l'œuvre.

1. En étant semblables, est-ce que tous les carrés pris deux à deux engendrent nécessairement des situations de Thalès ? Vérifier cette propriété en général avec ChatGPT, et indiquer la condition indispensable pour être dans une situation de Thalès.

2. Dans l'esquisse de la Composition arithmétique, on voit facilement que les sommets des carrés noirs ont été placés scrupuleusement sur des nœuds de quadrillage.

a) Pourquoi les « losanges noirs » sont effectivement des carrés ? Justifier.

b) Dans le fichier « Exercice 2-2b.ggb », les points de A à H et Z ont été fixés sur des nœuds de quadrillage. À l'aide de l'outil « Relation » (ci-contre), ou la commande `Relation (a, e)` dans la ligne de saisie, vérifier si la situation engendrée par Z, [AB] et [EF] est une situation de Thalès, et confirmer pourquoi il en est ainsi.

c) Dans la ligne de saisie, entrer la commande `SontParallèles (a, e)` et noter le résultat. Si on le compare avec les réponses précédentes de l'outil « Relation », on retient que le logiciel retourne : « true », « sont parallèles (évaluation par calcul) » et « sont parallèles (généralement faux) ». Qu'est-ce qui explique ces différences ?

d) Calculer les rapports d'agrandissement k et l qui permettent de passer d'une mesure à l'autre, c'est-à-dire « côté : AB $\longrightarrow^{k}$ EF » et « aire : ABCD $\longrightarrow^{l}$ EFGB ».

e) Dans le fichier précédent, placer les sommets I(8 ; 0), J(12 ; 4), K(8 ; 8) et L(4 ; 4) du grand carré noir, ainsi que les centres M(4 ; 8) et N(8 ; 4) des carrés EFGH et IJKL. Les droites (MN) et (FL) se coupent en O.

Calculer le rapport $\frac{OM}{ON}$ et trouver une signification au point O entre les deux carrés.

3. Lorsqu'on regarde le papier de près, on note que les nombres de 1 à 12 sont inscrits à droite, ce qui laisse supposer que l'auteur a délibérément choisi ce nombre. De plus, à l'aide de traits plus épais, on dirait qu'il a assemblé les carreaux de la feuille par groupe de « trois » pour former des coudes « ⌟», comme on le voit dans l'œuvre elle-même.
   a) Comment expliquer le choix d'une grille de 12 cm ? À quoi servirait le groupement par trois ? Justifier.
   b) Discuter de la possibilité de prolonger la construction des carrés noirs indéfiniment sur la feuille, en relation ou non avec la grille de Theo Van Doesburg.

4. On s'intéresse au carré d'aire maximale inscrit dans un triangle.
   a) Si 4 points sont placés sur les côtés d'un triangle, faut-il en mettre au moins deux sur un côté ? Quelle propriété mathématique s'applique dans ce cas ?
   b) Dans la Composition arithmétique, on remarque que le grand carré noir est inscrit dans le demi-carré de la grille. Est-ce le plus grand carré que l'on peut inscrire dans un triangle rectangle isocèle ? Le démontrer.

La problématique abordée concerne l'argumentation naturelle instrumentée, à l'aide d'un contrepoint technologique gouverné par l'humain (Richard, 2024). Puisque chaque type d'IA possède des avantages et des inconvénients, et que le travail mathématique instrumenté est susceptible d'augmenter l'intelligence humaine (Flores Salazar, Gaona, & Richard, 2022), notre objectif est d'explorer les différents contrepoints mis en œuvre. Un principe qui nous guide est celui de l'idonéité (Emprin et Richard, 2023). Les agents conversationnels ChatGPT et Gemini encouragent un dialogue structuré dans un jeu de questions-réponses entretenu par le sujet, visant à créer une dialectique convergente basée sur les interrogations posées par le sujet et les réponses fournies par l'IA. Nous postulons que l'IA statistique est utile, en raison du langage plus étroit de son interface, pour aider à formuler des hypothèses contextuelles (avertissement, en tout cas, de ses éventuels échecs, voir Botana & Recio, 2024), tandis que l'IA symbolique peut servir à vérifier la certitude des affirmations statistiques de l'IA, pour soutenir la découverte et la confirmation rigoureuse des propriétés, et en tant que tuteur intelligent qui répond à l'utilisateur lorsqu'il essaie de comprendre pourquoi une telle propriété est valable ou quelle est sa signification géométrique.

Par exemple, si GeoGebra Discovery répond qu'il faut localiser le sommet d'un carré en un certain point de l'hypoténuse du triangle rectangle qui apparaît dans l'œuvre de Théo, pour qu'une certaine propriété soit vérifiée (inscrire le carré dans le triangle) : c'est la tâche de l'utilisateur de conjecturer et de décrire (puis de vérifier) les caractéristiques géométriques dudit point, ce que GeoGebra Discovery ne fournit pas directement, puisqu'il se limite à dessiner et montrer l'équation qui vérifie ledit point, basée sur les coordonnées des points précédemment construits. Des « hybridations » par coordination de ces IA (contrepoints technologiques) peuvent traduire des dialectiques en argumentation mathématique fondée.

Notre cadre conceptuel s'appuie sur les réflexions de Emprin et Richard (2023), plus spécifiquement en ce qui concerne les liens de l'IA avec la didactique des mathématiques. Sur le plan méthodologique, nous intégrons des éléments de la théorie

des espaces de travail mathématique dans l'usage de contrepoints technologiques pour soutenir les processus de résolution et d'argumentation, en explorant les genèses sémiotiques, instrumentales et discursives. Alors que le rôle de l'IA symbolique paraît plus évident pour la réalisation du travail mathématique, celui de l'IA statistique, quant à elle, contribue à étayer le discours lors de l'exploration instrumentée de la situation. Nous nous intéressons à l'idonéité dans l'interaction, avec l'ambition de transformer la dialectique instrumentée avec l'IA en une argumentation autonome.

GEOGEBRA DISCOVERY POUR LA COMPOSITION ARITHMÉTIQUE

Dans ce qui suit, nous décrirons brièvement la manière dont GeoGebra Discovery peut répondre à cette question fondamentale : « Pourquoi Théo a-t-il nécessairement dû inscrire un carré dans un triangle rectangle isocèle à 1/3 du sommet ? ».

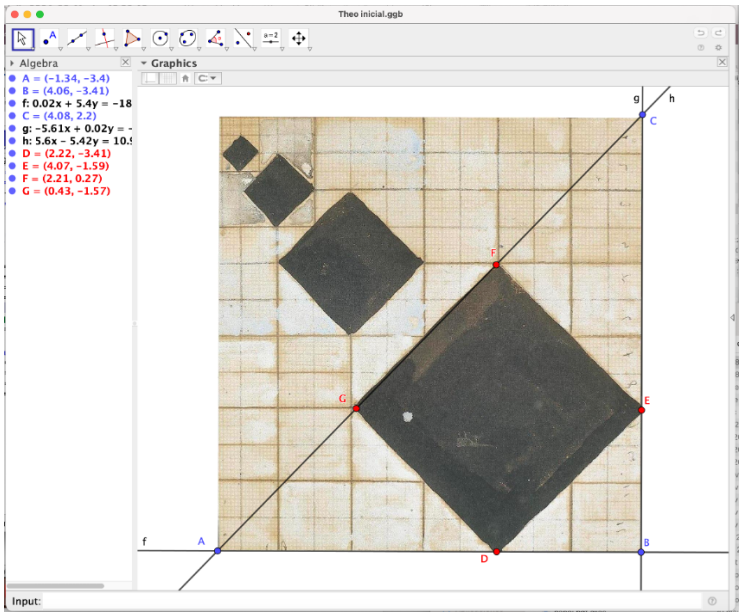


Figure 2. En inscrivant le quadrilatère DEFG dans le triangle rectangle isocèle ABC, le point G vérifie-t-il que AG = 1/3 de AC ? Et, GF = 1/3 AC ?

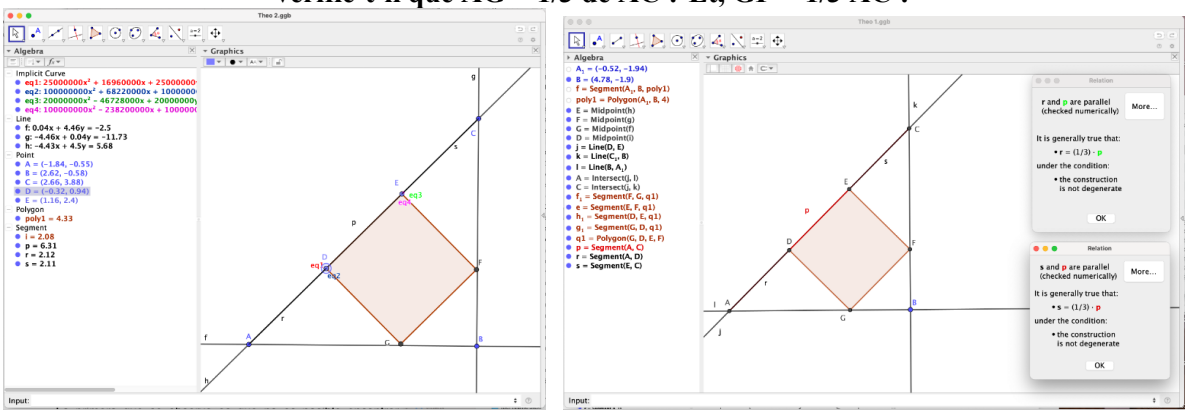


Figure 3. GeoGebra Discovery montre (à gauche), via `EquationLieu( , )`, que si DEFG est inscrit dans le triangle ABC, alors D et E semblent diviser AC en tiers, ce qui est vérifié en faisant une construction pour que DEFG soit inscrit et en vérifiant (à droite) qu'alors les segments AD, DE, EC sont des tiers de AC.

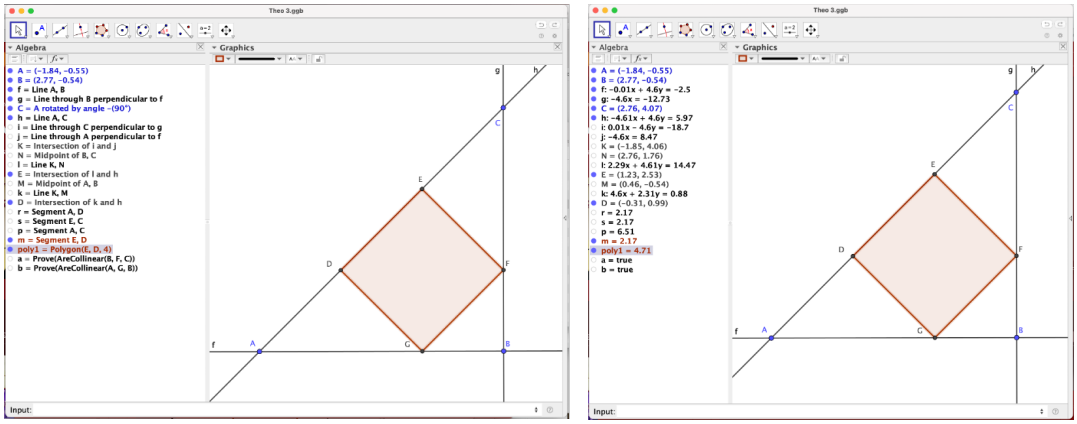


Figure 4. Vérification formelle que la localisation de D et E dans les tiers du côté AC est non seulement nécessaire mais aussi suffisante : en plaçant les points D et E dans les tiers, il s'avère que G est en AB et F en BC. Voir à gauche `Preuve(SontAlignés(B,F,C))` et `Preuve(SontAlignés(A,G,B))` et à droite la réponse « true » aux deux questions.

C'est une question qui peut être interprétée, dans un contexte mathématique, comme ceci : Si l'on inscrivait (voir Fig. 2) le quadrilatère DEFG dans le triangle rectangle isocèle ABC, où placer le point G ? Et une fois que nous observons, avec l'aide de GeoGebra Discovery, et énonçons formellement une certaine conjecture (à placer G de telle sorte que AG = GC = FC), GeoGebra Discovery peut-il confirmer que cette conjecture est correcte ? Autrement dit, comment le peintre aurait-il su où il devait insérer les sommets du carré pour que celui-ci s'inscrive dans le triangle ? Bref, il s'agit de chercher des conditions (hypothèse H, des sommets du carré) pour que la thèse T (le carré DEFG est inscrit dans le triangle ABC) soit vraie.

Les outils de raisonnement automatique de GeoGebra Discovery (voir Kovács, Recio & Vélez, 2022) sont conçus, de manière très sommaire, pour trouver, à l'aide de la commande « Relation », étant donnés certains objets géométriques dans une construction (dont les étapes seraient l'hypothèse H qui vérifie de tels objets), une propriété T de tels objets (de sorte que H ⇒ T). Ou bien de corroborer ou de nier, à l'aide des commandes « Preuve » ou « PreuveDetaillée », étant donné une propriété T énoncée par l'utilisateur sur ces objets géométriques, s'il est vrai que H ⇒ T. Dans tous ces cas, la réponse de GeoGebra Discovery est rigoureusement vraie, car il est basé sur des algorithmes de calcul formel implémentés dans des programmes de calcul symbolique qui font partie de GeoGebra. Par ailleurs, la validité de l'approche algébrique de la preuve formelle des théorèmes de géométrie euclidienne, récemment montrée dans Boutry, Baun, & Narboux (2019), doit être prise en compte.

Enfin, et avec un caractère très différent, GeoGebra Discovery, grâce à la commande « EquationLieu », peut « suggérer » des propriétés Q qui se produiraient si une certaine construction vérifiait des hypothèses supplémentaires T (sans qu'il soit nécessaire de les vérifier actuellement). Autrement dit, GeoGebra Discovery, avec cette commande « EquationLieu », fournit des informations « visuelles et numériques », que l'utilisateur

peut finir par formuler (en utilisant l'intelligence « humaine » pour énoncer géométriquement les informations suggérées par GeoGebra Discovery) comme une certaine propriété Q, de sorte qu'une construction H, si elle vérifiait également T, alors Q serait vraie : {H et T} ⇒ Q. Il s'agit donc de fournir les conditions nécessaires, Q, pour que {H et T} soient vérifiés. Dans bien des cas, l'intérêt de trouver de telles conditions, Q, c'est justement dans un premier temps d'essayer de trouver des conditions suffisantes, S, pour que {H et S} ⇒ T. En fait, il est évident que si {H et S} ⇒ T, alors {H et S} ⇒ {H et T} ⇒ Q, donc Q est une propriété qui doit satisfaire la construction {H et S} pour avoir T. Est-il possible que peut-être Q (ou une variante, ajoutant plus de conditions) est également suffisant et {H et Q} ⇒ T ?

Et c'est précisément le processus que nous allons suivre, en général, pour utiliser le raisonnement automatique de GeoGebra Discovery comme un tuteur intelligent qui aide à l'exploration, à la conjecture et à la vérification des propriétés géométriques des œuvres d'art. Voir Fig. 3 et Fig. 4 pour une solution à la question initiale.

DISPOSITIF D'INNOVATION DIDACTIQUE ET DE FORMATION

La mise en œuvre de notre dispositif d'innovation a pris deux formes : une première dans le cadre de la formation initiale des enseignants de mathématiques au secondaire, et une seconde lors d'un atelier organisé au Groupe canadien d'étude en didactique des mathématiques (GCEDM-2024). Bien que l'atelier au GCEDM nous ait apporté de l'information complémentaire, des différences notables dans la gestion du questionnaire (en formation initiale auprès d'étudiants universitaires versus en formation continue des enseignants avec la participation de chercheurs en didactique) nous ont conduits à centrer notre analyse sur la formation initiale. Dans ce cadre, les étudiants devaient répondre au questionnaire intitulé *Exploration mathématique : les harmonies abstraites dans l'art visuel*, au cours d'une séance de trois heures. Conscients des problèmes informatiques d'accès potentiels, nous leur avons demandé de répondre à un maximum de questions durant cette période, avec la possibilité de remettre leur manuscrit le lendemain. Ensuite, ils disposaient de deux semaines pour parfaire, repenser ou corriger leur brouillon afin de produire une version finale propre.

RÉSULTATS

1. Description de l'ensemble des réponses, ou, si l'on veut, évaluation des réponses en donnant une appréciation, une valeur à celles-ci. Normalement, ce type d'évaluation suit une analyse préalable, ou éventuellement une analyse a priori. Cependant, puisqu'il n'y a pas eu de préexpérimentation — c'est une seule « expérience » et elle n'est pas reproductible — alors l'évaluation se résume à un travail d'analyse. À la Table 1, on illustre un avantage important de ChatGPT : sa capacité à synthétiser l'information et à la condenser en termes simples, ce qui peut rendre le reste du travail de recherche et d'analyse un peu plus facile en rendant l'information plus digeste. Un autre avantage est visible concernant la bonne capacité de synthèse et de vulgarisation de ChatGPT.

Équipe 3		Thème, catégorie ou remarque
Organisation	Citation, texte	
Réflexion	De manière générale, ChatGPT semble limité.	ChatGPT est un outil limité
Inconvénient	Comme énoncé précédemment, lorsqu'on lui demande de décrire cette œuvre, il semble s'appuyer davantage sur le mouvement De Stijl que sur l'œuvre elle-même. Il sait énoncer certaines caractéristiques sans toutefois pouvoir faire une analyse directe de l'œuvre.	– ChatGPT énonce des caractéristiques générales – ChatGPT ne fait pas d'analyse directe
Avantage	ChatGPT semble bien résumer l'information qu'il trouve en ligne.	ChatGPT a une bonne capacité de synthèse
Inconvénient	Cependant, il semble nécessaire de lui poser des questions très précises pour obtenir des réponses satisfaisantes.	– Nécessité de précision pour faire converger le questionnement. – Instrumentalisation de ChatGPT : l'usager doit apprendre à bien questionner ChatGPT.

Table 1 : Évaluer l'utilité de ChatGPT dans son interaction, en tenant compte de sa capacité à raisonner, influencer l'évolution des connaissances et des avantages et inconvénients liés à sa dépendance aux données d'entraînement.

2. En cherchant des patrons de conduites (invariants dans les réponses), ou, si l'on veut, des catégories conceptualisantes qui semblent se dessiner. Comme toujours, le comportement étudiant se différencie et se ressemble. C'est en contrastant les réponses de l'ensemble qu'on peut voir ce qui est intéressant à dégager. Nous sommes ici en pleine analyse qualitative. Exemple de cas illustratif de l'Exercice 2 (Table 2) :

> En étant semblables, est-ce que tous les carrés pris deux à deux engendrent nécessairement des situations de Thalès ? Vérifier cette propriété en général avec ChatGPT, et indiquer la condition indispensable pour être dans une situation de Thalès.

Équipe 1	
Oui, en effet, il y a une situation de Thalès, car les diagonales des triangles suivent la même proportion que celle de leurs côtés. Il faut donc que la longueur des côtés de carrés subséquents diminue ou augmente de la même proportion. Par exemple, il y a un rétrécissement de 2 entre chaque carré.	
Réponse à : est-ce que tous les carrés pris deux à deux engendrent nécessairement des situations de Thalès ?	Oui il y a une situation de Thalès Argument : Il faut donc que la longueur des côtés de carrés subséquents diminue ou augmente de la même proportion. Par exemple, il y a un rétrécissement de 2 entre chaque carré
Propriété	Les diagonales des triangles suivent la même proportion que celle de leurs côtés.

ChatGPT	
Condition indispensable pour être dans une situation de Thalès	
Commentaire	– Les triangles n'ont pas de « diagonales » ; – L'équipe ne semble pas avoir interagi avec ChatGPT ; – L'équipe semble indiquer que dès qu'il y a proportion, alors il y a situation de Thalès. Elle ne mentionne pas la condition de parallélisme des droites qui supporte les côtés.

Table 2 : Exercice 2. Expliquez la portée de l'affirmation « ChatGPT peut faire des erreurs. Pensez à vérifier les informations importantes.

3. La comparaison des versions brouillonnes et au propre apporte de l'information sur d'autres plans. Il est vrai qu'en ayant eu plus de temps, on s'attend à voir des modifications dans les réponses. On suppose que ce sont des améliorations et peut-être même un apprentissage. Exemple illustratif du problème (Table 3) :

> Dans la ligne de saisie, entrer la commande `SontParallèles (a, e)` et noter le résultat. Si on le compare avec les réponses précédentes de l'outil « Relation », on retient que le logiciel retourne : « true », « sont parallèles (évaluation par calcul) » et « sont parallèles (généralement faux) ». Qu'est-ce qui explique ces différences ?

Équipe 1	
Justification de l'équipe	Commentaire, justification
Version révisée	Type de réponse : binaire Évaluation par calcul : « construction est suffisante pour dire que les droites sont parallèles » « Il n'est pas nécessaire de calculer la pente. » : Le calcul de la pente a été effectué numériquement. Généralement faux : « pas de lien de construction »
`SontParallèles (a,e)` → true Le « true » provient d'une question binaire qui se répond par vrai ou faux. « Évaluation par calcul » veut dire que la construction est suffisante pour dire que les droites sont parallèles. Il n'est pas nécessaire de calculer la pente. « Généralement faux » veut dire que c'est vrai maintenant, car les pentes des droites sont équivalentes, alors que ceux-ci n'ont pas de lien de construction entre-elles qui permettent de faire un lien parallèle entre les deux droites.	

Table 3 : Dans l'esquisse de la Composition arithmétique, on voit facilement que les sommets des carrés noirs ont été placés scrupuleusement sur des nœuds de quadrillage.

DISCUSSION

Dans cet article, nous avons essayé de souligner, dans l'enseignement des mathématiques, les opportunités qui découlent de la définition de l'UNESCO (2009) de l'IA comme domaine d'étude visant au développement de systèmes informatiques capables d'imiter certaines fonctionnalités de l'intelligence humaine, y compris des caractéristiques telles que la perception, apprentissage, raisonnement, résolution de problèmes, interaction linguistique. Bien que près de sept décennies se soient écoulées depuis la première conception de l'IA, ce n'est que récemment que la grande révolution s'est produite avec l'IA générative.

Comme nous l'avons montré dans les résultats (voir Table 1, 2 et 3), le ChatGPT intégré dans la conception des activités présentées ici facilite l'apprentissage interactif et la résolution de problèmes en permettant des conversations en temps réel où les étudiants ont pu poser des questions, rechercher des explications et demander des solutions étape par étape à des problèmes mathématiques. ChatGPT a agi comme un tuteur personnalisé, adapté aux styles d'apprentissage individuels conduisant à une compréhension plus approfondie.

En présentant des défis et des problèmes ouverts, comme dans l'expérience démontrée, ChatGPT a stimulé la créativité mathématique et la pensée critique. Les efforts de collaboration entre les éducateurs, les chercheurs, les décideurs politiques et les développeurs de technologies sont essentiels pour façonner un avenir où chaque élève peut exceller en mathématiques, grâce aux capacités de ChatGPT et de technologies avancées similaires.

REFERENCES

Botana, F., & Recio, T. (2024). Geometric loci and ChatGPT: Caveat emptor! *Computation, 12*(2), 30. https://doi.org/10.3390/computation12020030

Boutry, P., Braun, G., & Narboux, J. (2019). Formalization of the arithmetization of Euclidean plane geometry and applications. *Journal of Symbolic Computation, 90*, 149-168. https://doi.org/10.1016/j.jsc.2018.04.007

Bruillard, É., & Richard, P. R. (2024). Informatique, mathématiques, conception et usage des technologies numériques. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, Thématique 2, 173-208*. https://doi.org/10.4000/11sga

Emprin, F., & Richard, P. R. (2023). Intelligence artificielle et didactique des mathématiques : état des lieux et questionnements. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 28*, 131-181. https://doi.org/10.4000/adsc.3286

Flores Salazar, J. V., Gaona, J., & Richard, P. R. (2022). Mathematical work in the digital age: Variety of tools and the role of geneses. In A. Kuzniak, E. Montoya-Delgadillo, & P. R. Richard (Eds.), *Mathematical work in educational context* (Vol. 18, pp. 165-209). Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-030-90850-8_8

García-Honrado, I., Clemente, F., Vanegas, Y., Badillo, E., & Fortuny, J. M. (2018). Análisis de la progresión de aprendizaje de una futura maestra. In L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García, & A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (pp. 231-240).

Kovács, Z., Recio, T., & Vélez, M. P. (2021). GeoGebra Discovery in context. In P. Janicic & Z. Kovács (Eds.), *Proceedings of the 13th International Conference on Automated Deduction in Geometry (ADG 2021)*. *Electronic Proceedings in Theoretical Computer Science, 352*, 141-147. https://cgi.cse.unsw.edu.au/~eptcs/content.cgi?ADG2021.16

Kovács, Z., Recio, T., & Vélez, M. P. (2022). Automated reasoning tools with GeoGebra: What are they? What are they good for? In P. R. Richard, M. P. Vélez, & S. van Vaerenbergh (Eds.), *Mathematics education in the age of artificial intelligence: How artificial intelligence can serve mathematical human learning* (pp. 23-44). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-86909-0_2

Rane, N. (2023). Enhancing mathematical capabilities through ChatGPT and similar generative artificial intelligence: Roles and challenges in solving mathematical problems. *SSRN Electronic Journal*. http://dx.doi.org/10.2139/ssrn.4603237

Richard, P. R. (2024). The challenges of AI in shaping mathematical work: From human hybridization to automation through synergies of symbolic AI and generative models. In K. W. Kosko, J. Caniglia, S. A. Courtney, M. Zolfaghari, & G. A. Morris (Eds.), *Proceedings of the 46th annual meeting of PME-NA* (pp. 2213-2235). Kent State University. https://doi.org/10.51272/pmena.46.2024

UNESCO. (2009). *Revisión de los Estatutos de la Comisión Mundial de Ética del Conocimiento Científico y la Tecnología (COMEST)*. *Executive Board, 182nd session* [491].

DE LA PAGE AU CODE : COMMENT EXPLORER LES RÉCITS ISSUS DE LA LITTÉRATURE DE JEUNESSE À TRAVERS LA LENTILLE MATHÉMATIQUE ET LITTÉRAIRE, DE LA THÉORIE DES GRAPHES À L'ALGORITHMIQUE CRÉATIVE

Dominique Laval

CY Cergy Paris Université – INSPE de l'académie de Versailles (France)
dominique.laval@cyu.fr

Nous supposons que la théorie des graphes aide à représenter le récit (conte ou fable) sous la forme d'un graphe narratif favorisant une analyse structurée des relations entre les protagonistes et les événements constituant les différents moments clés du récit. Cette approche aide l'élève du primaire français à interpréter les formes et la mise en place d'éléments constitutifs du récit. Il transpose cela en des algorithmes qu'il implémente dans Scratch afin de réaliser des animations, avec la possibilité d'aller vers des fins alternatives. Pour illustrer cela, nous présentons une ingénierie connectant différentes didactiques : mathématique, algorithmique et littérature pour la jeunesse, que nous analysons à travers un cadre théorique articulant Espaces de Travail, Algorithmique et d'analyses structurales du récit.

INTRODUCTION ET EPISTEMOLOGIE

Depuis 1980, l'utilisation d'outils numériques est entrée progressivement, avec des périodes de stagnation, dans l'enseignement secondaire français. Puis, à la suite des travaux de la *Commission de réflexion sur l'Enseignement des Mathématiques* de Kahane (1999-2002) et des progrès significatifs sur les environnements numériques permettant une exploration plus aisée par un public non spécialiste, une nouvelle approche du numérique prend forme, tant dans la formation des maîtres que dans les pratiques en classe. A partir des années 2010, l'introduction d'un enseignement de l'algorithmique dans les classes des lycées français se fait progressivement : en 2010 pour la Seconde générale (Grade 10), en 2011 pour les Premières (Grade 11) et en 2012, pour les Terminales (Grade 12). Selon Laval (2018), cette introduction de l'algorithmique nécessite :

[…] *une adaptation de la part de nombreux enseignants qui ont, pour une grande majorité, en particulier pour les plus anciens, reçu une formation initiale où l'utilisation de l'informatique est pour l'essentiel en relation avec une discipline mathématique universitaire, l'analyse numérique et qui leur semble loin des attentes institutionnelles.*

Depuis 2015 pour le cycle 1 (3-5 ans) et 2016 pour le CP (Grade 1) à la 3e (grade 9), l'enseignement de l'algorithmique et du numérique s'intègre progressivement dans les programmes scolaires. Dans cette dynamique, nous proposons une approche interdisciplinaire combinant mathématiques, algorithmique et littérature pour explorer

le récit littéraire en CM1 (Grade 4). Cette perspective repose sur le concept du « plan de métro », une représentation visuelle où les protagonistes et événements sont des stations interconnectées, illustrant les relations et transitions narratives. Cette analogie permet de traduire la narration en un schéma graphique, où chaque station représente un événement clé ou un personnage et les connexions figurent les interactions. Ce modèle facilite la compréhension narrative et sa transposition en concepts informatiques, notamment via la *Théorie des Graphes* (TDG). Il aide à structurer l'analyse littéraire et à explorer les interactions sous une forme algorithmique. L'analyse de la *morphologie du conte* selon Propp (1970), le *schéma actanciel* de Greimas (2002) et le *schéma quinaire* de Larivaille (1974) s'intègrent dans cette approche. Associés à la TDG et aux représentations graphiques des réseaux sociaux, ces cadres théoriques offrent une méthode d'analyse enrichissante, reliant compréhension narrative, raisonnement logique et modélisation algorithmique. Grâce à cette approche, les élèves visualisent la structure des récits à travers un « plan de métro », expérimentant activement la narration en traduisant un texte en modèle algorithmique interactif, combinant lecture, logique et créativité.

NOS OBJECTIFS

Nous explorons comment une application simplifiée de la TDG associée à une introduction de la pensée algorithmique enrichit la compréhension et l'analyse des récits littéraires de jeunesse. Cette exploration repose sur plusieurs fondements théoriques et pratiques justifiant la nécessité d'une telle démarche.

Complexité et richesse des récits pour la jeunesse : une entrée par la TDG

Les récits littéraires de jeunesse sont souvent riches en personnages, en événements, et en relations complexes. Ces éléments narratifs représentent des défis en termes de compréhension et d'analyse structurée. La TDG, permettant de représenter des relations complexes de manière visuelle et analytique, offre une méthodologie puissante pour démêler ces complexités narratives. En effet, la TDG, faisant partie du champ des mathématiques, est une branche de la combinatoire qui étudie les relations entre les objets. Dans le contexte de l'analyse narrative, elle offre des outils puissants pour représenter, visualiser et analyser les éléments et les structures du récit littéraire.

Vers une visualisation et une structuration de l'information : pensée computationnelle vs pensée algorithmique

Comme nous l'évoquions, les graphes narratifs fournissent une visualisation claire des interactions entre les personnages et les événements. Cette visualisation aide non seulement à repérer les motifs récurrents et les arcs narratifs principaux, mais aussi à identifier les sous-intrigues et les relations secondaires qui enrichissent l'histoire. Cela nous amène à prendre en compte deux types de pensée : la computationnelle et l'algorithmique. Même si les expressions « pensée algorithmique (PA) » et « pensée

computationnelle (PC) » sont souvent utilisées de manière interchangeable, elles ont des nuances distinctes qui méritent d'être explorées. Il est pertinent de clarifier ces distinctions, car elles influencent la manière dont l'élève appréhende et applique la TDG et l'algorithmique pour enrichir sa compréhension du récit. L'intégration de l'algorithmique et de la programmation, à travers des outils éducatifs comme *Scratch* (1), permet à l'élève de passer d'une simple lecture et interprétation du récit à une interaction active avec le texte. En créant une animation liée au récit, l'élève réfléchit de manière algorithmique, ce qui développe sa PC. Cette approche encourage également la créativité et l'innovation, car il explore différentes fins et perspectives dans ses animations. Cela rend l'apprentissage actif. Mais alors, pourquoi distinguer deux types de pensée : algorithmique et computationnelle ? La PA se concentre spécifiquement sur la conception et l'analyse d'algorithmes. Nous rappelons qu'un algorithme est une série d'instructions ordonnées et bien définies pour accomplir une tâche ou résoudre un problème. Ses caractéristiques consistent à identifier les étapes précises et ordonnées, nécessaires pour résoudre le problème, qu'il se situe dans le champ mathématique ou dans le champ littéraire. L'élève prend en compte que chaque étape de l'algorithme est clairement définie et produit un résultat spécifique. De même, il évalue ses algorithmes en termes de temps d'exécution et de ressources utilisées. Par exemple, dans un contexte narratif, la PA peut impliquer la création d'un algorithme pour générer une fin alternative, avec utilisation d'instructions conditionnelles (SI… ALORS ou SI… ALORS… SINON) à une histoire basée sur des choix faits par les personnages à des points clés du récit. La PC est une approche plus globale qui englobe la PA mais va au-delà. En effet, elle inclut la décomposition de problèmes complexes, la reconnaissance de motifs, l'abstraction, la formulation de problèmes de manière que l'environnement numérique puisse les résoudre, et la PA. Ses caractéristiques prennent en compte la décomposition des problèmes en sous-problèmes plus petits et par conséquent plus gérables. Par ailleurs, une identification des similitudes et des motifs dans les données est attendue. Dans le cadre de la PA, nous nous concentrons sur les détails essentiels et ignorons les informations non pertinentes. De plus, le développement de solutions étape par étape nous conduit à aller vers la PA. Dans le cadre d'un travail sur les PC et PA, l'élève utilise des structures de boucles (REPETE… JUSQU'A, TANT QUE…, POUR… FAIRE) et des instructions conditionnelles, afin d'affiner et d'améliorer les solutions qu'il propose. Lors d'une analyse du récit littéraire, la PC peut inclure la décomposition de l'histoire en éléments narratifs fondamentaux, la reconnaissance de motifs récurrents, l'abstraction pour créer un modèle de graphe narratif et, la conception d'algorithmes pour simuler des interactions entre personnages.

Un travail interdisciplinaire et le développement de compétences chez l'élève

Notre approche interdisciplinaire associe mathématiques, algorithmique et littérature pour favoriser un apprentissage global et intégré. En mobilisant la TDG en mathématiques, la programmation et l'algorithmique, ainsi que l'analyse narrative en littérature, nous supposons que l'élève développe une gamme de compétences

essentielles et transversales. Cette démarche l'entraîne à penser de manière critique et à résoudre des problèmes complexes. En créant et animant des représentations graphiques du récit, l'élève vit et recrée l'histoire, enrichissant ainsi son expérience littéraire. L'algorithmique lui permet d'explorer des fins alternatives, ajoutant une dimension ludique et engageante aux apprentissages littéraire et algorithmique.

QUEL(S) CADRE(S) THEORIQUE(S) METTRE EN PLACE ?

La TDG, via les graphes narratifs, permet d'analyser les relations entre personnages et événements. L'intégration de modèles littéraires comme la *morphologie du conte* (Propp, 1970), le *schéma actanciel* (Greimas, 2002) et le *schéma quinaire* (Larivaille, 1974) enrichit cette analyse. Cette approche interdisciplinaire s'étend à une algorithmique créative, où des algorithmes comme celui de Dijkstra (non abordé au primaire) permettent d'explorer les parcours narratifs et de transcrire le récit en langage machine. Un cadre théorique multiple est nécessaire pour analyser les liens entre ces champs disciplinaires distincts. Enfin, la prise en compte de la dimension sémiotique et de l'usage d'instruments est essentielle pour comprendre les connaissances et compétences mobilisées.

L'analyse du récit à travers une approche élémentaire de la TDG

Bien que la TDG ne soit pas considérée comme faisant partie d'un cadre théorique de la didactique des mathématiques, nous souhaitons l'y inscrire. En effet, dans un récit littéraire, nous pouvons considérer que les personnages et leurs interactions forment souvent des réseaux complexes. Ainsi, la TDG permet de représenter ces réseaux sous forme de graphes, où chaque personnage est représenté par un nœud (ou sommet) et leurs interactions par des arêtes (ou liens). Par exemple, dans un conte, les personnages principaux et secondaires sont des nœuds distincts. Les arêtes reliant les nœuds permettent de représenter les interactions entre les personnages, telles que des conversations, des conflits ou des alliances. Cette représentation visuelle aide l'élève à voir rapidement les relations et les dynamiques entre les personnages, facilitant ainsi sa compréhension de leurs rôles respectifs dans l'histoire. Par ailleurs, nous partons de l'idée que les graphes permettent d'identifier et d'analyser des motifs récurrents dans le récit. Par exemple, dans le cas des cycles dans un graphe, ceux-ci représentent des boucles narratives où un personnage retourne à une situation précédente après une série d'événements qu'il aurait vécue ou subie. Le concept de sous-graphes complets permet de représenter des groupes de personnages qui interagissent intensivement entre eux, formant ainsi des sous-intrigues. Les chemins dans un graphe explicitent les séquences d'interactions entre les personnages, aidant ainsi à tracer les arcs narratifs principaux. Bien que l'élève observé n'ait pas la connaissance de la TDG, l'esprit qui en découle permet à l'élève d'identifier les personnages clés et les événements centraux du récit. En utilisant le nombre d'arêtes incidentes à un nœud (concept de degré) et l'importance d'un nœud dans le graphe (concept de centralité), l'élève détermine, d'une part les

protagonistes principaux, ceux qui ont le plus d'interactions et qui jouent un rôle central dans l'intrigue et d'autre part les événements et les interactions qui relient plusieurs personnages et font avancer l'intrigue de l'histoire de manière significative. Par ailleurs, le récit littéraire complexe peut avoir de nombreuses sous-intrigues et interactions multiples. Dans ce cas, une entrée dans l'analyse de ces interactions par la TDG simplifie cette complexité en fournissant une représentation structurée et systématique des relations. Cela permet de décomposer les sous-intrigues. En effet, le fait d'isoler les sous-graphes correspondant à des sous-intrigues spécifiques, permet plus facilement de les analyser séparément. De même, les graphes montrent les relations indirectes entre les personnages, révélant des liens qui ne sont pas immédiatement flagrants dans le texte. Ainsi, en transposant la structure narrative du récit en graphes, il devient possible de créer des algorithmes pour analyser et manipuler ces graphes. Par exemple, l'élève peut construire et implémenter des algorithmes de recherche de chemins pour explorer différentes séquences d'événements dans l'histoire. Il peut aussi élaborer des algorithmes permettant d'identifier les groupes de personnages qui interagissent principalement entre eux. De plus, le fait que l'élève puisse créer des animations interactives basées sur les graphes narratifs, lui permet de mieux visualiser et de tester des fins alternatives. Pour illustrer cela, analysons le conte *Le Petit Chaperon Rouge*, en utilisant la TDG. L'élève crée un graphe des personnages, où les nœuds représentent le petit chaperon rouge (PCR), le loup, la grand-mère, et le chasseur. Puis, il ajoute des arêtes pour les interactions. Celles-ci représentent les rencontres et conversations entre les divers personnages. Il analyse les motifs, en identifiant le chemin suivi par le PCR, les cycles de danger et de sauvetage, et les sous-graphes représentant les interactions séparées entre le PCR et le loup, et entre la grand-mère et le loup. Puis, il construit des algorithmes qu'il implémente dans l'environnement *Scratch* pour explorer différentes séquences d'actions possibles, permettant ainsi de créer des animations avec des fins alternatives.

Les cadres théoriques « classiques » de la didactique

Selon Knuth (1969), l'algorithme ne se limite pas seulement à l'informatique ou au domaine des mathématiques. Il affirme qu'il est des deux, même si en France, l'enseignement de l'algorithmique est pour l'essentiel assuré par le professeur de mathématiques (Laval, 2018). Mais l'algorithmique peut aussi être associé à la littérature. Nous menons alors une analyse fine des données recueillies lors des expérimentations, à l'aide d'un cadre théorique se situant aux connexions entre le modèle d'*Espace de Travail Algorithmique* (ETA) (Laval, 2018), spécifique à *Scratch*, associé à un *cycle de modélisation* adapté et, les différentes *Méthodes d'Analyse Structurale* (MAS) à savoir : la *morphologie du conte* qui *construit […] une grammaire des formes narratives qu'il présente comme des formules mathématiques* (Farahnak, 2010), le *schéma actantiel* où le modèle permet de déchiffrer la nature sémiolinguistique du récit et le *schéma quinaire* où *[…] toute intrigue se présente comme le passage d'un état à un autre* (Jouve, 2006). Ainsi, nous supposons qu'il existe *une structure matricielle de l'histoire, fondée sur l'enchaînement logique des*

séquences (Ibid.). Par ailleurs, nous faisons l'hypothèse que le concept d'*Espaces de Travail Connectés* (Lagrange & Laval, 2019) favorise, avec les adaptations nécessaires, l'étude des connexions entre ETA et MAS donnant ainsi du sens au travail de l'élève dans des tâches impliquant différents domaines : la logique, l'algorithmique, la programmation et la littérature de jeunesse (LJ), en tenant compte des genèses sémiotique, instrumentale et discursive, et de la structure narrative du récit. De plus, nous complétons cette étude par une approche des *paradigmes algorithmiques* (Laval, 2018), guidant et orientant le travail de l'élève lors des connexions, permettant d'affiner l'étude des espaces personnels que l'élève se construit et, comment il articule ses connaissances sur les algorithmes et sa compréhension de la structure du conte.

Les Espaces de Travail Algorithmique et les Espaces de Travail Connectés

Dans la continuité des recherches sur les *Espaces de Travail Mathématiques* (Kuzniak et Richard, 2014), nous proposons une structuration du travail algorithmique à travers les *Espaces de Travail Algorithmique* (ETA) (Laval, 2018). Ceux-ci articulent un plan cognitif et un plan épistémologique, en interaction avec trois genèses : sémiotique, instrumentale et discursive. La *genèse sémiotique* repose sur l'usage de symboles et d'objets graphiques compris comme signes, tels que les *sprites* dans *Scratch*, qui matérialisent les transformations d'état (Laval, 2018). La *genèse instrumentale* est liée à la construction et à l'exploration empirique d'algorithmes dans des environnements numériques : ici, l'exécution dans *Scratch* ne se limite pas à une mise en œuvre passive mais s'inscrit dans un processus de modélisation active (Lagrange et Laval, 2022). Enfin, la *genèse discursive* concerne la justification et la validation algorithmique, où les élèves expérimentent la robustesse de leurs programmes en s'appuyant sur un cadre de référence (Laval & Peuch-Lestrade, 2024). Dans l'enseignement primaire, l'accent est mis principalement sur les genèses sémiotique et instrumentale, facilitant l'interaction concrète avec les concepts algorithmiques.

L'idée d'un cycle de modélisation adapté à l'interprétation d'un récit littéraire

Notre approche (Figure 1) adapte le *cycle de modélisation* de Blum et Leiss (2005) aux spécificités de l'algorithmique et de l'interprétation du récit, en observant (Laval & Peuch-Lestrade, 2024) les étapes suivantes :

> *(1) la compréhension du texte ; (2) la construction d'un modèle littéraire ; (3) la transcription numérisée avec reconnaissance des personnages, des objets, des lieux - (3a) modèle algorithmique et implémentation dans un environnement numérique - (3b) interprétation et validation des résultats renvoyés par l'animation numérisée ; (4) la possibilité de construire des fins alternatives à l'histoire ; (5) une réécriture du récit - (5a) choix de modifier le modèle algorithmique initial - (5b) réécriture au « papier-crayon » de l'histoire ; (6) une interprétation ; (7) la lecture.*

L'exemple du conte *Le Petit Prince* (PP) de Saint-Exupéry illustre chaque étape du cycle de modélisation algorithmique pour la littérature (Figure 1) en apportant des

preuves concrètes du travail algorithmique réalisé par des élèves de CM1 (Grade 4). Dans un premier temps, les élèves analysent le texte en s'appuyant sur la morphologie de Propp, le schéma actanciel de Greimas et le schéma quinaire de Larivaille (Cf. section qui suit). Ils identifient les relations entre les personnages et les fonctions narratives, qu'ils représentent ensuite sous forme de graphes narratifs. Cette première phase conduit à la construction d'un modèle littéraire, où la progression du récit est schématisée sous la forme d'un « plan de métro », reliant personnages et événements clés à travers un graphe interactif illustrant les transitions entre les étapes du voyage du PP. À partir de ce modèle, les élèves développent une transcription numérisée et une implémentation algorithmique sur *Scratch* : chaque planète visitée par le héros devient un nœud du graphe, avec des scripts conditionnels déclenchant les interactions entre personnages. Ensuite, l'interprétation et la validation du modèle réalisées grâce à des animations *Scratch*, permet de simuler le récit et d'explorer différentes séquences en fonction des choix du personnage. Puis, dans un second temps, les élèves expérimentent la réécriture du récit en modifiant les règles d'interaction dans *Scratch*, testant ainsi la robustesse de leur modèle algorithmique en introduisant de nouveaux choix narratifs. Enfin, ils comparent l'ensemble du processus au récit original, afin d'observer comment la structure narrative peut être traduite en algorithmes. Cette approche interdisciplinaire, combinant littérature, modélisation et programmation, montre comment les élèves peuvent explorer activement l'interprétation d'une œuvre grâce à une démarche numérique interactive.

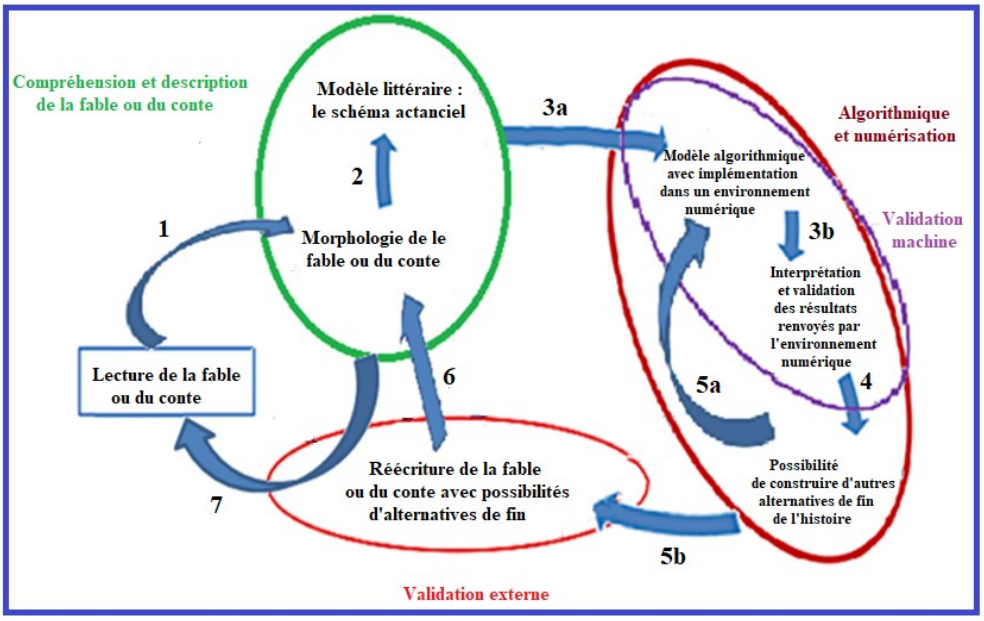


Fig. 1 : Cycle de modélisation algorithmique pour la littérature (Laval & Peuch-Lestrade, 2024).

Des Méthodes d'Analyse Structurale

Nous considérons trois méthodes pour analyser et comprendre les structures narratives du récit. Dans la *morphologie du conte*, nous avons un modèle d'analyse structuré

construit avec 31 fonctions narratives et les différents rôles des protagonistes (héros, méchant, donateur, etc.).

> *Son approche se base sur l'idée que les contes de fées partagent une structure narrative commune, avec des séquences événementielles prévisibles. Les fonctions identifiées par Propp se succèdent dans un ordre spécifique, toujours le même, et consistent en actions typiques, telles que l'interdiction, la violation, la quête, et la reconnaissance.* (Laval & Peuch-Lestrade, 2024)

Greimas (2002) développe un modèle simplifié, le *schéma actantiel*. Dans tout récit, il identifie six actants fondamentaux : un *Sujet* (celui qui cherche quelque chose), un *Objet* (ce qui est cherché), un *Destinateur* (celui qui encourage à la quête), un *Destinataire* (celui qui profite de la quête), un *Adjuvant* (celui qui soutient le sujet), et un *Opposant* (celui qui s'oppose au sujet). Cela *permet de décortiquer les rôles et les relations entre les personnages, indépendamment du contenu narratif spécifique* (Laval & Peuch-Lestrade, 2024). Larivaille s'appuie sur le modèle du *schéma quinaire* structurant le récit en cinq étapes, décrivant une progression linéaire du récit : une *Situation Initiale* avec un état de départ des protagonistes et du monde narratif, une *Complication* où un événement perturbateur provoque l'action, une *Action* où des efforts sont entrepris pour résoudre la *Complication*, une *Résolution* avec un dénouement progressif de la *Complication*, et la *Situation Finale* avec un nouvel état stable des protagonistes et du monde narratif. Ce schéma permet de mieux concevoir l'enchaînement des événements, aboutissant à une histoire cohérente.

Le concept de paradigmes algorithmiques

Une étude des paradigmes algorithmiques (Laval, 2018), guidant et orientant le travail des élèves lors des articulations entre ces modèles, littéraires et algorithmique, aide à observer quels espaces personnels les élèves se construisent selon leur niveau scolaire et comment ils articulent des connaissances sur les algorithmes et la compréhension de la structure du récit.

NOS HYPOTHESES, NOS ATTENTES ET NOS QUESTIONS DE RECHERCHE

A travers la morphologie, nous étudions les formes et la mise en place des éléments constitutifs du récit. Nous partons de l'hypothèse que l'élève ne se contente pas d'étudier le contenu du récit mais le contenant, c'est-à-dire la forme extérieure du récit et sa structure globale. L'analyse du récit fait appel à une logique fictionnelle propre à l'histoire, simple et incluant divers phénomènes qu'ils soient magiques ou normaux. Selon les MAS, nous partons de l'hypothèse que certaines histoires commencent par un manque ou un méfait initial et se terminent par un dénouement qui peut être heureux, après réparation des obstacles lors des actions précédentes. Nous supposons qu'une utilisation de graphes narratifs aide l'élève à mieux visualiser et comprendre les relations entre les protagonistes et les événements. Nous faisons l'hypothèse que pour

l'élève, la transcription du récit tenant compte de sa logique, en des algorithmes simples ou complexes favorise la mobilisation du langage et du raisonnement, mais aussi la mémorisation du récit et sa reformulation. Nous supposons que la possibilité de créer des fins alternatives permet à l'élève d'explorer différentes perspectives et d'approfondir sa compréhension du récit. Cela lui offre une nouvelle représentation mentale du récit qu'il teste en implémentant ses algorithmes dans *Scratch*. Nous supposons que la compréhension du récit par l'élève se schématise par une représentation sémiotico-instrumentale, favorisant l'exploration du récit. Ainsi, l'élève va au-delà d'une simple lecture du récit, en proposant une activité de programmation informatique. Cette organisation implicite de conduites et de gestes forme un schème (Vergnaud, 2013) constituant une mémoire de l'action et du travail de compréhension du texte et de la maitrise du langage. Partant de la TDG et des MAS, nous posons comme question de recherche : « Comment une application simplifiée de la TDG à l'analyse morphologique et narrative des récits issus de la LJ peut-elle structurer la compréhension du récit littéraire et enrichir l'enseignement de l'informatique et des mathématiques chez l'élève du primaire ? ». Par ailleurs, dans la continuité des travaux de Laval (2018) où l'algorithmique est vue comme *objet* d'apprentissage entre développement de savoirs spécifiques et usage dans différents champs mathématiques, nous nous questionnons sur « Comment dépasser le stade de l'algorithmique comme *objet* d'apprentissage de savoirs mathématiques, pour que celui-ci devienne aussi un *objet* d'apprentissage dans le champ de la LJ ? ». Pour cela, nous faisons l'hypothèse que la mise en œuvre d'ingénieries didactiques, au sens d'Artigue (1992), adaptées aux différents niveaux du primaire permet de créer des parcours d'apprentissage, favorisant ainsi une compréhension approfondie de concepts mathématiques et littéraires. Par ailleurs, nous supposons que l'idée d'une didactique comparée entre les disciplines mathématique, informatique et littérature met en lumière les convergences et divergences des approches pédagogiques, offrant des pistes d'amélioration pour un enseignement interdisciplinaire plus efficace.

METHODOLOGIE DE RECHERCHE

Notre méthodologie de recherche associe didactique de l'algorithmique et de la (LJ) afin d'enseigner des concepts algorithmiques liés à la compréhension du conte et de la fable chez des enfants de 4 à 10 ans. Nous explorons les recherches sur *Scratch* (voire *Scratch Junior*), en étudiant les approches pédagogiques et les pratiques en classe. Cette exploration est croisée avec l'analyse des actants et des relations narratives, pour élaborer une méthode d'enseignement adaptée. Des tests pilotes et observations en classe permettent d'évaluer la validité de cette approche. Pour pallier la faible familiarité des enseignants du primaire avec l'algorithmique, une formation rapide sur les concepts fondamentaux et l'utilisation de *Scratch*[*Junior*] est proposée. Notre méthodologie inclut enquêtes, expérimentations en milieux scolaires variés, études de cas et analyses documentaires. Un échantillon représentatif est constitué avec des enseignants du public et du privé sous contrat, fournissant un recueil de données variées

(enregistrements, productions d'élèves, questionnaires). L'analyse des résultats éclaire nos hypothèses et questions de recherche. Enfin, nous tirons des implications théoriques et pratiques, en tenant compte des évolutions de l'enseignement face à la démocratisation de l'IA (Lagrange, Richard, Vélez, et Van Vaerenbergh, 2023).

PRESENTATION D'UNE RECHERCHE ACTION COLLABORATIVE

Le contexte

Une classe de la région parisienne (France) est observée avec leur enseignante depuis la rentrée scolaire 2022. Au cours de ces deux années, dans le cadre d'un modèle transmissif (information/communication) sur la médiation, trois ingénieries didactiques (ID) mettant en lien la didactique de l'algorithmique et la didactique de la littérature pour la jeunesse sont construites et expérimentées. Les deux premières ID ont porté sur une fable de La Fontaine et un conte de la littérature arabe. Elles ont fait l'objet de deux communications orales lors de trois colloques universitaires en mai 2022, mars 2023 et en juin 2024. Par ailleurs, elles ont eu lieu au cours de l'année scolaire 2022-2023 (les élèves étaient en CE2 (Grade 3)). L'outil informatique était *Scratch Junior*. La troisième, celle qui fait l'objet de l'aspect expérimentale de cette communication, a été expérimentée entre mars et juin 2024, à raison d'une heure par semaine. Les élèves sont en CM1 (Grade 4) et sont regroupés en binômes et utilisent *Scratch*. A travers ce langage de programmation visuelle, nous démontrons comment l'élève bénéficie d'une expérience d'apprentissage immersive et engageante.

Description rapide de la troisième ingénierie didactique

Dans la 3ème ingénierie autour du conte *Le Petit Prince* de Saint Exupéry (1946), nous étudions la création algorithmique d'animations interactives, soulignant l'importance d'une approche holistique de l'enseignement, intégrant créativité, pensée logique et compréhension narrative chez l'élève. Les binômes, familiers de *Scratch*, restent les mêmes tout au long de l'ID, découpée en deux séquences. La première (non présentée ici) se situe dans le champ de la LJ. Les élèves analysent le conte à l'aide du modèle des MAS. Dans la seconde, les binômes ont pour consigne d'*algorithmiser* (Laval & Peuch-Lestrade, 2024) certains chapitres du conte et de les implémenter dans *Scratch*, après l'écriture d'algorithmes descriptifs en langage naturel. Le choix des chapitres, laissé à l'initiative de chaque binôme, sont : (1) temps d'échange entre le Petit Prince PP et sa rose sur sa planète, puis départ du PP avec l'aide d'un groupe d'oiseaux pour son voyage interstellaire ; (2) voyage du PP sur la planète de l'astronome ; (3) voyage du PP sur la planète du businessman ; (4) rencontre sur la Terre du PP et de l'aviateur avec échange sur la représentation symbolique du mouton ; (5) découverte par le PP du jardin fleuri de roses ; (6) rencontre du PP et du renard ; (7) rencontre du PP et du serpent. Les algorithmes « papier-crayon » suivent un codage de couleurs définit par l'ensemble des élèves : écriture de l'histoire en noir, instructions en rouge, respectant une indentation pour les conditions/boucles et fins alternatives en vert. Les protagonistes (PP, rose, groupe d'oiseaux, aviateur, renard, serpent, astronome,

businessman, avion, groupe des roses, boîte) sont présentés comme des variables de type chaîne. Quand les personnages des planètes visitées ne sont qu'évoqués sans être détaillés, les binômes proposent une variable de type liste notée : Planètes_visitées. Cependant, ce dernier aspect ne reste invoqué qu'au niveau des algorithmes « papier-crayon » et n'est pas utilisé lors du passage à la programmation. Nous supposons que cela est dû au fait que les élèves n'ont pas vu la nécessité d'aller plus loin dans une description plus généraliste des voyages du PP. Quand cela est nécessaire, ils ajoutent des variables (sprites) supplémentaires lors de la programmation, comme une table et une calculatrice pour le businessman. Cela n'est pas évoqué quand les élèves construisent leurs algorithmes au « papier-crayon ». Ils définissent aussi les fonds de chacune des scènes. Une fois que les algorithmes sont implémentés dans *Scratch*, chaque binôme teste le scénario correspondant au chapitre dont il a la charge.

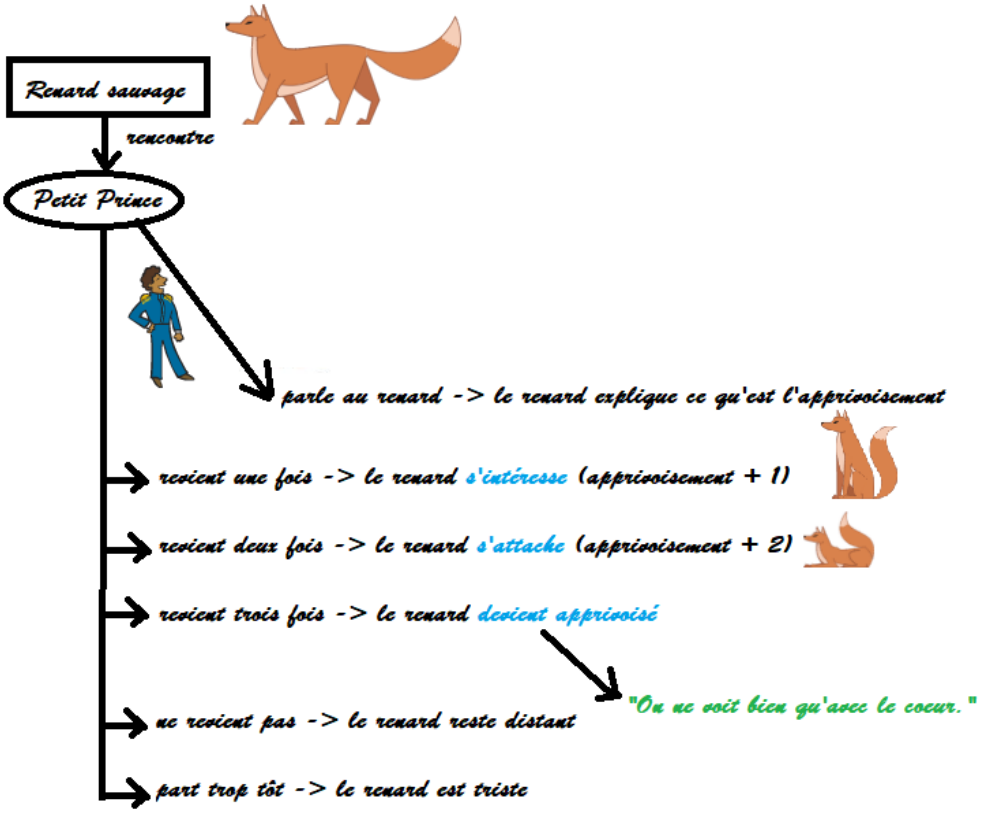


Fig. 2 : Graphe narratif proposé par un binôme de CM1.

Par exemple, un binôme modélise la scène (6) de l'apprivoisement du renard par PP en combinant analyse narrative, algorithmes « papier-crayon » et programmation sur *Scratch*. Il commence par identifier les rôles des personnages dans le schéma actanciel de Greimas : PP (sujet), renard (adjuvant), apprivoisement (objectif). Ensuite, le binôme construit un graphe narratif (Figure 2) où les liens entre les personnages se renforcent à chaque interaction.

L'algorithme papier-crayon suit un codage couleur, par exemple, noir pour le dialogue, bleu pour les conditions (*Si PP revient, renard devient apprivoisé*), et vert pour les fins alternatives (*Si PP part trop tôt, renard reste distant*). Puis, dans l'environnement

Scratch, le binôme créé deux *sprites* interactifs, ajoutent une variable « Apprivoisement » qui augmente à chaque rencontre et programme des conditions et boucles : - Si Apprivoisement ≥ 3, le renard devient apprivoisé et dit *« On ne voit bien qu'avec le cœur »* - Si PP part trop tôt, le renard est triste. Enfin, le binôme expérimente des fins alternatives, modifiant les interactions pour tester différentes évolutions du lien entre PP et le renard.

CONCLUSION

En offrant des outils pour transcender les frontières entre les matières traditionnelles, notre recherche propose une nouvelle voie pour éduquer l'élève, encourageant une réflexion critique, la résolution de problèmes et la participation active dans l'apprentissage. Nous nous situons à la croisée des mondes narratif, mathématique et informatique. Cette exploration conjointe des récits issus de la LJ à travers la lentille mathématique et littéraire, de la TDG à l'algorithmique créative, ouvre des nouvelles perspectives pour l'enseignement primaire, voire secondaire. Ainsi, en introduisant la TDG comme un outil d'aide à l'analyse de la morphologie des contes, nous élaborons une approche graphique, symbolisée par l'idée de « plans de métro » narratifs permettant une visualisation claire des structures sous-jacentes des récits, pouvant offrir à de jeunes élèves une nouvelle manière de comprendre et d'apprécier la richesse des contes traditionnels.

NOTES

1. Pour débuter avec *Scratch*, nous proposons le tutoriel en ligne : https://scratch.mit.edu/projects/editor/?tutorial=all

REFERENCES

Artigue, M. (2002). Ingénierie didactique : quel rôle dans la recherche didactique aujourd'hui ? Les dossiers des sciences de l'éducation. Didactique des disciplines scientifiques et technologiques : concepts et méthodes, N° 8, 281-308.

Blum, W., & Leiss, D. (2005). Modellieren im Unterricht mit der "Tanken"-Aufgabe. Mathematik lehren, 128, 18-21.

De Saint-Exupéry, A. (1946). *Le Petit Prince*. Editions Gallimard.

Farahnak, N. (2010). Analyse structurale de deux contes de Perrault selon les schémas de Propp, Larivaille et Greimas. *Études de Langue et Littérature Françaises*, *2*(1), 5-15.

Greimas, A. J. (2002). *Sémantique structurale*. 3ème édition. Editions PUF.

Jouve, V. (2006). Les métamorphoses de la lecture narrative. Protée, 34(2-3), 153-161.

Kuzniak, A., Richard, R.P. (2014). Spaces for mathematical work: Viewpoints and perspectives. *Relime*, *17*(4.1), 17-26.

Lagrange, J.-B., & Laval, D. (2019). *Connected Working Spaces: The case of computer programming in Mathematics Education*. Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education, Utrecht, Netherlands.

Lagrange, J.-B., & Laval, D. (2022). *Connecting algorithmics to mathematics learning: a design study of the intermediate value theorem and the bisection algorithm. Educational Studies in Mathematics*, vol. 112, pp. 225-245. Springer.

Lagrange, J-b & Richard, R.P. & Vélez, M. & Van Vaerenbergh, S. (2023). Artificial Intelligence Techniques in Software Design for Mathematics Education.

Larivaille, P. (1974). L'analyse (morpho)logique du récit, *Poétique*, n° 19, 368-388.

Laval, D. (2018). *L'algorithmique au lycée entre développement de savoirs spécifiques et usage dans différents domaines mathématiques* (Thèse). Université Sorbonne Paris Cité.

Laval, D., Peuch-Lestrade, D. (2024). *De la page au code : Comment explorer les récits de la littérature de jeunesse à travers les lentilles algorithmique et littéraire*. Actes du colloque Printemps de la Recherche, Angers.

Propp, V. (1970). Morphologie du conte, Paris, Seuil.

Vergnaud, G. (2013). *Pourquoi la théorie des champs conceptuels ?* (Vol. 36, Numéro 2). Informa UK Limited.

EL ESTUDIO DE LA RELACIÓN FUNCIONAL ENTRE RECORRIDO Y DISTANCIA, EN UN CONTEXTO DE MANIPULACIÓN CON ARTEFACTOS MATERIALES

Rosa-Elvira Páez[a], Miguel Delgado[b], Judith Hernández[c], Magally Martínez[d]

[a]Universidad Autónoma de la Ciudad de México, México; [b]Universidad Nacional de Educación a Distancia, España; [c]Universidad Autónoma de Zacatecas, México; [d]Universidad Autónoma del Estado de México, México

La experimentación educativa que se presenta coloca a prueba el diseño de un conjunto de actividades didácticas en relación con un contexto específico proporcionado en un lenguaje natural y en el que se promueve el uso de artefactos materiales (hoja de papel y regla). Con estas actividades didácticas, en términos específicos del contenido matemático, se promueve la identificación de la relación funcional entre recorrido y distancia, con lo cual se espera que emerja en los estudiantes de primer año de universidad, las nociones de variación, relación de dependencia y sus diferentes representaciones semióticas. Desde el punto de vista didáctico, se analiza cómo las actividades diseñadas favorecen el aprendizaje matemático de los estudiantes. El trabajo matemático que desarrolla este grupo se analiza con el modelo de los espacios de trabajo matemático, dado que permite separar los componentes de la actividad matemática en génesis, así como identificar los mecanismos de control en el desarrollo de las actividades didácticas.

Palabras claves: Actividad didáctica**;** Control didáctico; Variación de variables; Relación funcional; Artefacto.

INTRODUCCIÓN

Como especifica Pluvinage (en prensa, p. 58): “Son muy diversos los procesos de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, en particular en el cálculo”, haciendo referencia especialmente cuando se usan los elementos y recursos digitales. Incluso, actualmente con la inteligencia artificial, sin dejar de lado que se puedan combinar diversos artefactos, incluyendo de esta manera a los tangibles (Maschietto y Soury-Lavergne, 2017) o materiales, en el que su uso muestra ventajas al apoyar el proceso de construcción del conocimiento en general y del matemático en particular. En este sentido, para promover el trabajo matemático con diferentes artefactos, se adopta la propuesta de Carrión et al (2016), en el que para el diseño de las actividades didácticas se utiliza la estructura de exploración guiada, que permite que el estudiante adopte mayor responsabilidad en el momento de desarrollarlas o ejecutarlas. Impulsando de esta manera que surjan en los estudiantes las concepciones con relación a los conceptos matemáticos estudiados. Se trata de favorecer en primera instancia un pensamiento divergente en los estudiantes, para luego hacerlos converger hasta llegar a la institucionalización del conocimiento (Hitt y Quiroz, 2019).

Con estos lineamientos se diseñó y probó un experimento educativo, constituido por un conjunto de actividades didácticas en torno a un contexto fijo: El recorrido que realiza una hormiga por el perímetro de un cuadrado. Se estudia la distancia a la que se encuentra la hormiga del hormiguero que está situado en un punto del perímetro del cuadrado. Esta situación de la hormiga tiene su origen en el trabajo de Delgado y Martínez (2023a, 2023b), si bien, para esta investigación se diseñaron algunas actividades didácticas adecuadas al contexto de una universidad pública mexicana que fue seleccionada, a conveniencia, para experimentar.

El contenido matemático que se aborda con estas actividades didácticas se corresponde con conceptos relacionados con el de función, el de variación y el de relación funcional entre dos variables, y otras cuestiones básicas en el marco de un curso de Cálculo Diferencial presente en la formación de estudiantes de ingeniería.

El trabajo, matemático, realizado por los estudiantes se analiza con la Teoría de Espacios de Trabajo Matemático (ETM, Kuzniak, 2023). La intención es responder a las preguntas: ¿Cómo evoluciona la noción de variación de los estudiantes, al integrar en el aula el uso de artefactos materiales? ¿Qué mecanismos de control se identifican en el desarrollo de las actividades didácticas? ¿Cómo favorece el aprendizaje de los estudiantes, las actividades diseñadas para este experimento educativo?

MARCO TEÓRICO

En este trabajo de investigación, el modelo ETM permite analizar el trabajo matemático personal del estudiante, considerando de manera separada los componentes de la actividad matemática y, a su vez, los mecanismos de control que puedan ejercer. En relación con el uso de artefactos tecnológicos, y en términos de mecanismos de control, Flores (2023) señala que en lo reportado por Guin y Trouche (1998), el uso de calculadoras, en su caso graficadoras, permiten tener un control del objeto matemático en el registro gráfico, lo que a su vez debe de favorecer el control teórico. De acuerdo con los resultados que allí se reportan, este mecanismo de control no fue suficiente para que los estudiantes tuvieran éxito en el desarrollo de la tarea propuesta. Asimismo, en Arzarello y Sabena (2011) se reconoce el control semiótico que hace referencia a la selección y al tratamiento de recursos semióticos, y el control teórico que explica la selección de los aspectos conceptuales en términos matemáticos, empleados por los estudiantes. Por ello, ante el interés de reconocer el mecanismo de control activado en el trabajo matemático de los estudiantes en el desarrollo de la secuencia didáctica propuesta, se retoma la distinción que presenta Flores (2023) y Kuzniak y Nechache (2023). Es decir, se analiza el trabajo matemático personal y el mecanismo de control que emerge, identificando el control semiótico como la comprobación o inspección que realiza cada estudiante en relación con los diferentes registros de representación semiótica en los que expresa su trabajo personal. La inspección del control discursivo (o teórico) realizado en el momento de hacer uso de las definiciones matemáticas, las propiedades o los teoremas. La inspección

instrumental realizada con el uso de los artefactos simbólicos, los materiales o los tecnológicos de su trabajo.

METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN

Diseño de las actividades didácticas

Se prepararon cuatro actividades didácticas con una estructura de actividad de exploración guiada (Carrión *et al.*, 2016) con hojas de trabajo en la que se proporcionan indicaciones y con preguntas. La intención principal es que la actividad didáctica sea desarrollada de manera autónoma, y que el estudiante asuma la responsabilidad de su trabajo matemático. Se procura que esas indicaciones sean suficientes y que las preguntas planteadas mantengan el interés de los estudiantes. Además, se consideró importante disponer un tiempo de trabajo individual, y un tiempo en común para una discusión grupal, que en la medida de lo posible sea del estilo debate científico (Legrand *et al.*, 2011). Por ello, las actividades se diseñaron en relación con un trabajo de 90 minutos; periodo que se corresponde a la duración estándar de una clase de Cálculo Diferencial en la universidad en la que se exploró.

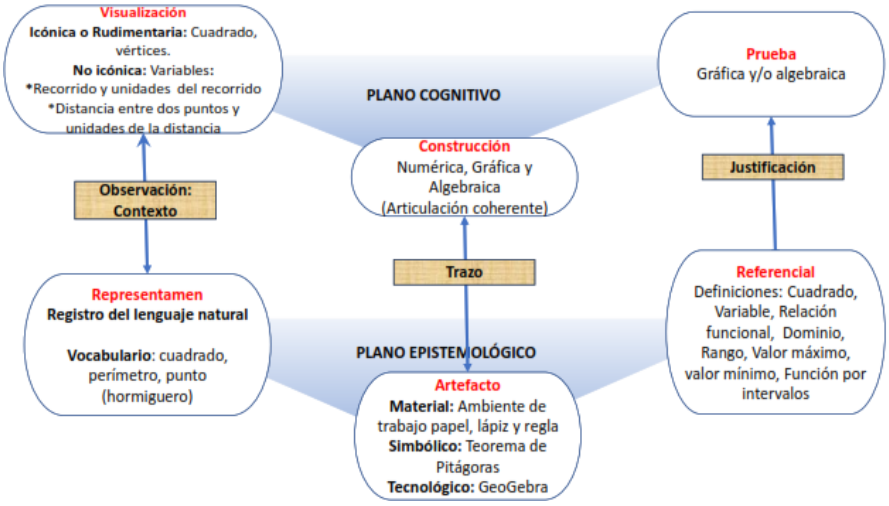


Figura 1: Diagrama de ETM con elementos específicos de la situación.

Desde el punto de vista metodológico, y como un primer punto de partida para el diseño de las actividades, se utilizó el diagrama de los ETM (ver Figura 1), de la manera como lo especifica Kuzniak (2019), *para visualizar y sintetizar el trabajo matemático que tiene que hacer el estudiante para comprender la situación genérica* que da origen a esta experimentación. Se presenta esta situación global en un lenguaje natural y con cierto grado de libertad con algunas variantes como dejar a la libre elección el punto en donde se ubica el hormiguero o fijar el hormiguero en uno de los vértices en el caso de un recorrido cuadrado, y reproducir la tarea en una figura geométrica como el rectángulo, que corresponde a la actividad didáctica 4, en la que se hace uso de GeoGebra para realizar la gráfica de la expresión algebraica que propone el estudiante. Para cada actividad se establecieron objetivos didácticos y objetivos para la adquisición de contenidos matemáticos que se abordan en un primer curso de Cálculo Diferencial.

Para efectos de esta comunicación, se aborda el trabajo realizado por los estudiantes en las dos primeras actividades didácticas.

Experimentación

La implementación de las actividades didácticas se realizó en el marco de un curso de Cálculo Diferencial para ingenieros en una universidad pública de México. La experimentación educativa se desarrolló a lo largo de 5 sesiones de 90 minutos cada una, en el primer semestre del año 2024. El grupo participante en este experimento lo forman siete estudiantes que denominamos con E1, ..., E7 para identificar el trabajo matemático personal. Por otro lado, se etiquetan con Pn°An° cada una de las preguntas, por ejemplo, la etiqueta P1A1 se refiere a la 1ª pregunta de la 1ª actividad didáctica. En el caso de que las preguntas tengan subdivisiones, se etiquetan como en el ejemplo P2aA2, que corresponde al inciso "a" de la 2ª pregunta de la 2ª actividad didáctica.

RESULTADOS

En el interés de analizar la efectividad de las secuencias didácticas e identificar las génesis y el mecanismo de control que se activan en el trabajo matemático del estudiante, se realiza el análisis de corte cualitativo, enfocándose principalmente en el trabajo matemático personal de los estudiantes en las actividades didácticas A1 y A2.

Trazo, comunicación y construcción de un cuadrado

Las preguntas P1A1, P2A1 y P1A2 tienen que ver con el referencial teórico de la figura geométrica del cuadrado. Es decir, en estas preguntas, los estudiantes deben poseer la definición de cuadrado para realizar su trazo (P1A1), comunicar los elementos principales de una situación que corresponde a esta figura geométrica (P2A1) y la construcción con papel del mismo (P1A2).

Como ya se ha mencionado, se parte de la situación hipotética: "Una hormiga sale de su hormiguero, el cual está en un punto sobre el perímetro de un cuadrado. Si anda, lo hace sólo por este perímetro sin retroceder".

En la P1A1 se les solicita que "realice un esquema o bosquejo de la situación hipotética". En el análisis del trabajo matemático de los estudiantes se evidencia que la génesis semiótica y en especial la instrumental, se activa de manera explícita y en algunos casos, una coherencia con la génesis discursiva de manera implícita. Esto es, en lo semiótico (a excepción de E1), la representación figural es coherente con el enunciado dado en el registro del lenguaje natural, en lo que respecta al cuadrado. El mecanismo de control instrumental se evidencia en el trazado del cuadrado con la regla, en donde los lados son iguales y sus cuatro ángulos son rectos. Siendo esto último a su vez, los elementos principales de la definición del cuadrado, a lo que da pie que implícitamente el control discursivo también esté presente.

En el trabajo matemático que se muestra en la Figura 2, es un ejemplo de la activación de la génesis semiótica e instrumental sin que haya presencia del mecanismo de control sobre la génesis discursiva. En el trabajo de E1, realiza un rectángulo (ver Figura 2

lado izquierdo) y en el trabajo de E3, ubica el hormiguero en el centro del cuadrado y no en un punto sobre el perímetro del cuadrado (ver Figura 2 lado derecho)

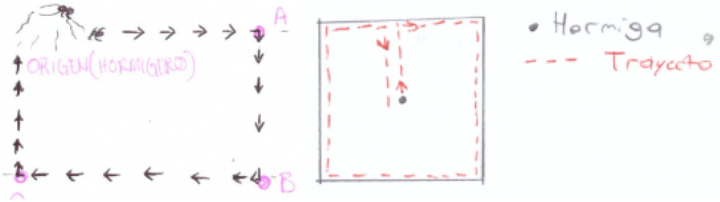
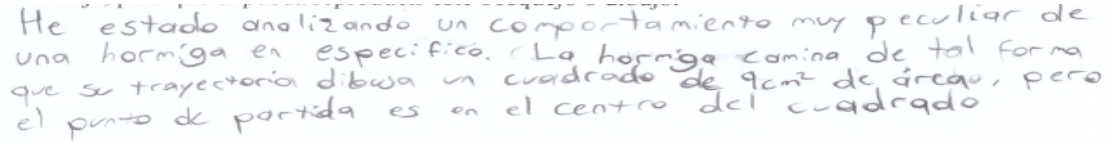


Figura 2: Trabajo matemático de E1 (a la izquierda) y E3 (a la derecha) en P1A1.

En la P2A1 se les solicita redactar un mensaje para reproducir el bosquejo realizado en la P1A1. La pregunta dice: "Con la intención de comunicarle a un compañero su bosquejo, sin que se lo presente, redacte un mensaje, para que él pueda reproducir este bosquejo o dibujo". En el trabajo realizado por los estudiantes no se activa un mecanismo de control semiótico-discursivo. Esto es, en su mensaje no cobra importancia específicamente la longitud del trazo que ellos hicieron. Ninguno de los estudiantes hace referencia explícitamente a la longitud del cuadrado que ellos trazaron. A excepción de E3, que en P1A1 no se identificó un mecanismo de control semiótico-discursivo, en esta tarea que se solicita en P2A1 proporciona los elementos fundamentales para que quien reciba el mensaje pueda reconstruir el bosquejo proporcionado en P1A1. En su justificación, retoma la noción de área, que de manera implícita lleva a la construcción de un cuadrado de 3 centímetros de longitud, colocando el hormiguero como lo expresa en un lenguaje natural (ver Figura 3).


He estado analizando un comportamiento muy peculiar de una hormiga en específico. La hormiga camina de tal forma que su trayectoria dibuja un cuadrado de 9cm² de área, pero el punto de partida es en el centro del cuadrado

"He estado analizando un comportamiento muy peculiar de
una hormiga en específico. La hormiga de tal forma
que su trayectoria dibuja un cuadrado de 9 cm^2 de área, pero
el punto de partida es el centro del cuadrado"

Figura 3: Trabajo matemático de E3 en P2A1.

En A2 se incluye un trabajo con un artefacto material que corresponde al trabajo que debe de hacer sobre la hoja de papel blanca tamaño carta cuyas dimensiones corresponden a 21.59 cm × 27.94 cm. La instrucción inicial es realizar dobleces para obtener un cuadrado, recortando con tijeras el excedente, de tal manera que pudieran disponer de un cuadrado.

La P1A2 solicita "¿de qué manera puede comprobar que la figura obtenida es un cuadrado? Argumente su respuesta". Esta tarea pretende nuevamente activar elementos del referencial teórico del estudiante en relación con la definición de cuadrado. Ninguno de los 7 estudiantes especifica los elementos necesarios para argumentar que corresponde a un cuadrado. Solo se quedan en la justificación de que los lados tienen la misma longitud. Dando cabida con ello a que también se pueda hacer referencia al

rombo. El estudiante E4 hace alusión a la diagonal, pero sin especificar que las dos diagonales deben tener la misma longitud para que sea un cuadrado. Ninguno hace referencia a los ángulos rectos, elemento que de manera implícita, si fue considerado al momento de trazar el bosquejo en A1P1. En la justificación se activa un mecanismo de control instrumental, expresado en lenguaje natural, con un vocabulario como "misma medida", "iguales", "mismo tamaño".

Noción inicial de variación y relación funcional

De acuerdo con el diseño de las actividades didácticas, y entrando ya en específico a los conceptos matemáticos que conciernen en un curso de cálculo diferencial, en A1 se pretende explorar la noción de los estudiantes con relación a variación, relación entre las variables especificadas en la situación hipotética, y los conjuntos en los que están inmersas las variables.

En la P4A1 la tarea específica es: "Observe el recorrido de la hormiga y la distancia que está la hormiga del hormiguero, ¿qué cantidades varían?, ¿qué cantidades se mantienen constantes?". En esta tarea, en cuyo verbo se utiliza "observar", se le especifican las dos variables que están relacionadas dentro de la situación hipotética, y de la cual se quiere que el estudiante analice.

En las respuestas proporcionadas por los estudiantes, podemos establecer dos categorías. La primera categoría corresponde a los estudiantes que afirman que no hay variación como E1. El afirma que "Ninguna cantidad es variable. Todas son constantes y una sola cantidad (5)". En su justificación está fija la longitud del cuadrado que vuelve a realizar en la hoja cuadriculada proporcionada y con las indicaciones dadas en P3A1. La segunda categoría corresponde a los estudiantes que solo identifican variación en el recorrido de la hormiga, en este caso corresponde a los estudiantes E2, E3, E6.

Dado que el trabajo matemático de los estudiantes de manera individual, después de alrededor de 50 minutos no tenía el avance para el desarrollo de la actividad, las investigadoras promueven la discusión grupal al estilo debate científico, que permite que entre ellos mismos identificaran la variación de las dos variables que se presentan en la situación.

Para el caso de E4, consolida la variación de recorrido y distancia, después de la discusión grupal. Es decir, en su primer momento de trabajo no había escrito nada en la hoja de trabajo. La respuesta proporcionada aparece con pluma de color rojo. Ello porque la instrucción dada fue que después de la discusión grupal, utilizaran una pluma de un color diferente a la que estaban usando. Esto para poder precisamente identificar la influencia de la discusión grupal. Así, se evidencia la importancia de un trabajo con los colegas, ya que después de la discusión con E1, E2 y E3, es E4 el único estudiante que específicamente hace evidente la variación reproduciendo una respuesta como: "Va variando el número de centímetros recorridos por la hormiga y la distancia que hay entre cada punto hacia el hormiguero".

Evolución de la noción de variación y relación funcional

Como ya se mencionó, en el desarrollo de A2 se integran artefactos materiales como la manipulación de una hoja de papel para construir un cuadrado e instrumentos de medida que permitan completar la información solicitada en la secuencia didáctica. La actividad específica de etiquetar diferentes puntos en cada lado del cuadrado y de hacer el trazo con diferentes colores que corresponde a cada una de las variables, favorece que los estudiantes perciban la diferenciación de las variables recorrido y distancia. Es el caso de E1, en el que en A1 afirmaba que no existía variación, y en esta actividad realiza la diferenciación entre las variables en juego, realizando un trabajo matemático basado en artefacto material, como es la regla para medir, pero también en un trabajo con artefacto simbólico, haciendo uso del Teorema de Pitágoras (ver Figura 4).

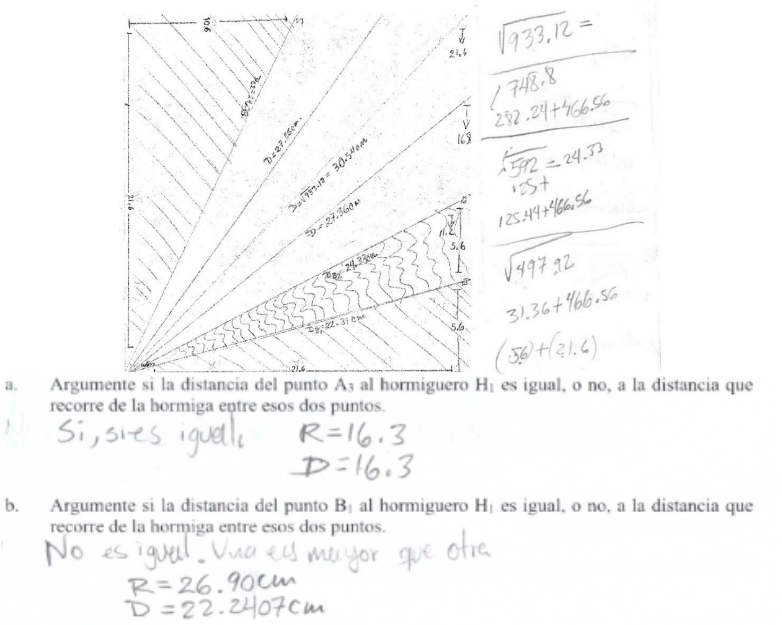


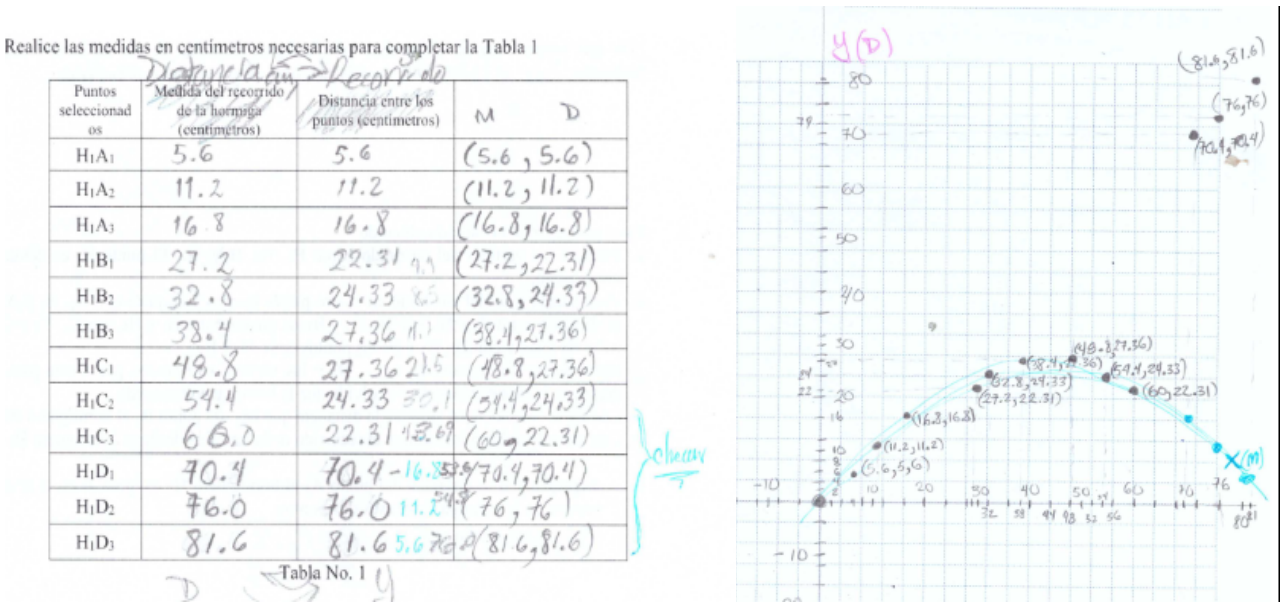
Figura 4: Trabajo matemático de E1 en P2A2.

La génesis discursiva activada en A2 por parte de los estudiantes se queda en un nivel de justificación fundamentada en el mecanismo de control instrumental con el artefacto material. Por ejemplo, en P2bA2 en donde específicamente se les solicita que "argumente si la distancia del punto B_1 al hormiguero H_1 es igual, o no, a la distancia que recorre la hormiga entre esos dos puntos", E1 responde que "No es igual. Una es mayor que otra" y proporciona específicamente las medidas de las variables R y D (ver Figura 4 lado derecho). Aunque realiza un trabajo con el artefacto simbólico, no lo utiliza para argumentar su respuesta. Este fue lo que caracterizó el trabajo de algunos otros estudiantes, a excepción de E4 que activa la génesis discursiva a través del artefacto simbólico, haciendo referencia que para calcular la distancia en el segundo y tercer lado del cuadrado se debe hacer uso del Teorema de Pitágoras, sin recurrir a las medidas proporcionadas por el artefacto material. En específico para P2bA2 responde: "No es la misma distancia ya que para sacar la distancia que hay del punto H_1 a B_1

tendríamos que hacer uso del teorema de Pitágoras". También se presentan casos en que el estudiante se queda en lo descriptivo. Es decir, describe lo que visualiza. Por ejemplo, E6, usa un registro del lenguaje natural y descriptivo: "No es igual porque la distancia entre el punto B_1 y H_1 se visualiza como línea recta y la hormiga en su recorrido va avanzando en línea recta y después sube".

Un ejemplo de la activación de un mecanismo de control semiótico

El trabajo de medición que se solicita en P2eA2, favoreció que en el caso de E1, al haber una confusión en el registro numérico, dado que en el último lado del cuadrado confundió nuevamente el recorrido de la hormiga con la distancia, al pasar al registro de representación gráfica evidencia que lo registrado en lo numérico no es coherente (ver Figura 5).



Realice las medidas en centímetros necesarias para completar la Tabla 1

Puntos seleccionados	Medida del recorrido de la hormiga (centímetros)	Distancia entre los puntos (centímetros)	M D
H_1A_1	5.6	5.6	(5.6, 5.6)
H_1A_2	11.2	11.2	(11.2, 11.2)
H_1A_3	16.8	16.8	(16.8, 16.8)
H_1B_1	27.2	22.31	(27.2, 22.31)
H_1B_2	32.8	24.33	(32.8, 24.33)
H_1B_3	38.4	27.36	(38.4, 27.36)
H_1C_1	48.8	27.36	(48.8, 27.36)
H_1C_2	54.4	24.33	(54.4, 24.33)
H_1C_3	66.0	22.31	(60, 22.31)
H_1D_1	70.4	70.4	(70.4, 70.4)
H_1D_2	76.0	76.0	(76, 76)
H_1D_3	81.6	81.6	(81.6, 81.6)

Tabla No. 1

Figura 5: Trabajo matemático de E1 en P2eA2 (izquierda) y P4A2 (derecha).

El trabajo de medición que realiza E1, para el segundo y tercer lado del cuadrado, como ya se especificó, lo corrobora haciendo uso del Teorema de Pitágoras. Un aspecto que llama la atención es el uso de las literales para expresar una variable. Este estudiante venía utilizando R y D, pero en la tabla, quizás con la intención de hacer coincidir la variable con la primera letra que se coloca en la columna, hace un uso ahora de M para expresar el recorrido. Por otro lado, a pesar de que en la experimentación se les proporcionó una hoja cuadriculada, se evidencia dificultades de aprendizaje que corresponde a no especificar una unidad de medida en los ejes al trazar el plano cartesiano. De la misma manera, se evidencia la tendencia de unir los puntos, dado que remarca con un leve trazo haciendo parecer que la gráfica corresponde a una curva conocida para él, como si fuera una parábola. Otro aspecto es que a pesar de haber calculado la máxima distancia que corresponde a la diagonal del cuadrado, no la ubica en el plano cartesiano. Al hacer el trazo, entre la pareja ordenada H_1B_3 y H_1C_1 lo tiende a remarcar como si fuera una función constante dentro de ese intervalo del recorrido

de la hormiga. Esto lleva a reflexionar sobre la importancia de incluir en la actividad didáctica, las parejas ordenadas que corresponde a los vértices del cuadrado, dado que, de manera autónoma, los estudiantes no colocan ningún otro punto de importancia en la representación gráfica.

ALGUNAS REFLEXIONES

Las situaciones reflejadas en este trabajo establecen una primera etapa donde los estudiantes, universitarios, presentan dificultades en nociones matemáticas de variación, identificación de variables y relación funcional, las cuales son fundamentales para el buen desarrollo de un curso de Cálculo Diferencial. Como se evidenció en el análisis de los resultados, en un principio se confunde la distancia de la hormiga al punto inicial de partida y la distancia que debió recorrer tal hormiga. La comparación de los datos numéricos obtenidos a lo largo de un primer lado del cuadrado genera una primera presunción de la igualdad de la distancia y el recorrido, sin tener en cuenta que esta situación cambia conforme la hormiga avanza en cada lado del cuadrado, por lo que claramente la distancia se mide sobre un segmento y el recorrido corresponde a una poligonal recta, y por tanto los valores numéricos son diferentes. Aunque se solicitó el intervalo de variación de distancia y recorrido, la supuesta igualdad de variables se mantuvo en algunos estudiantes hasta la puesta en común del grupo.

Inicialmente no se consolidó la idea de estar trabajando con dos variables distintas, puesto que sólo quedaba reflejado un conjunto finito de medidas de esas dos variables. Como se ha dicho, la diferenciación entre las dos variables que son mencionadas en las hojas de trabajo, sólo se logró en el momento de la discusión grupal. Justo cuando los estudiantes realizaron el esquema en el tablero y se hicieron preguntas para favorecer la discusión. En ese momento, todos los estudiantes logran distinguir las dos variables en juego. Sin duda, esta diferenciación se fortalece y refuerza la siguiente actividad, en la cual los estudiantes emplearon otro nuevo artefacto material: la hoja en blanco, y continúan con la regla para generar una tabla de medidas. Al desarrollar la segunda actividad es que los estudiantes adquieren una mayor conciencia de la variación de las variables y de la relación funcional que existe entre ellas. Se remarca la expresión funcional puesto que se intentaba describir la variable distancia en función de la variable recorrido, y no la variable recorrido en términos (relación inversa) de la distancia.

En Delgado y Martínez (2023) la actividad didáctica se inicia con la acción de tomar las medidas tanto del recorrido como de la distancia para favorecer la asunción de dos variables relacionadas. En esta experimentación, lo anterior queda clarificado al realizar la segunda actividad. Se comprobó que la noción de variación de una variable y la identificación de variables que estaban especificadas en la hoja de trabajo, no es un proceso espontáneo y que su aparición es favorecida al hacer uso de artefactos tangibles, por un lado debido a los procesos de medida, adquiriendo ellos mismos sus conjuntos de datos, ya que el tiempo empleado no requiere más que concentración personal. Por otro lado, por la constante visualización de valores distintos que deben

tener algún tipo de explicación para acercarse a una formulación simbólica y más o menos algebraica. Al menos, los resultados aquí obtenidos permiten realizar esas primeras conjeturas, en las cuales se propuso diseñar un camino o proceso didáctico que pueden realizar los estudiantes para tomar conciencia significativa del concepto de variación funcional.

Delgado y Martínez (2023) destaca que la primera dificultad con la que se encontraron los estudiantes correspondía al efectuar el trazado del cuadrado. Sin embargo, en este experimento, este aspecto no fue problemático, ya que solo un estudiante traza un rectángulo en lugar de un cuadrado. Sin embargo, existe una dificultad principal común tanto para los estudiantes con los que experimentó Delgado y Martínez, como para los estudiantes de este experimento educativo: los estudiantes no consiguen abstraer una representación gráfica ni algebraica, acorde con el modelo que se les presenta en la situación hipotética. Esto es, el estudio de una función a trozos requiere de un mayor trabajo en el aula de clase.

En relación a los mecanismos de control y génesis evidenciadas en el trabajo matemático de estos estudiantes, se identifica que la génesis discursiva se instala en un nivel de justificación, fundamentada en el proceso de medición con el artefacto material. Sin embargo, el trabajo de manipulación con los artefactos materiales y la utilización de diferentes registros de representación semiótica, permitió emerger el mecanismo de control semiótico. Elementos de simetría que son perceptibles al tomar las mediciones, realizan su rol de control al disponerlos en el registro de representación gráfica, más que en el registro de representación numérica.

Finalmente, como lo especifica Pluvinage (2019), utilizar el modelo ETM permitió separar los componentes de la actividad matemática de los estudiantes. Esta separación proporciona información sobre las modificaciones y evolución que produjo en sus aprendizajes y la integración de los artefactos materiales usados. También notifica los mecanismos de control activados en el trabajo matemático y la operatividad con el artefacto material (ver Flores, 2023; Kuzniak y Nechache, 2023). De esta manera, el principio al que hace referencia Pluvinage (2019), la separación del trabajo matemático, antes de reunir, es útil en la enseñanza. Entonces, el reto corresponde al diseño e implementación de actividades didácticas que sean eficaces para el desarrollo del proceso de aprendizaje de los estudiantes en las que apoye el proceso de propiciar génesis que hagan coherente el plano cognitivo del estudiante con el plano epistemológico.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo fue posible gracias al apoyo de la Universidad Autónoma de la Ciudad de México, proyecto de investigación: UACM CCYT-CON-10. Se agradece a los estudiantes que participaron en este experimento educativo. La propuesta de investigación está en el marco del proyecto de enseñanza del cálculo de las instituciones educativas a las que pertenecen los autores y corresponde a la comunidad

que impulsa el Encuentro Internacional sobre la enseñanza del Cálculo, Ciencia y Matemáticas (EICAL), así como de un proyecto de innovación educativa de la UNED.

REFERENCIAS

Arzarello, F., & Sabena, C. (2011). Semiotic and theoretic control in argumentation and proof activities. Educational Studies in Mathematics, 77(2), 189-206.

Carrión, V., Pluvinage, F., Adjiage, R. (2016). Facilitating the genesis of functional working spaces in guided explorations. ZDM Mathematics Education, 48, 809-826. https://doi.org/10.1007/s11858-016-0791-y

Delgado, M. y Martínez, M. (2023a). Introducción a los conceptos de función y de función periódica en la formación de profesores usando computadora. En investigaciones y experiencias en enseñanza de las ciencias y la matemática. UAEM. ISBN 978-607-633-573-4 (impreso Universidad Autónoma del Estado de México).

Delgado, M. y Martínez, M. (2023b). Experiencia innovadora con funciones periódicas derivadas del andar de una hormiga en ingeniería. Pi Innova Math, 5, 106-120.

Flores, M. (2023). La notion de contrôle et networking de théories. En C. Derouet, A. Nechache, P.R. Richard, L. Vivier, I.M. Gómez-Chacón, A. Kuzniak, M. Maschietto & E. Montoya Delgadillo, Actes du septième symposium d'Étude sur le Travail Mathématique (pp. 59-70). IREM de Strasbourg.

Guin, D., y Trouche, L. (1998). The Complex Process of Converting Tools into Mathematical Instruments. The Case of Calculators, The International Journal *of Computers for Mathematical Learning*, (3), 195-227.

Hitt, F y Quiroz, S. (2019). Formation et évolution des représentations fonctionnelles-spontanées à travers un apprentissage socioculturel, Annales de Didactique et de Sciences Cognitives [En ligne], 24 | 2019, mis en ligne le 01 janvier 2022, consulté le 10 juin 2024. URL : http://journals.openedition.org/adsc/630 ; https://doi.org/10.4000/adsc.630

Kuzniak, A. (2019). La théorie des Espaces de Travail Mathématique –Développement et perspectives. In L. Vivier & E. Montoya-Delgadillo (Eds.). *Sexto Simposio sobre el Trabajo Matemático* (pp 21-60). Valparaiso: Pontificia Universidad Católica de Valparaíso. https://etm7.sciencesconf.org/data/Actes_ETM6.pdf

Kuzniak, A. (2023). Trabajo matemático en análisis: identificación y construcción, homenaje a Francois Pluvinage. En investigaciones y experiencias en enseñanza de las ciencias y la matemática. UAEM. ISBN 978-607-633-573-4 (impreso Universidad Autónoma del Estado de México) ISBN 978-607-633-578-9 (pdf Universidad Autónoma del Estado de México).

Kuzniak, A. y Nechache, A. (2023). Contrôles et travail mathématique. En C. Derouet, A. Nechache, P.R. Richard, L. Vivier, I.M. Gómez-Chacón, A. Kuzniak, M.

Maschietto & E. Montoya Delgadillo, Actes du septième symposium d'Étude sur le Travail Mathématique (pp. 71-82). IREM de Strasbourg.

Legrand, M., Lecorre, T., Leroux,L., Parreau, A. (2011). Le principe du « Débat Scientifique » dans un enseignement. IREM de Grenoble. Disponible en: https://publimath.univ-irem.fr/numerisation/IGR/IGR11026/IGR11026.pdf

Maschietto, M., & Soury-Lavergne, S. (2017). The duo "pascaline and e-pascaline" : An example of using material and digital artefacts at primary school. In E. Faggiano, F. Ferrara, & A. Montone (Éds.), *Innovation and technology Enhancing Mathematics Education* (Springer, p. 137-160).

Pluvinage, F. (en prensa). *Exploración libre, exploración guiada y resolución de problemas*. En Aportaciones en educación matemática, ciencia y tecnología.

Pluvinage, F. (2019). Importancia de procesos cognitivos instrumentados en la enseñanza de las matemáticas. En Hernández Rebollar, L. A., Borja Tecuatl, I., Slisko Ignjatov, J. y Juárez López, J. A. (eds.), Aportes a la educación matemática basados en la investigación (pp. 79-96). Puebla, México: Benemérita Universidad Autónoma de Puebla. Recuperado de: https://www.fcfm.buap.mx/assets/docs/publicaciones/APEMBI.pdf

ANALYSE D'UNE INGÉNIERIE DIDACTIQUE ARTICULANT ACTIVITÉS MATHÉMATIQUES ET ALGORITHMIQUES - ÉTUDE DES FORMES ET FONCTIONS DES RAISONNEMENTS DES ÉLÈVES

Maryna Rafalska[1], Patrick Gibel[2]

[1]LINE, Université Côte d'Azur, France, [2]LAB-E3D, Université de Bordeaux, France

Résumé. *Notre article vise à présenter une ingénierie didactique expérimentée en classe de Première, afin d'analyser le travail des élèves lors d'une séquence reposant sur l'articulation d'activités mathématiques et algorithmiques.*

Dans cet écrit, nous étudions précisément le raisonnement d'un élève confronté à la situation "Tri de cartes", où il est progressivement amené à élaborer, formuler et justifier la validité d'une méthode générale de rangement, connue en informatique comme l'algorithme de tri. Pour cela, nous utilisons le modèle de Bloch et Gibel (2011), (Gibel, 2018). Une attention particulière sera portée aux justifications et aux preuves de différentes natures produites par les élèves.

INTRODUCTION

L'apparition de l'algorithmique et de la programmation dans les programmes scolaires en France a soulevé des questions didactiques concernant leur enseignement et leur apprentissage, ainsi que le type et la nature des liens qu'ils peuvent entretenir avec l'enseignement des mathématiques. En même temps, à notre connaissance, il existe peu de travaux qui s'intéressent au travail des élèves de nature algorithmique en lien avec le travail de nature mathématique (Modeste, 2012a ; Laval, 2018) du point de vue des différents types de raisonnements mathématiques et algorithmiques produits par les élèves. Ce travail vise à apporter des éléments de réponse à cette problématique en étudiant les activités des élèves confrontés à une situation comportant une dimension recherche dont la résolution conduit les élèves à construire des connaissances et des savoirs liés à la notion d'algorithme. Pour conduire cette recherche, nous avons choisi d'étudier une ingénierie didactique de développement (IDD) dont la situation « Tri de cartes » est l'élément central. La potentialité adidactique de cette situation, au sens de la théorie des situations didactiques (TSD), favorise chez les élèves les activités mathématiques et algorithmiques, comme nous l'avons établi dans le cadre de nos travaux antérieurs (Rafalska & Gibel, 2024) menés au niveau du lycée. Notamment, nous avons pu constater l'apparition d'une grande diversité dans la formulation de méthodes élaborées ainsi que différentes formes de validation produites par les élèves. À partir de ces constats, nous souhaitons prolonger notre recherche en nous focalisant cette fois sur la pratique de la construction de preuve par les élèves lors de la mise en œuvre de cette IDD. Plus précisément, nous cherchons à répondre à la question suivante :

L'IDD mise en œuvre en classe de Première possède-elle suffisamment de potentialités pour engager l'ensemble des élèves dans des activités riches du point de vue de la pratique des raisonnements mathématiques et algorithmiques, notamment la production de justifications et de preuves de différentes natures ?

Nous commençons par la présentation et l'analyse didactique de la situation étudiée. Ensuite, nous présentons des aspects théoriques sur lesquels se base notre recherche et la méthodologie utilisée. Nous poursuivons par l'étude détaillée d'un cas dont les données ont été recueillies dans une classe de Première en France. Enfin, nous finissons par les conclusions et les perspectives de cette recherche.

PRESENTATION DE INGENIERIE DIDACTIQUE

Le problème « Tri de carte » et les jeux associés

Le problème général « Tri de cartes » est formulé de la façon suivante :

Étant donné m grilles contenant n cartes faces cachées choisies au hasard parmi N cartes (n<N), trouver une(des) méthode(s) qui permet(tent) de trier simultanément les cartes de chacune des grilles en utilisant (au plus) k coups. Un coup correspond à l'enchaînement des trois opérations de base (« retourner deux cartes », « les comparer et les mettre dans l'ordre », « reposer les cartes, face cachée, sur les cases vides »).

A partir du problème général et grâce au choix des valeurs des variables didactiques *n*, *N*, *m*, *k* (Tableau 1) nous proposons une suite de jeux successifs qui vise à amener les élèves à la construction d'algorithmes de tri et à leur analyse.

	Jeu 1	Jeu 2	Jeu 3	Jeu 4
n - nombre de cartes à trier	7 ; 10	7 ; 10	7 ; 10	7 ; 10
m - nombre de grilles	1	1	3	3
exécution par des opérateurs extérieurs	non	Oui	oui	oui
k - nombre de comparaisons autorisées	non défini	non défini	non défini	le plus petit possible

Tableau 1 : Les valeurs des variables didactiques.

Plus précisément, l'IDD s'attache à proposer aux élèves les quatre jeux suivants.

« Battre les 13 cartes de la même famille. Choisir au hasard 7 ou 10 cartes parmi ces 13 cartes et les placer face cachée sur une grille avec le nombre de cases correspondant (Fig.1). Dans chaque jeu ci-dessous trier les cartes en utilisant uniquement les trois opérations suivantes : 1) retourner deux cartes ; 2) comparer les deux cartes et les mettre dans l'ordre ; 3) reposer les cartes, face cachée, sur les cases vides.

Jeu 1 (individuel). Effectuer les actions que vous pensez nécessaires pour trier les cartes. Le nombre de coups n'est pas limité. La partie est gagnée si les cartes sont triées.

Jeu 2 (en binôme). Donner les instructions, correspondant aux trois opérations autorisées, à votre camarade qui ne peut que formellement exécuter les commandes sans vous montrer les cartes retournées. Quand vous pensez que les cartes sont triées, dites « stop ». Retournez les cartes pour vérifier. La partie est gagnée si les cartes sont triées.

Jeu 3 (en groupe). Donner les instructions, correspondant aux trois opérations autorisées, à trois (ou plus) camarades qui n'exécutent que formellement les commandes en même temps sans vous montrer les cartes retournées. Quand vous pensez que les cartes sont triées, dites « stop ». Retournez les cartes sur toutes les grilles pour vérifier. La partie est gagnée si les cartes de tous les camarades sont triées.

Jeu 4 (en groupe ou en classe entière). Donner les instructions pour trier les cartes de vos camarades du groupe (ou de la classe entière) en même temps selon des règles du jeu 3 avec le moins de comparaisons possibles. Quand vous pensez que les cartes sont triées, dites « stop ». La partie est gagnée si les cartes de tous sont triées en utilisant moins de coups que les autres joueurs. »

Fig. 1 : Support matériel.

Analyse didactique de la séquence

Pour l'analyse a priori détaillée du point de vue des stratégies susceptibles d'apparaître dans les jeux nous renvoyons le lecteur vers les papiers (Rafalska, 2022 ; Rafalska & Gibel, 2024). Dans la suite nous présentons l'analyse didactique de la séquence sur laquelle repose l'IDD.

L'objectif principal de la séquence est la construction d'une ou des méthodes générales qui permettent en un nombre fini d'étapes d'obtenir le rangement des cartes (selon une relation d'ordre définie sur l'ensemble de cartes) qui fonctionne de manière efficace et rapide quel que soit le nombre des cartes et leurs positions au départ selon des règles données ci-dessus. Pour que cela soit envisageable les élèves sont confrontés à des jeux successifs présentés ci-dessus qui ont été conçus comme des situations a didactiques d'action. Le choix des valeurs des variables didactiques (Tableau 1) dans la suite des jeux a été fait de telle manière que le milieu avec lequel interagissent les élèves évolue au cours des jeux. Ce changement concerne notamment les conditions dans lesquelles les élèves doivent effectuer les actions pour obtenir le rangement. En effet, avec chaque jeu, de moins en moins d'informations sont disponibles par rétroaction du milieu objectif concernant les instances données (les suites particulières de cartes), ce qui

influe sur les modes de contrôle possibles à mettre en place avant la validation finale (retournement de toutes les cartes). Plus précisément, dans le jeu 1, le milieu comporte les informations sur les valeurs des cartes et leurs placements. Cela permet à l'élève agissant d'utiliser la mémoire pour contrôler ses actions. L'élève valide la suite d'actions effectuée dans chaque partie du jeu 1 en retournant les cartes.

Dans le jeu 2, les valeurs des cartes ne sont plus connues mais pour chaque partie du jeu le placement des cartes les unes par rapport aux autres peut être identifié grâce aux informations sur le résultat de l'échange des cartes toujours visible pour l'élève agissant. Cela rend possible pour l'élève la mise en place d'une procédure avec un contrôle qui se base sur cette information (par exemple, effectuer les comparaisons jusqu'au il n'y a plus d'échanges des cartes dans la suite). La (in)validité des actions effectuées dans ce cas est constatée par le binôme.

Dans le jeu 3 où l'élève est dans les conditions qu'on peut définir comme « aveugle », car ni les informations sur les valeurs ni placements des cartes les unes par rapport aux autres ne sont disponibles. L'élève est amené à la recherche de méthodes avec un contrôle qui est indépendant des informations sur les instances (les valeurs et placements des cartes les unes par rapport aux autres), ce qui garantit ainsi le rangement pour le cas général si l'élève est gagnant. Dans ce jeu la validation finale se passe par les membres du groupe.

Le contrôle que les élèves peuvent mettre en place dépend en grande partie des conditions dans lesquelles agit l'élève dans chaque jeu, la disponibilité ou indisponibilité de informations dans le milieu évoquées ci-dessus, mais également sur le choix de l'élève de les utiliser ou non. Il est envisageable (même si c'est assez peu probable) que dès le premier jeu, l'élève se distancie des informations sur les valeurs et les positions des cartes en se mettant dans le cas général.

Ainsi, au fur et à mesure que les élèves avancent dans les jeux, ils peuvent d'abord construire des suites d'actions, puis des procédures (suite d'actions dont les élèves peuvent rendre compte) et éventuellement des méthodes générales (programmes d'actions finalisés indépendants des conditions).

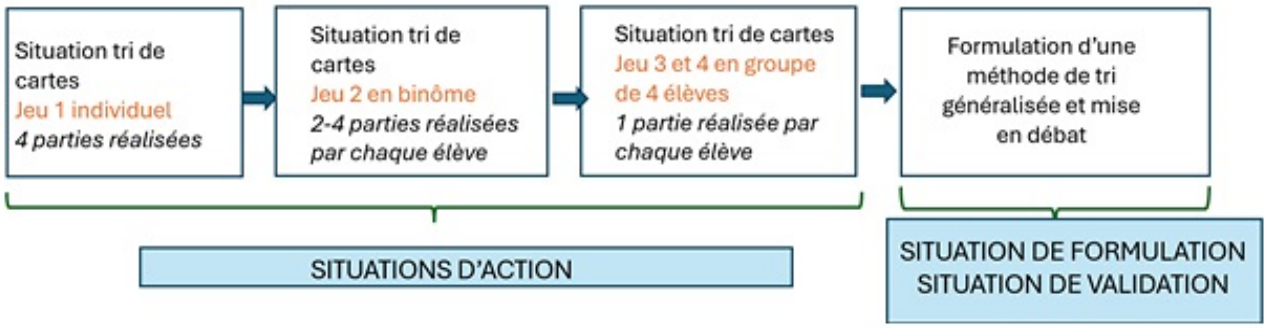


Fig. 2 : Principes de la construction de l'IDD.

La séquence vise également le travail sur la formulation, la validation et l'analyse des méthodes générales produites par les élèves (Fig. 2). La situation de formulation consiste en la description écrite des méthodes générales élaborées par les élèves. Cette situation est à dimension adidactique. En effet, les rétroactions du milieu sont insuffisantes et l'enseignant est contraint d'intervenir pour motiver des élèves à aller plus loin dans leurs réflexions, soit en posant des questions adéquates, soit en introduisant des connaissances et de savoirs afin d'amener les élèves à la formulation de méthodes générales, puis à la construction de preuves de la validité de ces méthodes. Le débat a pour objectif de discuter de l'efficacité et du coût (du point de vue du nombre de comparaisons minimal nécessaire pour avoir un rangement) des méthodes trouvées ainsi que la clarté, précision et consistance des formulations et les justifications de la validité des méthodes proposées par les élèves.

Le déroulement de la séquence dans une classe de Première et le corpus de l'étude

La séquence développée comportait cinq séances dont les deux dernières correspondaient à la programmation et au bilan final (que nous ne présentons pas dans ce papier).

La première séance a été consacrée aux quatre jeux évoqués. Dans chaque jeu les élèves ont eu la possibilité de jouer plusieurs parties (cf. Fig. 2). Après chaque jeu, les élèves se sont vu demander de remplir la fiche d'élèves en expliquant les stratégies utilisées. Pour le jeu 3, ils se sont aussi vu demander si et pourquoi la méthode trouvée fonctionne pour n'importe quelle position de départ des cartes.

La séance 2 proposait le travail sur le problème général : « Trouver une/des méthode/s pour trier n cartes ($n \in \mathbb{N}$) pour p élèves ($p \in \mathbb{N}$) en même temps dans le moins de coups possibles (un coup, c'est l'enchaînement des trois opérations de base) ». Dans un premier temps les élèves travaillaient sur la rédaction des formulations des méthodes générales. Par la suite, trois questions ont été proposées aux élèves. Les deux premières portaient sur la preuve des algorithmes trouvés (correction et terminaison) alors que la troisième concernait le nombre de coups minimal nécessaires pour garantir un rangement dans l'ordre croissant en fonction du nombre n de cartes qu'on possède au départ. À la fin de la séance les élèves devaient présenter devant la classe les méthodes trouvées ainsi que les résultats de leur analyse ce qui conduit au débat géré par le professeur. La séance s'est conclue par l'institutionnalisation ponctuelle des connaissances concernant les algorithmes de tri associés aux méthodes générales élaborées par les élèves.

Le corpus de ce travail est constitué par les données récoltées en spécialité NSI dans la classe de Première du lycée de Nay en 2023. Il comporte des données audiovisuelles des échanges collectifs (prises par la vue de la classe entière avec 12 élèves) et du travail des élèves au sein de trois groupes ainsi que par les productions des élèves (les fiches d'élèves que les élèves ont dû remplir après chaque jeu ainsi qu'à l'issue du travail sur le problème général et les trois questions évoquées ci-dessus).

CADRE THEORIQUE ET METHODOLOGIE

Une fréquente justification de la construction de situations d'enseignement issues de situations fondamentales d'un savoir dans la TSD (Brousseau, 1998) a été donnée par le bénéfice de ce type de situations sur les possibilités d'amener les élèves à entrer dans une démarche de preuve (Legrand, 1997).

L'élaboration et l'analyse *a priori* de ces situations est prolongée par l'étude des niveaux de milieux organisés ; l'analyse *a posteriori* permet au chercheur de déterminer s'il y a ou non une concordance du déroulement effectif avec la situation anticipée.

Le modèle de structuration du milieu utilisé est celui de Bloch (2006) (Tableau 2) ; il tient compte du rôle du professeur dans les niveaux adidactiques de milieux. Dans ce travail nous nous intéressons à l'analyse des fonctionnalités des différents niveaux de milieux et aux résultats de la mise en œuvre dans la contingence.

M0 : M-Apprentissage	*E0 : Elève*	*P0 : Professeur*	*S0 : Situation didactique*
M-1 : M-Référence	E-1 : E-Apprenant	P-1 : P-Observateur	S-1 : Situation d'apprentissage
M-2 : M- Objectif	E-2 : E-Agissant	P-2 : P-Dévolueur observateur	S-2 : Situation de référence
M-3 : M- Matériel	E-3 : E-Objectif		S-3 : Situation objective

Tableau 2 : Structuration du milieu.

Dans la structure précédente, nous savons que des étapes de la situation peuvent être à l'origine de raisonnements mathématiques (Bloch et Gibel, 2011) : la confrontation à un milieu heuristique (milieu objectif) pour leur élaboration ; le passage à un milieu de référence pour établir la généricité des méthodes. Les interventions de l'enseignant (P-régulateur), dans la situation d'apprentissage, sont destinées le plus souvent à maintenir le caractère adidactique de la situation en relançant l'activité par un éventuel retour à une situation de jeu (situation d'action) ou par la formulation d'une explication nécessaire à la compréhension d'une proposition formulée par un élève.

Pour l'IDD étudiée, les niveaux de milieu peuvent être décrits de la façon suivante.

•La situation objective : l'acteur objectif et le milieu matériel (M-2).

La situation objective est fondée sur le problème de « rangement » de cartes. C'est donc une situation de jeu pour un ensemble de *n* cartes. Le milieu matériel est constitué par les *n* cartes, *m* grilles à ordonner et le(les) exécutant(s) externes. Les connaissances du répertoire didactique, que les élèves vont utiliser, relèvent principalement de la connaissance des propriétés d'une relation d'ordre.

•La situation de référence : l'élève agissant et le milieu objectif (M-1).

Les élèves doivent décider de la suite de manipulation à effectuer afin de produire le rangement valide à partir des *n* cartes proposées. Ils doivent choisir la succession de transpositions à effectuer en respectant la règle liée à la manipulation des cartes. Les élèves doivent ensuite formuler la suite d'actions, autrement dit la procédure mise en œuvre. La validité de la procédure est déterminée en retournant les *n* cartes afin de déterminer si le rangement est valide (jeu 1 et jeu 2) ou si tous les rangements sont valides (jeu 3 et jeu 4).

•La situation d'apprentissage : l'élève apprenant et le milieu de référence (M0).

L'élève en situation d'apprentissage est amené à produire des formulations de méthodes générales et à s'interroger sur la validité de chacune d'elles. Les situations de formulation et de validation sont étroitement liées, en effet l'étude de la validité d'une méthode est étudiée du point de vue de sa consistance et de son coût.

Dans Bloch et Gibel (2011) et Gibel (2018), nous avons été amenés à retenir trois axes qui orientent et structurent notre analyse des raisonnements dans chacune des situations décrites précédemment. Ces axes réfèrent à des niveaux de modélisation différents des raisonnements en jeu dans le déroulement de la situation : modélisation globale relative aux niveaux de milieux, ou modélisation locale au niveau des arguments produits dans le travail et les échanges en classe, ainsi qu'au niveau des signes émergents de ce travail.

Dans une situation comportant une dimension adidactique (Bloch & Gibel, 2011), les élèves donnent à voir des raisonnements qui dépendent fortement du niveau de milieu où ils se situent, ce que nous illustrerons lors de l'analyse *a posteriori* de différents épisodes de la séquence. Le premier axe est l'analyse des fonctions du raisonnement, pointée ci-dessus comme nécessaire. Nous nous attacherons à montrer comment les fonctions du raisonnement sont liées à des niveaux de milieux et comment ces fonctions *manifestent* aussi ces niveaux de milieux, de sorte qu'ils peuvent servir au repérage de la position des élèves dans chacun de ces niveaux.

Le deuxième axe est celui des signes et des représentations observables. Ces observables se donnent à voir dans des formes différentes qui affectent le déroulement de la situation. La nature des signes et le statut logique du raisonnement sont à prendre en compte pour l'efficacité, l'idonéité aux attendus et le rôle dans la situation.

Le troisième axe est étroitement lié aux représentations observables, il s'agit d'une analyse de l'usage du répertoire didactique et de son niveau d'actualisation.

Dans le Tableau 3 nous explicitons pour chaque niveau de milieu (M-2), (M-1) et (M0) les fonctions du raisonnements la nature des signes et l'actualisation du répertoire susceptibles d'être produites par les élèves (par confrontation à chacun des milieux).

Pour notre étude, nous nous attacherons à utiliser le modèle pour analyser les formes et les fonctions des raisonnements mathématiques et algorithmiques lors du travail de la construction de méthodes générales ainsi que lors du travail de validation et d'analyse de ces méthodes. Nous nous concentrons principalement sur l'analyse des

différents types de justifications et les preuves (syntaxiques, sémantiques ou pragmatiques) produites lors du travail aux niveaux (M-2) et (M-1).

Concernant la justification syntaxique, l'argumentation prend appui sur des règles de la validité du discours, basée sur l'utilisation de règles formelles (logiques, mathématiques ou algorithmiques). La justification sémantique s'identifie à une argumentation prenant en compte la pertinence et de la validité des modèles en se référant aux objets mathématiques ou algorithmiques via leurs représentations. La justification pragmatique est une justification de la validité et de l'intérêt de la procédure en référence à son adéquation pour établir le résultat attendu (exemple ou contre-exemple).

	Milieu M-2	**Milieu M-1**	**Milieu M0**
Fonctions des raisonnements	- Raisonnement heuristique - Raisonnement d'organisation - Conjecture ponctuelle - Elaboration de M.I.A - Contrôle expérimental/ pragmatique de la validité des procédures	- Calculs génériques - Formulation de conjectures étayées - Décision sur un objet mathématique/algo. - Formulation de méthodes - Comparaison de méthodes - Justification pragmatiques ou sémantiques/syntaxiques de la validité des méthodes	- Formulation explicite des preuves - Étude de la consistance des méthodes - Comparaison de la validité et de la complexité des méthodes
Niveaux d'utilisation des symboles	Icônes ou indices dépendant du contexte (intuitions…) Argument locaux ou génériques	Argument locaux ou génériques : indices, propriétés et caractérisation de la relation d'ordre	Arguments formels Utilisation de symboles maths/algo pour valider et étudier la complexité des méthodes
Niveau d'actualisation du répertoire	- Utilisation ponctuelle de connaissances anciennes - Enrichissement au niveau heuristique - Conjectures ponctuelles	- Enrichissement au niveau argumentaire de la consistance des énoncés de méthodes	- Formalisation des preuves - Introduction d'ostensifs organisés

Tableau 3 : Modèle d'analyse des raisonnements.

PREMIERS RESULTATS EXPERIMENTAUX

En raison du manque de place nous nous limitons à la présentation de l'analyse d'un cas qu'on appelle « élève B ». Dans le jeu 1, élève B confronté au milieu matériel (M-2) a mis en place la stratégie basée sur la mémorisation des valeurs des cartes et leurs positions. Son raisonnement est de nature heuristique et se repose sur les nombreux contrôles expérimentaux ce qui contribue dans l'élaboration de modèle implicite d'action (M.I.A).

Le changement des valeurs des variables didactiques au jeu 2 amène l'élève vers une procédure assimilable à un tri par insertion qui utilise l'information sur les échanges des cartes par l'exécutant (Fig. 3). Selon cette stratégie, l'élève commence par comparer les cartes consécutives deux à deux en partant de la première position vers la dernière jusqu'au premier échange des cartes. Il poursuit par le changement de sens de comparaison en demandant à comparer les cartes consécutives deux par deux en suivant le sens inverse jusqu'à ce qu'il n'y ait plus d'échange de cartes. Puis, il reprend la comparaison à partir de la carte où le changement de sens avait été effectué.

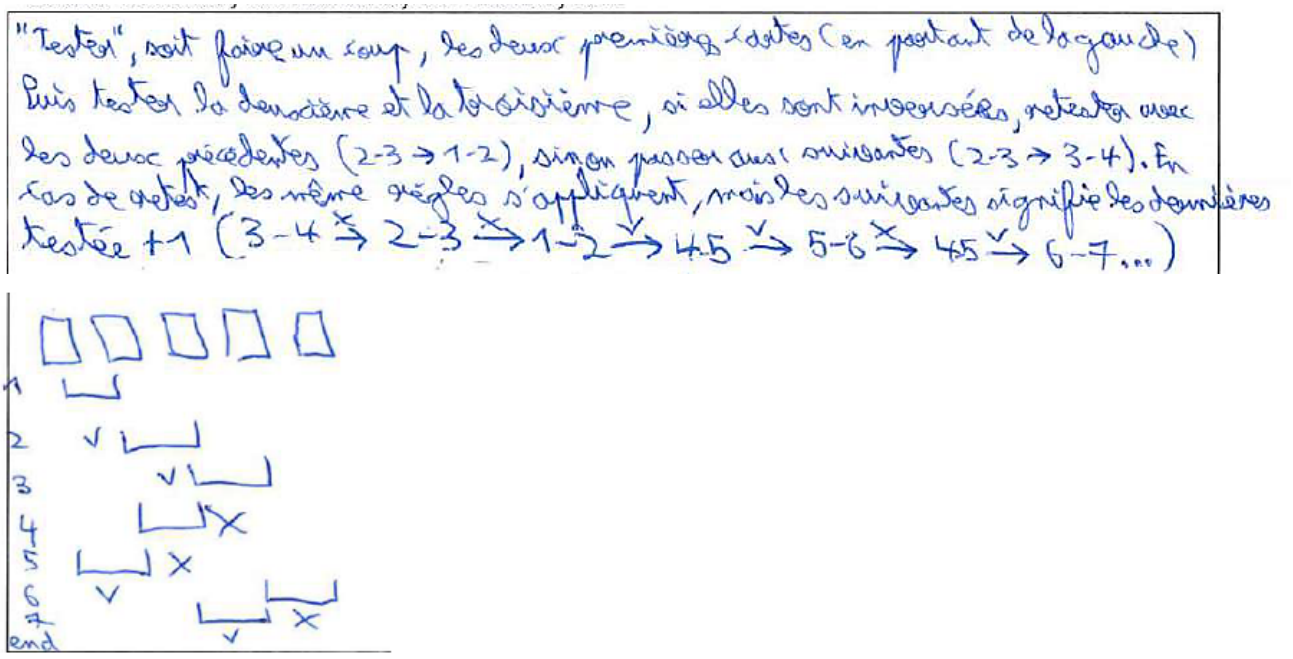


Fig. 3 : Production de l'élève à l'issue du jeu 2.

Le schéma sur la Fig. 3 illustre la procédure générale à suivre en rendant compte de différents cas envisagés (s'il y avait des échanges des cartes ou pas pour un exemple générique). Ceci est identifiable à un raisonnement par disjonction de cas et traduit une confrontation au milieu (M-1). Le contrôle s'effectue en fonction du résultat de comparaison des cartes toujours visible par l'élève. Du point de vue sémiotique, ceci est assimilable à un indice traduisant une proposition.

L'impossibilité d'avoir l'information sur les résultats d'échange des cartes dans le jeu 3 et ainsi de contrôler la validité de la procédure avant la validation finale amène l'élève a un changement de procédure pour celle proposée par les camarades du groupe (Fig.

4). Cette dernière correspond à l'algorithme de tri par sélection et consiste en une comparaison de chaque carte (en partant de la carte placée à la première position) avec les autres cartes (dont le numéro de place est supérieur à celle concernée). La méthode proposée par l'élève est de nature générale traduisant ainsi une confrontation au milieu M-1. On remarque qu'elle est formulée par l'élève à l'aide du langage algorithmique en utilisant deux boucles « for » imbriquées et le symbole argument, i.e. une proposition intégrant des justifications sémantiques. Au centre de cette dernière la réflexion sur la carte en *i*-ème position. L'élève déclare qu'à l'issue de la boucle interne qui correspond à la comparaison du *i*-ème carte de la suite avec toutes les cartes placées à sa droite amène la plus petite carte de ce sous-ensemble de cartes en *i*-ème position. Cette propriété de la *i*-ème carte non justifiée de façon théorique (mais résultant des interactions avec le milieu M-2) est par la suite élargie à toutes les cartes de la suite grâce à la répétition du procédé (à l'aide de la boucle externe) pour chaque carte de la suite. Bien que l'élève cherche à donner une preuve plus formelle, cette dernière est de nature sémantique et repose sur des justifications pragmatiques.

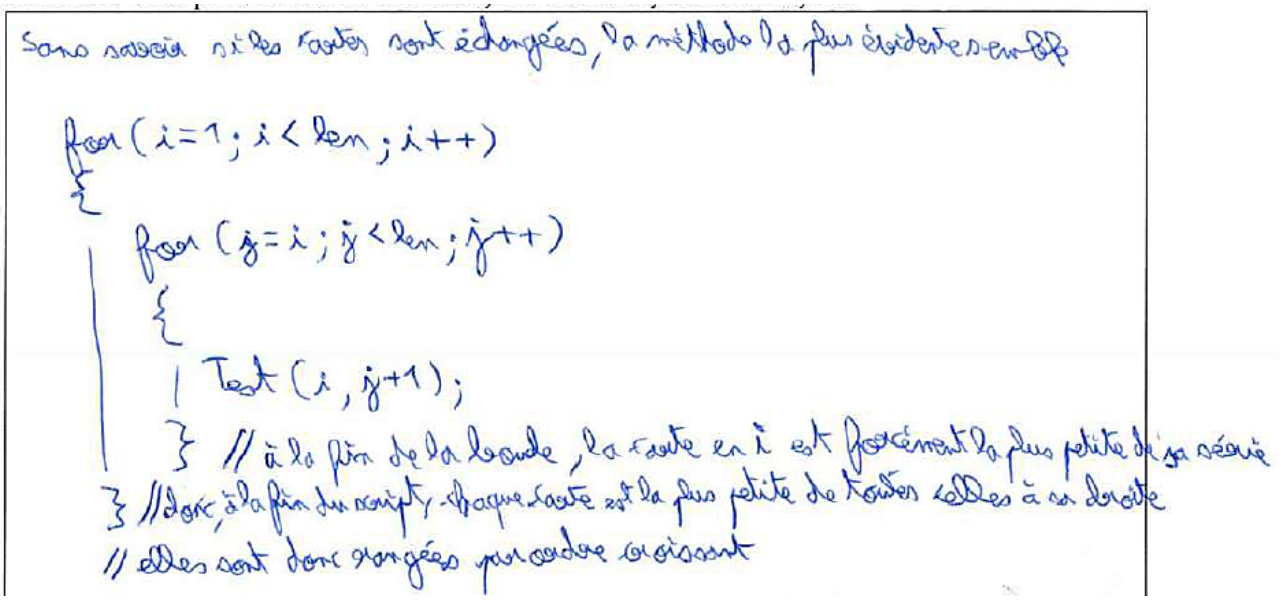


Fig. 4 : Production de l'élève à l'issue du jeu 3.

Lors du travail sur la preuve de la méthode dans le cas général (*n* cartes et *p* élèves où la validation empirique n'est plus possible), l'élève fait référence à la procédure des comparaisons des cartes utilisée précédemment (Fig. 5).

1. Est-ce que votre méthode fonctionne pour un nombre entier n de cartes et p élèves en simultané ? Si oui, expliquer pourquoi.

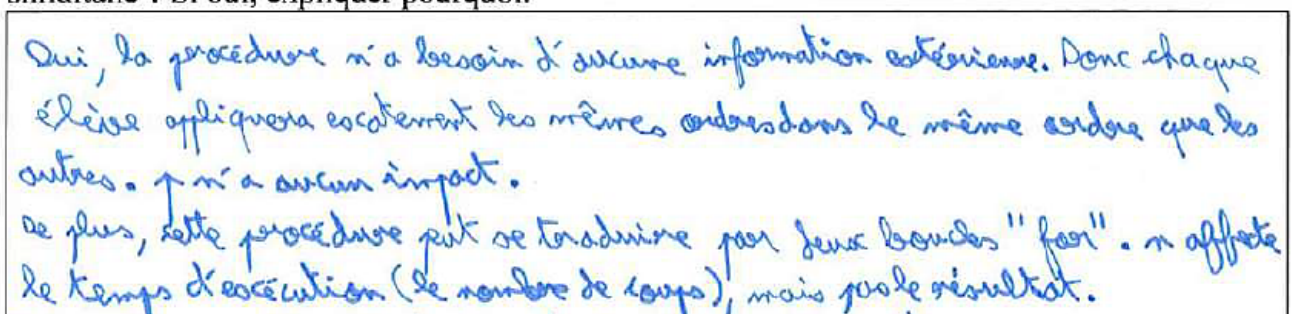


Fig. 5 : Production de l'élève à l'issue du travail sur la preuve de la méthode.

La validité de la méthode générale pour cet élève découle de la faisabilité d'exécuter la même procédure qu'auparavant pour un nombre plus important de cartes et le fait qu'elle se traduit par deux boucle « for ». Ainsi, pour lui l'extension de la procédure à un nombre n de cartes implique l'extension de la validité de la méthode pour un cas général. Cette preuve est de nature sémantique.

Dans la suite du travail au sein du groupe les élèves ont été chargés d'établir la preuve de la terminaison de l'algorithme associé à la méthode développée. Nous avons pu constater un échange des preuves produites par les élèves (l'élève B avec son camarade (élève C)) ainsi que sur ce qui peut être une justification et ce qui ne le peut pas être.

Elève C : [Lis la fiche d'élève] « Pourquoi la méthode s'arrête toujours ? ». J'ai écrit le nombre d'exécutions dépend du nombre de cartes et le nombre de cartes est fini.

Elève B : Ce n'est pas une justification ! Voici [montre les cases sur une grille vide] trois cartes : tu fais 1-2, 2-3, 1-3, 2-3, 1-2, … le nombre de cartes est fini mais tu t'arrêtes jamais. Ce n'est pas une justification ! La justification c'est qu'on utilise « for ». On exécute pour chaque carte. Et dans ce « for » chaque carte on exécute pour chaque carte, donc on a deux boucles « for ». Boucle for se termine toujours. C'est ça la justification ! On va toujours terminer. Ce n'est pas un while !

Dans cette situation l'élève B n'accepte pas l'assertion de son camarade comme une justification de la terminaison de la méthode et propose un contre-exemple pour montrer son caractère faux. En revanche, il propose la justification qui repose sur le fait que l'algorithme peut se traduire en deux boucles imbriquées « for » et que ce type de boucle selon lui se termine toujours (contrairement à la boucle « while »). La preuve produite par cet élève est de nature syntaxique et mobilise des connaissances en programmation et des arguments de nature sémantique. La situation fonctionne comme une situation de validation ayant pour objet la formulation de preuve formelle d'une méthode générale. Cependant le milieu n'est pas suffisamment prégnant pour fournir les rétroactions aux justifications données par les élèves ce qui montre la nécessité d'interventions de la part de l'enseignant.

CONCLUSIONS

Dans cet écrit, nous avons choisi d'analyser le travail d'un élève confronté à une situation qui vise la mise en scène à la fois des activités mathématiques et algorithmiques. Nous avons mis en exergue l'apparition des fonctions des raisonnements mathématiques et algorithmiques qui diffèrent selon le niveau du milieu où se trouve l'élève au cours de ce travail. C'est le cas notamment, lors du passage du singulier au générique, de la formulation à la validation de la méthode générale, et de l'analyse des méthodes du point de vue du nombre de coups et de leur comparaison. Pour cela l'élève mobilise les connaissances et les signes liées aux mathématiques ainsi qu'à l'algorithmique ce qui nous permet de considérer deux espaces de travail personnel (ETM et ETA) qui se construisent en même temps. La genèse sémiotique et discursive est caractérisée d'un côté par le passage du symbole indice au symbole argument et d'un autre côté par la transition de la justification pragmatique vers la justification articulant les dimensions sémantique et syntaxique. Les difficultés de formuler une preuve formelle constatées lors de l'analyse de cette IDD proviennent en partie des contraintes institutionnelles, notamment le fait que la preuve par récurrence apparaisse dans les programmes seulement en classe de Terminale.

L'étude effectuée confirme les potentialités didactiques de l'IDD pour engager des élèves dans des activités riches du point de vue de la pratique des raisonnements mathématiques et algorithmiques. Comme perspective nous envisageons mettre en perspective l'articulation entre les preuves mathématiques et algorithmiques (ces dernières font appel à la notion d'invariant), produites par les élèves.

REFERENCES

Bloch, I. (2006). *Quelques apports de la théorie des situations à la didactique des mathématiques dans l'enseignement secondaire et supérieur.* Note de synthèse HDR de l'Université Paris 7.

Bloch, I., Gibel, P. (2011). Un modèle d'analyse des raisonnements dans les situations didactiques : étude des niveaux de preuves dans une situation d'enseignement de la notion de limite, Recherche en Didactique des Mathématiques, 31-2, 191-228, La Pensée Sauvage, Grenoble.

Brousseau, G. (1998). *Théorie des Situations Didactiques*. La pensée sauvage. Grenoble.

Gibel, P. (2018). *Élaboration et usages d'un modèle multidimensionnel d'analyse des raisonnements*. Note de synthèse de l'Habilitation à diriger les recherches soutenue à l'Université de Pau et des Pays de l'Adour.

Laval, D. (2018). *L'algorithmique au lycée entre développement de savoirs spécifiques et usage dans différents domaines mathématiques*. Thèse de Doctorat. Université Sorbonne Paris Cité.

Legrand, M. (1997). La problématique des situations fondamentales. Recherches en Didactique des Mathématiques, 16(2), 221-279.

Modeste, S. (2012) *Enseigner l'algorithme pour quoi ? Quelles nouvelles questions pour les mathématiques ? Quels apports pour l'apprentissage de la prevue ?* Thèse de doctorat, Université de Grenoble. ⟨tel-00783294⟩.

Rafalska, M. (2022) Task design for promoting pupils' algorithmic thinking in problem-solving context without using computers. In : J. Hodgen, E. Geraniou, G. Bolondi, & F. Ferretti (Eds.), Proceedings of the Twelfth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME12). (pp. 1981-1989). Free University of Bozen-Bolzano, Italy and ERME. ⟨hal-03748490⟩.

Rafalska, M., Gibel, P. (2024). Une séquence d'informatique débranché comportant une dimension recherche pour l'apprentissage des algorithmes de tri. Colloque Didapro 10 sur la Didactique de l'informatique et des STIC, 2024, Louvain-La-Neuve, Belgique. pp. 76-86. ffhal-04482120v2f.

TEMA 3: GÉNESIS Y DESARROLLO DEL TRABAJO MATEMÁTICO: PAPEL DEL PROFESOR, DEL FORMADOR, DEL GRUPO Y DE LAS INTERACCIONES

Inés M. Gómez-Chacón[*], Fabienne Venant[**], Laurent Vivier[***]

[*]Universidad Complutense de Madrid, España ; [**]Université du Québec à Montréal, Canadá; [***]Université Paris Cité, LDAR, Francia

El Tema 3 se centra en la investigación sobre el rol de profesores y formadores en la construcción de trabajos matemáticos idóneos y efectivos, ya sea en el diseño de tareas y situaciones (en relación con el Tema 4) o en la implementación efectiva en el aula, en particular en el papel de las interacciones y las tecnologías digitales (en relación con el Tema 2). El estudio de estas cuestiones plantea cuestiones teóricas y metodológicas que también eran de interés para el Tema 1.

CONTRIBUCIONES

Durante el ÉTM8, se presentaron 10 ponencias y 4 pósteres, con contribuciones de autores de Chile (5), España (2), Francia (6), Grecia (1), Italia (1), Quebec (1) y Turquía (1). A continuación, en la tabla resumen se indican los nombres de los autores en negrita que participaron en el trabajo del grupo durante el simposio.

También se especifica si las presentaciones han sido objeto de un texto en las actas tras una revisión científica por parte de los miembros del Tema 3, así como las posibles interacciones con los otros temas del simposio.

Fecha	Autores	Título	Otros temas
Sesión 1 21/10/2024	**Fabienne Venant** **Michèle Couderette**	C1 (en Actas) ETM et action didactique conjointe : regards croisés sur l'enseignant intégrant une tâche de programmation informatique en classe de mathématiques	1, 2, 4
	Mónica Arnal-Palacián N. Begué M. Marbán	P1 (En Actas) Designing situations to develop mathematical flexibility and identify students' emotions	4

Sesión 2 22/10/2024	**Paula Verdugo-Hernández** Carolina Henríquez-Rivas **Gonzalo Espinoza-Vásquez** Nuria Climent	C2 (En Actas) ETM idóneo potencial y conocimiento especializado en el diseño de propuestas de enseñanza en la formación inicial	1
	Romina Menares **Laurent Vivier**	C3 (En Actas) Conocimientos teóricos y prácticos en el espacio de trabajo matemático idóneo bajo instancias colaborativas de la tríada formativa con uso de la calculadora	2, 4
	Blandine Masselin Nicolas Grenier-Boley Jordan Martin Caroline Beaudet **Laurent Vivier**	P2 (En Actas) Enrichir collectivement les ETM idoines, une expérimentation de type *lesson study* sur 3 ans	4
Sesión 3 22/10/2024	**Christine Choquet**	C4 (En Actas) Travail mathématique des élèves et développement de connaissances didactiques de professeurs de mathématiques débutants	1
	Ozan Deniz Kıyıcı Filiz Tuba Dikkartın Övez	C5 (En Actas) Examination of mathematical work performed in mathematical modelling task in the light of MWS: the case of pre-service elementary mathematics teachers	4
	Darlis Panqueban Carolina Henríquez-Rivas	P3 Revisión de tesis doctorales basadas en los ETM: una revisión en Chile y Francia	

Sesión 4 23/10/2024	**Sylvie Grau**	C6 (En Actas) Amener les élèves à problématiser en mathématiques : enjeux et limites	1
	Katherine Machuca Elizabeth Montoya Delgadillo	C7 (En Actas) ETM idóneo de un grupo de profesores en formación inicial en el dominio de la probabilidad	4
	Kostas Nikolantonakis Florence Peteers **Laurent Vivier**	P4 (En Actas) Genèse d'un ETM idoine de formation original sur le nombre pour de futurs professeurs d'écoles	2, 4
Sesión 5 23/10/2024	**Aránzazu Dolz** **Inés M. Gómez-Chacón**	C8 (En Actas) Interpretación del condicional por futuros profesores de educación primaria	1, 2, 4
	Paula Verdugo-Hernández Carolina Henríquez-Rivas **Gonzalo Espinoza-Vásquez**	C9 (En Actas) Selección de tareas que fomentan diferentes tipos de significados y trabajo matemático para la función	4
	Annamaria Miranda	C10 (En Actas) Investigating GAI's role in shaping mathematics work and identity within a university didactic system	2

DISCUSSIONS

En primer lugar, las diversas contribuciones pusieron de manifiesto el lugar central dentro del tema 3 de la reflexión sobre la formación docente. La complejidad de esta cuestión requirió ampliar la perspectiva del trabajo matemático considerando la naturaleza de los objetos matemáticos, los conocimientos, la modelización, la problematización y tipologías de pensamiento como el pensamiento crítico y el pensamiento formal y algorítmico.

La discusión subrayó la importancia de adoptar una postura reflexiva para comprender y tener en cuenta mejor los vínculos entre los ETMs personales y de referencia y el

ETM idóneo[1], es decir, el lugar del trabajo real realizado en el aula. El análisis del trabajo idóneo dentro del ETM correspondiente es un tema central para el Tema 3. También es un tema de formación que a menudo permanece implícito, ya que la idoneidad es un concepto difícil de definir y comprender.

También discutimos sobre el contexto, que incluye, pero no se reduce, al medio. Tener en cuenta el contexto nos lleva a considerar conceptos que a menudo se estudian menos en la didáctica matemática, pero que son importantes a tener en cuenta en cualquier reflexión sobre lo que ocurre en el aula. Así, pudimos debatir el papel de las emociones, la identidad, los aspectos socioeducativos, el conocimiento interpretativo y la necesidad.

A nivel teórico, varias contribuciones han propuesto articular la ThETM con otros marcos teóricos, provengan o no de la didáctica de las matemáticas. Estas colaboraciones teóricas nos parecieron fructíferas. Permiten, por ejemplo, describir primero conceptos y conocimientos para caracterizar mejor las génesis. Sin embargo, pedimos estar atentos a la forma en que se llevan a cabo estas articulaciones. Las transposiciones directas de una teoría a otra son arriesgadas, tanto desde un punto de vista epistemológico como metodológico. Pueden perjudicar el rigor de los análisis. Recomendamos que se realicen análisis paralelos o complementarios, tanto en el desarrollo de los ETMs adecuados como en las reflexiones sobre el lugar de los elementos teóricos en la formación docente.

HACIA EL ÉTM9

La mayoría de las comunicaciones se han centrado en el desarrollo de situaciones que son objeto de experimentación tanto en situaciones de enseñanza o de formación. Algunos están más específicamente interesados en las interacciones producidas, a veces en un colectivo específico. Estos estudios destacan el trabajo matemático real en el aula, cruzándolo con los objetivos iniciales.

¿Se ha logrado un desarrollo de un trabajo matemático idóneo y eficaz? Esta pregunta pone de relieve uno de los temas transversales del ÉTM9 sobre la calidad del trabajo matemático. Sin presuponer trabajos futuros, es seguro que el Tema 3, que sigue centrado en el profesor y el formador, tendrá un papel central el tema de la calidad en su desarrollo.

---

[1] Ver por ejemplo: Kuzniak, A., Montoya Delgadillo, E. & Vivier, L. (2024). La dualité savoir-connaissance dans la théorie des Espaces de Travail Mathématiques, *Caminhos da Educação Matemática em Revista*, 159-175, v. 13 n. 4 (2023)

El otro tema transversal del ÉTM9 se refiere a la Inteligencia Artificial, que se abordó de forma marginal (solo una contribución) en Castro Urdiales. Esperamos que nuevas contribuciones aborden este tema en la próxima edición. Es realmente crucial comprender los cambios que esta tecnología genera en el trabajo matemático, en particular la IA generativa, tanto en la enseñanza como en la formación del profesorado.

Sesión de trabajo del Tema 3

THÈME 3 : GENÈSE ET DÉVELOPPEMENT DU TRAVAIL MATHÉMATIQUE : RÔLE DE L'ENSEIGNANT, DU FORMATEUR, DU COLLECTIF ET DES INTERACTIONS

Inés M. Gómez-Chacón[*], Fabienne Venant[**], Laurent Vivier[***]

[*]Universidad Complutense de Madrid, Espagne ; [**]Université du Québec à Montréal, Québec ; [***]Université Paris Cité, LDAR, France

Le thème 3 s'intéresse aux recherches sur le rôle des enseignants et formateurs dans la construction d'un travail mathématique adapté et efficace que ce soit dans la conception des tâches et des situations (en lien avec le thème 4) ou dans la réalisation effective en classe avec notamment le rôle des interactions et des technologies digitales (en lien avec le thème 2). L'étude de ces questions soulève des enjeux théoriques et méthodologiques qui peuvent également intéresser le thème 1.

LES CONTRIBUTIONS

Lors de l'ÉTM8, 10 communications et 4 posters ont été présentées, avec des contributions d'auteurs du Chili (5), d'Espagne (2), de France (6), de Grèce (1), d'Italie (1), du Québec (1) et de Turquie (1). Dans le tableau synthétique des présentations ci-dessous, les noms des auteurs qui ont participé activement aux travaux du groupe pendant le symposium sont en gras.

On précise également si les présentations ont fait l'objet d'un texte dans les actes après une révision scientifique par les membres du thème 3 ainsi que les possibles interactions avec les autres thèmes du symposium.

Date	Auteurs	Titre	Autres thèmes
Session 1 21/10/2024	**Fabienne Venant** **Michèle Couderette**	C1 (actes) ETM et action didactique conjointe : regards croisés sur l'enseignant intégrant une tâche de programmation informatique en classe de mathématiques	1, 2, 4
	Mónica Arnal-Palacián N. Begué M. Marbán	P1 (actes) Designing situations to develop mathematical flexibility and identify students' emotions	4

Session 2 22/10/2024	**Paula Verdugo-Hernández** Carolina Henríquez-Rivas **Gonzalo Espinoza-Vásquez** Nuria Climent	C2 (actes) ETM idóneo potencial y conocimiento especializado en el diseño de propuestas de enseñanza en la formación inicial	1
	Romina Menares **Laurent Vivier**	C3 (actes) Conocimientos teóricos y prácticos en el espacio de trabajo matemático idóneo bajo instancias colaborativas de la tríada formativa con uso de la calculadora	2, 4
	Blandine Masselin Nicolas Grenier-Boley Jordan Martin Caroline Beaudet **Laurent Vivier**	P2 (actes) Enrichir collectivement les ETM idoines, une expérimentation de type *lesson study* sur 3 ans	4
Session 3 22/10/2024	**Christine Choquet**	C4 (actes) Travail mathématique des élèves et développement de connaissances didactiques de professeurs de mathématiques débutants	1
	Ozan Deniz Kıyıcı Filiz Tuba Dikkartın Övez	C5 (actes) Examination of mathematical work performed in mathematical modelling task in the light of MWS: the case of pre-service elementary mathematics teachers	4
	Darlis Panqueban Carolina Henríquez-Rivas	P3 Revisión de tesis doctorales basadas en los ETM: una revisión en Chile y Francia	

Session 4 23/10/2024	**Sylvie Grau**	C6 (actes) Amener les élèves à problématiser en mathématiques : enjeux et limites	1
	Katherine Machuca Elizabeth Montoya Delgadillo	C7 (actes) ETM idóneo de un grupo de profesores en formación inicial en el dominio de la probabilidad	4
	Kostas Nikolantonakis Florence Peteers **Laurent Vivier**	P4 (actes) Genèse d'un ETM idoine de formation original sur le nombre pour de futurs professeurs d'écoles	2, 4
Session 5 23/10/2024	**Aránzazu Dolz** **Inés Mª Gómez-Chacón**	C8 (actes) Interpretación del condicional por futuros profesores de educación primaria	1, 2, 4
	Paula Verdugo-Hernández Carolina Henríquez-Rivas **Gonzalo Espinoza-Vásquez**	C9 (actes) Selección de tareas que fomentan diferentes tipos de significados y trabajo matemático para la función	4
	Annamaria Miranda	C10 (actes) Investigating GAI's role in shaping mathematics work and identity within a university didactic system	2

DISCUSSIONS

Les différentes contributions ont tout d'abord mis en évidence la place centrale des réflexions sur la formation des enseignants au sein du thème 3. La complexité de cette question nécessite d'élargir la perspective du travail mathématique pour prendre en considération la nature des objets mathématiques et des connaissances, la modélisation, la problématisation, la pensée critique ou la pensée algorithmique.

Nos discussions ont souligné l'importance d'adopter une posture réflexive pour mieux comprendre et prendre en compte les liens entre les ETM personnels et de références

et l'ETM idoine[1], lieu du travail effectif mené en classe. L'analyse du travail mené au sein de l'ETM idoine constitue un enjeu central pour le thème 3. C'est aussi un enjeu de formation qui reste souvent implicite tant l'idonéité est un concept difficile à définir et à appréhender.

Nous avons aussi discuté la question du contexte, qui inclut mais ne se réduit pas au milieu. Prendre en compte le contexte amène à considérer des concepts souvent moins étudiés en didactique des mathématiques mais qui sont importants à prendre en compte dans toute réflexion sur ce qui se passe en classe. Ainsi, nous avons pu discuter le rôle des émotions, de l'identité, des questions socio-éducatives, des connaissances interprétatives et de la nécessité.

Sur le plan théorique, plusieurs contributions ont proposé d'articuler la ThETM avec d'autres cadres théoriques, issus ou pas de la didactique des mathématiques. Ces collaborations théoriques nous ont semblé fructueuses. Elles permettent, par exemple, de d'abord décrire les objets et les connaissances pour ensuite mieux caractériser les genèses. Nous lançons toutefois un appel à vigilance sur la façon dont sont menées ces articulations. Les transpositions directes d'une théorie à l'autre sont dangereuses, aussi bien d'un point de vue épistémologique que méthodologique. Elles peuvent porter préjudice à la rigueur des analyses. Nous recommandons de procéder à des analyses parallèles ou complémentaires, aussi bien dans l'élaboration des ETM idoines que dans les réflexions menées sur la place des éléments théoriques dans la formation des enseignants.

VERS L'ÉTM9

La plupart des communications s'intéressent à l'élaboration de situations qui font l'objet d'une expérimentation, pour l'enseignement ou la formation. Certaines s'intéressent plus spécifiquement aux interactions produites, parfois par un collectif. Ces études mettent en avant le travail mathématique effectif dans la classe, en le croisant avec les objectifs initiaux.

Mais atteint-on un travail mathématique adapté et efficace ? Cette question met en avant un des thèmes transversaux de l'ÉTM9 sur la qualité du travail mathématique. Sans présumer des travaux à venir, il est certain que le thème 3, toujours focalisé sur l'enseignant et le formateur, aura un rôle central dans le développement de ce thème.

---

[1] Voir par exemple : Kuzniak, A., Montoya Delgadillo, E. & Vivier, L. (2024). La dualité savoir-connaissance dans la théorie des Espaces de Travail Mathématiques, *Caminhos da Educação Matemática em Revista*, 159-175, v. 13 n. 4 (2023)

L’autre thème transversal de l’ÉTM9 concerne l’intelligence artificielle qui a été abordé de manière marginale (une contribution) à Castro Urdiales. Nous espérons que de nombreuses contributions aborderont cette thématique à la prochaine édition. Il est en effet crucial de comprendre les changements induits sur le travail mathématique par cette technologie, notamment par l’IA générative, dans l’enseignement et en formation.

Session de travail du Thème 3

ETM ET ACTION DIDACTIQUE CONJOINTE : REGARDS CROISÉS SUR L'ENSEIGNANT INTÉGRANT UNE TÂCHE DE PROGRAMMATION INFORMATIQUE EN CLASSE DE MATHÉMATIQUES

Fabienne Venant, Michèle Couderette

Université du Québec à Montréal et CNRS-Université de Montréal CRM-CNRS, Université Paris-Est Créteil, LDAR

Nous nous intéressons à la façon dont un enseignant non expert conçoit et met en œuvre une tâche de programmation informatique dans le cadre de son enseignement des mathématiques. Nous analysons un épisode dans une séquence d'enseignement intégrant la programmation informatique dans une classe de mathématiques secondaire au Québec. Nous convoquons à la fois la théorie des ETM et le modèle de l'action didactique conjointe (ADC). Nous discuterons des contributions mutuelles de ces cadres théoriques, ainsi que des enjeux didactiques de l'intégration de la programmation informatique à l'école.

CONTEXTE

Le Québec, dans la lignée d'autres pays à l'échelle mondiale, discute depuis quelques années de la pertinence de réintroduire la programmation informatique dans les curricula scolaires. Le rapport Barma (2018) recommande que la programmation informatique soit ajoutée au curriculum québécois comme une nouvelle compétence transversale en lien avec la pensée informatique. Il convient donc de s'interroger sur la nature de l'articulation entre travail mathématique, travail algorithmique et travail informatique (Venant *et al.*, 2023, 2024). Des recherches ont montré la nécessité d'une formation des enseignants visant à la fois des savoirs savants et des savoirs pour enseigner (Briant, 2013; Couderette, 2016, 2023). Des questions se posent également sur l'accompagnement des enseignants dans la conception d'activités intégrant la programmation informatique (Venant, 2022). C'est dans ce contexte que nous avons mené un projet de recherche[31] impliquant des enseignants cherchant à intégrer la programmation informatique en classe de mathématique. Nous proposons ici l'analyse de la mise en œuvre, par l'une des participantes au projet, d'une tâche intégrant la programmation informatique. Cette tâche a été conçue de façon collaborative dans le cadre du projet, avec l'intention didactique d'articuler travail algorithmique et travail mathématique.

CADRES THÉORIQUES

Notre analyse s'appuie sur une articulation du modèle de l'action didactique conjointe (Schubauer-Leoni *et al.*, 2007; Sensevy, 2007) et de la théorie des Espaces de Travail Mathématiques (Kuzniak et Richard, 2014).

[31] Projet « Intégration de la programmation en mathématiques et en sciences au secondaire: quels enjeux pour la formation des enseignants » financé par le ministère de l'Éducation du Québec (MEQ) et le Fonds de recherche Québec (FRQ).

Le modèle de l'action didactique conjointe

Le modèle de l'action didactique conjointe (Schubauer-Leoni *et al.*, 2007; Sensevy, 2007) permet de rendre compte de la co-construction du savoir au sein d'un système didactique : les apprentissages en classe sont le produit de l'action didactique conjointe professeur élèves (*Ibid*.) et émergent lors des interactions en classe. Aussi, nous utilisons le triplet des genèses {meso/topo/chronogenèse} pour rendre compte de la dynamique évolutive du système didactique. Dans le cadre de cette communication nous ne pointerons principalement que les positions relatives de l'enseignante et des élèves (tonogenèse[32]) et de leur incidence sur l'avancée du savoir (chronogenèse) tout au long de l'action didactique. L'agir professoral est, quant à lui, analysé au travers des descripteurs « définir », « dévoluer », « réguler » et « institutionnaliser ». *In fine*, il s'agit de déterminer le savoir réellement construit par les élèves.

Ces analyses sont articulées avec celles du travail mathématiques et algorithmique, au sein de la théorie des ETM.

La théorie des Espaces de Travail Mathématiques

Dans la lignée de Lagrange et Laval (2023), nous considérons un ETA (espace de travail algorithmique). Nous incluons dans le référentiel théorique les instructions, les structures de contrôles et les processus algorithmiques comme l'affectation ou l'itération. Les *representanem* réfèrent à des instructions et des opérateurs algorithmiques pouvant également être manipulés à travers des artefacts logiciels (plateforme informatique) ou tangibles (papier-crayon, jeu de LEGO…). La genèse discursive de l'ETA préside la construction d'un algorithme à partir des éléments du référentiel théorique et met en jeu des raisonnements itératifs ou récursifs. L'ETA permet d'appréhender l'articulation entre travail mathématique et travail algorithmique (Venant *et al.*, 2022). Nous intéressons ici aux Espaces de Travail Idoines effectifs, qui permettent de repérer ce qu'un enseignant décide de privilégier ou d'exclure autour d'un problème relativement à la perspective de mener un travail en classe (Masselin, 2019). Le concept d'idonéité est tiré et adapté de l'idonéisme de Ferdinand Gonseth (1939). Dans la théorie des ETM, L'idonéité cherche à rendre compte du processus d'adaptation et de raffinement, donc de l'intelligence, en classe. Elle s'inscrit aussi bien dans l'interaction sujet-milieu que dans l'interaction entre l'enseignent et le système sujet-milieu de Brousseau (Bruillard et Richard, 2024)

[32] La topogenèse éclaire l'action des transactants (élèves et enseignant) engagés dans l'action didactique. Elle décrit les positions relatives des élèves et du professeur dans la gestion de l'activité. Élèves et enseignant interagissent sur les objets de savoir, les faisant évoluer tout au long du temps didactique. La tonogenèse rend ainsi compte de la manière dont les acteurs partagent les responsabilités dans la manipulation des objets de savoirs, l'un dans son rôle d'enseignant, l'autre dans son rôle d'élève.

PRESENTATION DE LA TÂCHE

Labyrinthe algébrique.

L'enseignante, Noémie, présente aux élèves un « labyrinthe algébrique » (Fig.1) sur la plateforme en ligne Scratch[33]. Un lutin *chat* doit se déplacer vers la sortie de ce labyrinthe en ramassant les objets disséminés. Pour acquérir chaque objet, il est nécessaire de résoudre une équation générée aléatoirement et rendue visible au contact du lutin avec l'objet.

Tant que l'équation n'est pas résolue, une autre équation est générée. La sortie du labyrinthe est validée par un bouton compteur qui vérifie que l'ensemble des objets a bien été ramassé.

Le labyrinthe présenté aux élèves ne contient que deux lutins objets (*cloche* et *cadeau*). Après analyse des programmes existants (Fig.2), l'élève doit compléter le jeu en insérant trois autres lutins (*clé*, *trompette* et *bonnet*) générant de nouvelles équations.

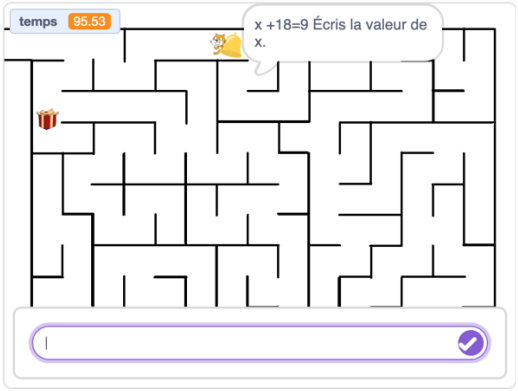


Figure 1: labyrinthe algébrique.

A chaque objet est associé un niveau de résolution d'équation. Ainsi, le sous-programme « cadeau » génère[34] une équation de niveau 1, de type $a + x = b$. L'équation de la forme $ax = b$ (niveau 2) est générée par le lutin *cloche*. Les équations de la forme $ax + b = c$ ou $x/a + b = c$ (niveau 3) sont générées par les lutins *trompette* et *bonnet*. Enfin, les équations de la forme $ax + b = cx + d$ (niveaux 4) sont générées par le lutin *clé*. Anticipant des difficultés, l'enseignante a découpé la séance en étapes qu'elle considère progressives et porteuses d'autonomie : « *Je vais vraiment par étapes. Au début, c'est analyser le programme [...] On a vraiment planifié pour y aller* [en programmation]. *Pour quelqu'un qui n'y connaît rien, il y a un programme, il faut juste qu'il change quelques blocs. Après ça, oups, c'est un petit peu plus d'autonomie, et puis c'est ça, on continue.* » La tâche est ainsi découpée en sept parties. Les trois premières étapes consistent à analyser le programme du lutin *chat* (ses déplacements), écrire le programme du lutin *bouton-compteur* (valider la sortie), écrire le programme du lutin *cadeau* (générer aléatoirement une équation de niveau 1). Les quatre suivantes demandent l'écriture des programmes des *lutins* supplémentaires (*bonnet*, *clé*, *trompette*).

[33] Les enseignants peuvent déposer leurs projets Scratch sur une plateforme accessible à tous : https://scratch.mit.edu/

[34] Par commodité de langage, nous écrirons que les différents lutins (cadeau, cloche, etc.) génèrent une équation.

Travail potentiel

La tâche est très complexe. On peut la décomposer en trois sous tâches :

1. Génération d'équation : chacun des lutins *objet* doit générer une équation du premier degré répondant à certaines contraintes sur le coefficient, s'assurer que cette équation possède bien une solution entière, afficher cette équation et en demander la solution au joueur.
2. Résolution d'équation : chacun des lutins *objet* doit calculer la solution de l'équation précédemment générée, et comparer la valeur calculée et la valeur entrée par le joueur.
3. Gestion du labyrinthe : cette tâche est répartie entre les lutins *chats* et *bouton-compteur*. Elle inclut les déplacements du lutin *chat* grâce aux commandes *flèche*, la gestion de la taille des lutins, des sons qu'ils émettent et des temps d'attente, la prise en compte de la topologie du labyrinthe (ne pas traverser les murs...), la comptabilisation du nombre de trésors gagnés et la gestion du chronomètre.

Nous distinguons dans ces tâches trois types de travail. Le travail **informatique** concerne les aspects techniques du design informatique du jeu. Ce travail concerne, par exemple, la gestion des événements (du type *quand une flèche/une couleur est touchée)*, des instructions conditionnelles et des tests d'égalité (Si *Trésor n'est pas égal 5*). Le travail **algorithmique** supporte la mise en place des structures itératives plus complexes. Il inclut le choix et l'affectation des variables, la définition des relations entre les variables, la détermination des opérateurs pertinents pour le respect des contraintes mathématiques, l'élaboration des tests d'entrée et de sortie des itérations. Le travail **mathématique** permet de déterminer de façon générique les solutions des équations générées Il permet également de traduire sous forme algébrique les contraintes numériques sur le coefficient et la solution de l'équation qui président à la génération des équations. Ce travail mathématique repose sur une capacité à généraliser la résolution d'équations du premier degré. Il met en jeu un raisonnement analytique (Radford, 2014) permettant de traiter les quantités indéterminées que sont les coefficients et l'inconnue de l'équation comme si elles étaient connues, et à parvenir à réaliser des opérations sur ces nombres inconnus. Cette articulation passe notamment par une phase de dénotation (Radford, 2014) permettant d'associer variables informatiques et symbolisation des nombres inconnus.

ANALYSES

La séance est rythmée selon une même modalité pour chacune des étapes : une phase de dévolution en binôme puis une phase de régulation. D'un point de vue transpositif et au regard des enjeux épistémiques de la séance, nous observons ici une élémentarisation des savoirs attendus permettant par le franchissement d'étapes, de maintenir le sens global de l'activité. Dans cette communication, nous nous centrons sur la troisième étape consistant à analyser le programme du cadeau : générer

aléatoirement une équation de forme $x + a = b$, demander sa solution puis mettre à jour le compteur.

Le milieu didactique comprend les éléments constitutifs des milieux précédents (programmation des déplacements des lutins *chat* et *bouton-compteur*) augmenté du programme (Fig. 2) du lutin cadeau générant aléatoirement des équations de la forme $x + a = b$ puis demandant et vérifiant une solution au joueur. Ce programme engage des savoirs mathématiques non connus des élèves (la généralisation d'une équation et de sa solution). Il convoque également des concepts informatiques non triviaux : le concept de variable et de son initialisation, les structures de contrôles, la gestion d'une boucle *jusqu'à*. Il articule de façon complète et complexe le travail mathématique et le travail algorithmique. Généralisation et raisonnement itératif se nourrissent mutuellement

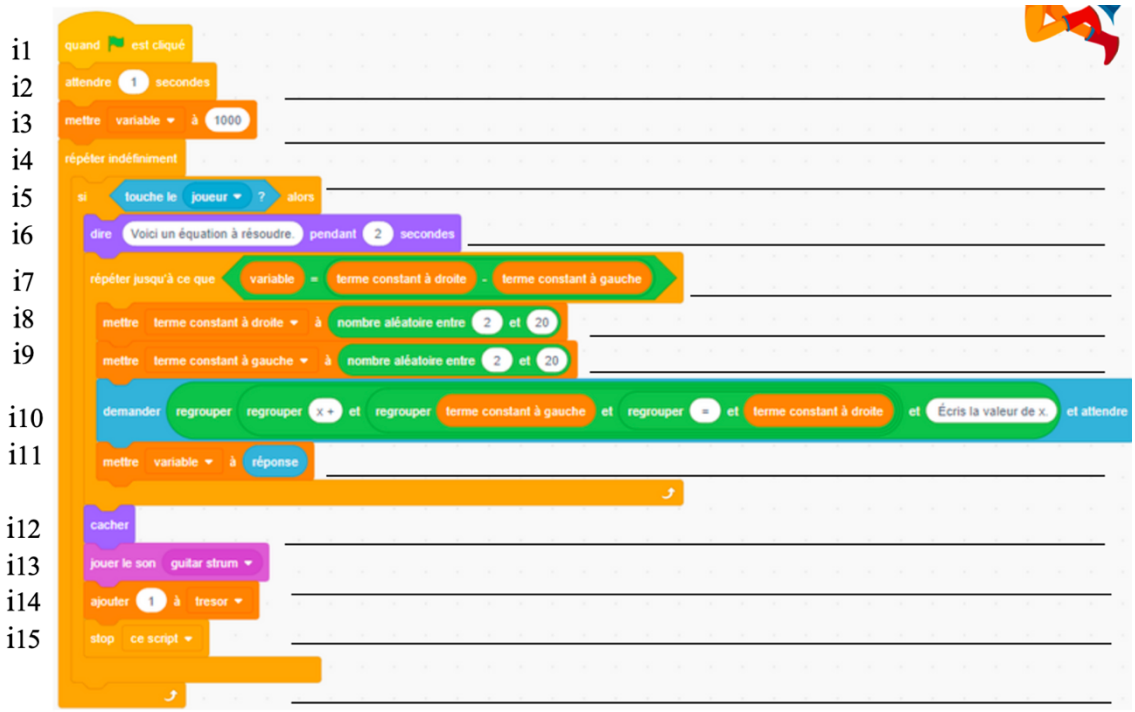


Figure 2 : 3ème étape - Analyser le programme du cadeau.

Bien que le milieu didactique à analyser soit particulièrement riche, l'enseignante laisse peu de temps aux élèves : « *Je te donne six minutes. Tu as beaucoup moins de temps, on se dépêche pour analyser la partie du cadeau* » précisant que « *C'est là que la partie mathématique embarque* ». Cette dernière précision laisse suggérer que le prima est donné aux mathématiques. Nous faisons l'hypothèse que l'équation étant de niveau 1 (de la forme $x + a = b$, l'enseignante considère le traitement de sa généralisation comme simple et accessible aux élèves et de ce fait, ne nécessitant pas un temps d'analyse important. En termes d'ET, on peut interpréter ce choix comme un accent mis sur le travail dans l'ETA, l'articulation avec le travail au sein de l'ETM via le travail de généralisation étant considérée comme quasi-instantanée.

1er épisode : Une confusion entre variable mathématique et variable informatique

Lors de la phase de dévolution de cette troisième étape, l'enseignante opte pour une position topogénétique relativement basse : elle circule de binôme en binôme, questionnant parfois, guettant l'avancée des élèves. Nous l'observons happée par des questionnements d'ordre algorithmique : les élèves incités par les réglures du document-élève à la suite de chaque instruction (Fig. 2), se maintiennent dans le droit fil des étapes précédentes, étudiant le programme ligne à ligne ce qui, dans un premier temps, les maintient sur un versant informatique de l'activité. Le travail se situe donc au sein de l'ETA. L'analyse est purement séquentielle et confine le travail dans le plan sémiotique-instrumental. Noémie facilite d'abord une genèse instrumentale, à travers la manipulation, au sein de la plateforme, des artefacts constitués par les « blocs » scratch : « *Si tu ne sais pas à quoi sert un bloc, tu peux aller modifier le programme pour essayer de comprendre* ». Cette analyse bloc par bloc soutient une genèse sémiotique, médiée par les blocs représentant les objets algorithmiques. C'est en tant qu'étiquettes que les instructions et objets algorithmiques s'instancient dans le plan cognitif. La construction de leur sens est partielle et leur permet difficilement d'acquérir un statut discursif. L'échange ci-dessous montre, par exemple, une difficulté à appréhender la notion de variable et son initialisation.

> **Élève** : La variable, c'est quoi ? parce qu'on a de la misère à comprendre ...
> **Ens.** : Dans une équation, mettons x + 25 = 40. Ma variable, ça va être mon x
> **Élève** : ah ? ok.

L'assimilation, dans le discours, entre la variable mathématique et la variable informatique conduisent à un quiproquo : alors que l'élève pose une question sur l'objet algorithmique, inscrivant sa réflexion au sein de l'ETA, l'enseignante répond dans le domaine des mathématiques, ramenant le travail dans l'ETM mais en utilisant le vocabulaire de l'ETA. Elle court-circuite la transposition algorithmique qui assure la fibration entre ETA et ETM. Ce quiproquo est accentué par l'écriture même du programme du lutin *cadeau* dans lequel la variable prévue pour recevoir la réponse du joueur est nommée « variable » (Fig. 2, i1 et i7). Dans le discours de l'enseignante, l'inconnue x est également désignée par le terme *variable* : « $x + 3 = 10$. *Ça, c'est une équation de niveau 1. Ma variable, dans ce cas-ci, c'est* x. » Elle s'appuie, sans l'expliciter, sur une analogie de structure entre les deux phrases mathématique et informatique (Fig. 3).

Figure 3. Phrase mathématique et informatique.

Le fait que cette analogie ne soit pas explicitée provoque une agrégation des genèses discursives algorithmiques et mathématiques, provoquant une confusion entre les deux types de travail.

Cette confusion se manifeste, sous une autre forme, dans la phase de dévolution lors d'une interaction entre un élève et l'enseignante à propos de l'initialisation de cette variable informatique :

Félix : Mettre variable à 1000 sert à rien parce que [??]
Ens. : Heu Oui, il y avait une raison pourquoi qu'on l'a mis à 1000, parce que sinon il générait des équations... heu ...
Félix : Théoriquement les équations sont forcées d'être entre 2 et 20
Ens. : Attends un peu, attends un peu
Félix : Il n'a pas une chance aléatoire que le cadeau tombe juste comme çà
Ens. : Dans le fond, on met une condition et on ne veut pas que ça arrive. C'est un peu ça ... 1000, ce serait étonnant que ça arrive.

On constate ici que l'ETA personnel de Noémie est encore en construction. Elle n'a pas achevé sa propre genèse discursive ce qui ne lui permet pas d'appréhender la structure itérative globale de l'algorithme. Elle a retenu de son travail préparatoire que le choix de la valeur d'initialisation permet l'entrée dans la boucle, mais cette connaissance reste purement instrumentale. Il lui est donc difficile d'en rendre compte aux élèves ce qui l'amène en position topogénétique basse. Elle laisse ainsi un élève, Félix, développer un constat faux : « *Mettre variable à 1000 sert à rien* ». Elle tente un argument, sans réelle conviction : « *Dans le fond, on met une condition et on ne veut pas que ça arrive.* » Lors de la phase de régulation, elle reconnait ne plus être capable de justifier cette initialisation à 1000. « *En fait, quand on dit de mettre la variable à 1000, c'est qu'on te donne une condition, mais on ne veut pas que ça arrive. On ne veut pas justement que ça marche tout de suite. Parce qu'on est allé mettre, je ne sais pas si ça va être clair ce que j'essaie de t'expliquer, mais on veut… heu [silence] Je perds mes mots. En fait, on met la condition, mais on ne veut pas que ça arrive ».* Nous observons ici une enseignante aux prises avec un objet dont elle appréhende mal la double référence : la variable peut-être un objet mathématique ou un objet informatique. Elle ne l'a pas tout à fait reconnu comme un objet informatique, c'est-à-dire comme un contenant que l'on doit déclarer pour pouvoir ensuite recueillir une réponse (celle du joueur). Elle n'a pas construit le rôle algorithmique de cette valeur initiale, qui est d'assurer que le programme entre dans la boucle qui suit. Ce sens ne peut en effet se construire que dans l'ETA. La valeur choisie n'a aucun sens dans l'ETM ce qui amène Félix à dire que « *Mettre variable à 1000 sert à rien ».* Noémie, ancrée dans le plan sémiotico-instrumental de l'ETA ne perçoit que confusément le sens algorithmique : « *Dans le fond, on met une condition et on ne veut pas que ça arrive* ». Elle sait à quoi sert cette valeur, mais sa conception plus mathématique de la variable la met dans l'impossibilité d'avancer des arguments convaincants : « *Je perds mes mots ».* En termes d'idonéité, c'est-à-dire dans une dialectique action/intention didactique, elle n'a donc d'autre choix que de botter en touche lors de la phase de régulation en espérant qu'une explication émergera du travail conjoint : « *Je vais juste continuer, peut-être que ça va s'éclaircir en cours de route* ».

2e épisode : difficulté à généraliser sans perdre le sens de la résolution algébrique d'une équation

Rappelons que lors de l'entretien *ante*, l'enseignante déclare que son objectif est « *de consolider les apprentissages sur les équations en utilisant la programmation* » ajoutant plus tard qu'il y a « *aussi une généralisation à faire* [...] *c'est nouveau, là, il ne sera pas facile de générer des mots [...] la généralisation ne va pas être facile à faire, ça fait que c'est pour ça que ça peut bloquer.* »

Lors de la phase de dévolution, l'enseignante circule, intervenant peu dans les groupes. Conformément à la consigne donnée, les élèves se sont attachés à comprendre le programme qui contient la généralisation de la résolution de l'équation.

Élève : On comprend mais on ne sait pas comment l'écrire...
Ens. : Qu'est-ce que tu comprends?
Élève : bien on comprend que dès que le joueur il touche le cadeau, le cadeau il va dire « voici une équation à résoudre ». C'est ça ... on met une ...la variable puis le terme constant à droite - le terme constant à gauche. Là pour le terme constant à droite, il choisit un nombre entre deux et vingt et la même affaire pour le terme constant à gauche. Après ça, il nous demande de [dire] le *x*. En fait il nous demande juste de faire une addition ici. Il demande l'addition.
Ens. : Donc c'est un niveau 1.
Élève : Et après ça, ici, si on a de bon, ça cache, puis ça joue le ... coup de guitare. C'est un coup de guitare.
Ens. : C'est un coup de guitare.
Élève : Plus 1 au trésor.
Ens. : Exact.
Élève : Je ne sais pas comment l'écrire
Ens. : Bien, t'as compris ...

Notons que cet élève émet une description factuelle du programme. En prononçant « *En fait il nous demande juste de faire une addition ici. Il demande l'addition »,* il montre le peu de sens qu'il donne à cette addition, ne la reliant pas à la résolution d'une équation. La réponse de l'enseignante, « *bien, t'as compris* », valide la compréhension du fonctionnement du programme. Elle tente alors d'appuyer sur la chronogenèse en interrompant la phase de dévolution. Elle provoque une régulation en prenant elle-même en charge la généralisation. Prenant une position topogénétique haute d'enseignante de mathématique, elle utilise la métaphore de la balance pour rappeler les règles opératoires de résolution de l'équation $x + 3 = 10$:

Ens. [à l'ensemble de la classe] : Quand je te demandais en classe, on utilisait le principe de la balance. Si je te disais $x + 3 = 10$, tu devais faire - 3 de chaque côté du signe égal. [...] Donc si on faisait la balance, on enlèverait 3 d'un côté, on enlève 3 de l'autre côté. Sauf que quand vient le temps .....Ça, ça va me donner $x = 7$. Les deux, c'est pareil. Là ici, quand vient le temps de programmer ça, qu'est-ce que je fais pour arriver à ma réponse? J'ai repris ma

> variable, j'ai pris mon terme constant à droite, et j'enlève celui qui est à gauche, mon terme constant. C'est ça la phrase qui est ici. [...] donc ici, le « - », c'est parce que c'est l'opération inverse de mon addition. Donc, c'est important, je viens de mettre mon opération inverse de façon à ce que je trouve la bonne réponse.

Dans le cours usuel de mathématiques, l'enseignante suit les instructions curriculaires qui préconisent de donner du sens à la résolution d'équations algébriques par équivalence d'égalités. Or la situation la conduit à amener sur le devant de la scène le recours à l'opération inverse, induite par la transposition informatique de la résolution de l'équation. La fragilité de l'articulation entre ETM et ETA amène Noémie à faire des raccourcis sémiotiques se basant uniquement sur la forme, le *representanem*, de l'instruction d'affectation de la valeur solution de l'équation (Fig.3).

Le processus de généralisation qui a présidé la genèse discursive mathématique de cette formule, puis sa transposition dans l'ETA, devient dès lors invisible aux élèves. L'enseignante, quant à elle, se trouve prise dans une contradiction didactique remettant à nouveau en cause l'idonéité anticipée.

Le passage d'une résolution algébrique par manipulation d'égalités équivalentes à une écriture générale est un saut informationnel[35] que les élèves ne sont pas en mesure de franchir. Aussi, l'enseignante se retrouve-t-elle seule pour assurer l'avancée du temps didactique. Les hésitations de l'enseignante nous laissent à penser qu'elle n'a pas perçu ce saut informationnel, ce qui l'amène à justifier par un raccourci technique l'instruction correspondant à la généralisation. Cet épisode est emblématique des difficultés rencontrées par l'enseignante dans la construction des ET idoines, en particulier lors des sauts informationnels constitutifs de cette étape et des suivantes. Elle peine à amener les élèves à changer de stratégie, tout en conservant le sens de la résolution d'équations algébriques, autrement dit à assurer une articulation harmonieuse entre travail mathématique et travail algorithmique.

DISCUSSION ET CONCLUSION

Une collaboration théorique fructueuse

L'analyse proposée ici a été menée à travers un dialogue permanent entre les deux cadres théoriques convoqués. Le modèle de l'action conjointe permet de rendre compte de la dynamique de la co-construction du monde didactique entre enseignant et élèves (Schubauer -Leoni et al, 2007) au sein duquel les espaces de travail prennent place. L'analyse de l'action conjointe met au jour l'émergence des objets de médiations au cœur de l'interaction entre l'enseignante et les élèves. L'idonéité peut être appréhendée à travers les interprétations de la tâche, le type de rapport attendu/effectif aux objets et la nature des traits pertinents attribués à l'action sur ces objets par les différents acteurs.

[35] On appelle saut informationnel, un changement de valeur d'une variable didactique à l'intérieur d'une situation susceptible de provoquer un changement de stratégie.

La collaboration des deux cadres facilite une mise en relation de la dynamique de l'agir en classe avec celle des différents types de travail. Elle permet notamment de mettre au jour les malentendus autour de la co-construction des savoirs au sein du travail mathématique.

Une idonéité malmenée

La notion d'idonéité cherche à rendre compte de l'adéquation de l'espace de travail proposé par l'enseignant à ces élèves à certaines contraintes qu'il cherche à respecter. Ces contraintes peuvent aussi bien être institutionnelles que de l'ordre des croyances ou des conceptions de l'enseignant. Souvent, elles concernent le travail attendu par les élèves, en lien avec l'espace de travail de référence. Dans la séance que nous avons analysée, l'équilibre habituel de ces contraintes est rompu. L'enseignante cherche à répondre à la fois à l'incitation institutionnelle d'intégrer la programmation informatique et à l'incitation académique (celle du projet de recherche) d'articuler travail algorithmique et travail mathématique. Les contraintes qui en résultent ne sont pas encore les siennes. Elle cherche encore à les apprivoiser et cela la rend très vulnérable. Il est dès lors difficile de parler d'idonéité car l'espace de travail algorithmique qu'elle propose n'est pas vraiment le sien. Elle est donc conduite à le baliser et à en élémentariser les savoirs par peur de s'y perdre avec ses élèves. Le recours à une tâche construite par un collègue s'avère finalement plus handicapant que sécurisant. C'est un piège dans lequel peuvent tomber facilement les enseignants débutants dans l'usage de la programmation informatique.

Une transposition difficile :

Notre analyse fait ressortir la difficulté de construire des savoirs mathématiques en s'adossant à une situation demandant des connaissances d'ordre informatique et algorithmique. D'une façon générale, travail mathématique et travail algorithmique sont difficiles à articuler. Les liens entre les espaces de travail peuvent ne pas se mettre en place spontanément. Une articulation shuntée, forcée ou mal assurée peut-être contre-productive en termes de construction du sens. Le passage dans l'ETA force, en effet, une réinterprétation des objets mathématiques. Le langage de programmation et les pratiques algorithmiques amènent un nouvel usage de ces objets. Les généralisations algébriques et algorithmiques ne prennent pas la même forme notamment dans la gestion de la dénomination.

Des enjeux didactiques difficile à identifier

Démêler les enjeux didactiques propres au travail algorithmique s'avère crucial au moment où la tendance est à une vision purement instrumentale de la programmation informatique et de l'algorithmique qui la sous-tend. Dans l'étude présentée ici, l'entretien *ante* montre que ceux-ci ne sont pas clairement identifiés par l'enseignante : alors que l'objectif premier de cette situation est de provoquer une généralisation mathématique comme support à la programmation d'un jeu, le travail reste essentiellement instrumental. Ce constat recoupe plusieurs recherches montrant combien des objets d'enseignement déclarés à l'interface de deux disciplines sont

difficiles à transférer dans leur double référence (Schubauer-Léoni, Leutenegger & Forget, 2007; Couderette, 2016).

REFERENCES

Barma, S. (2018). *Rapport final : Réaliser une étude de cas multiple qui vise à affiner les connaissances sur l'usage pédagogique ou didactique de la programmation dans les écoles du Québec*). Québec : Université Laval.

Briant, N. (2013). *Étude didactique de la reprise de l'algèbre par l'introduction de l'algorithmique au niveau de la classe de seconde du lycée français.* Thèse de doctorat. Université Montpellier 2.

Bruillard, É., & Richard, P. R. (2024). Informatique, mathématiques, conception et usage des technologies numériques. Annales de Didactique et de Sciences Cognitives. *Revue internationale de didactique des mathématiques, (Thématique 2)*, 173-208.

Couderette, M. (2023). Algorithmique au primaire. Premiers résultats d'une recherche en cours. *Actes du colloque de la COPIRELEM « Mathématiques et diversité à l'école. Aider les élèves, accompagner les professeurs »*. Marseille. France.

Couderette, M. (2016). Enseignement de l'algorithmique en classe de seconde. Une introduction curriculaire problématique. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 21*, 267-296. http://hdl.handle.net/20.500.12162/1908

Gonseth, Ferdinand (1939). Présentation et défense de l'idonéisme. *Revue de Théologie Et de Philosophie* 27 (13):260. https://www.jstor.org/stable/i40182145

Kuzniak, A., & Richard, P. R. (2014). Espaces de travail mathématique. Point de vues et perspectives. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, 17(4), 5-40.

Lagrange, J. B., & Laval, D. (2023). Connecting algorithmics to mathematics learning: a design study of the intermediate value theorem and the bisection algorithm. *Educational Studies in Mathematics*, 112(2), 225-245.

Masselin, B. (2019). Étude du travail de l'enseignant autour de la simulation en classe de troisième et seconde: métamorphoses d'un problème au fil d'une formation en probabilité [Doctoral dissertation, Université Sorbonne Paris Cité].

Radford L. (2014) The progressive development of early embodied algebraic thinking. *Mathematics Education Research Journal,* 26, 257-277.

Schubauer -Leoni M.L., Leutenegger F., Ligozat F. et Fluckiger A. (2007). Un modèle de l'action conjointe professeur-élèves : les phénomènes didactiques qu'il peut/doit traiter, In G. Sensevy & A. Mercier (Eds.) (2007), *Agir ensemble. L'action didactique conjointe du professeur et des élèves*. Rennes, Presses Universitaires de Rennes, p. 51-91.

Sensevy, G. (2007). Des catégories pour décrire et comprendre l'action didactique. In G. Sensevy & A. Mercier (Eds.) (2007), *Agir ensemble. L'action didactique conjointe du professeur et des élèves.* Rennes, Presses Universitaires de Rennes, p. 13-49.

Venant, F, Jeannotte, D, Passaro, V, Saboya, M, Guillemette, E et E. Knoll. (2024). Pensée algébrique et pensée algorithmique : reflexion autour d'une tâche de généralisation. *Actes du colloque EMF 2022*, Cotonou, Bénin.

Venant, F., Passaro, V., Jeannotte, D., Knoll, E et M. Saboya. (2023). Articuler travail mathématique et travail arithmétique. *Actes du septième symposium d'Étude sur le Travail Mathématique* (pp. 215-224. IREM de Strasbourg.

Venant, F. (2022). La programmation informatique dans la formation initiale des enseignants de mathématiques au Québec. Prendre en compte les enjeux algorithmiques. Dans M. Abboud et C. Hosson (dir.). Actes du Colloque *Rendez-vous en didactique, recherches, dialogues et plus si affinités* : 30 mai-3 juin 2022, Université Paris Cité, Paris, France.

ETM IDÓNEO POTENCIAL Y CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO EN EL DISEÑO DE PROPUESTAS DE ENSEÑANZA EN LA FORMACIÓN INICIAL

Paula Verdugo-Hernández[1], Carolina Henríquez-Rivas[2], Gonzalo Espinoza-Vásquez[3], Nuria Climent[4]

[1]Universidad de Talca, [2]Universidad Católica del Maule, [3]Universidad Alberto Hurtado, [4]Universidad de Huelva

La presente investigación tiene como propósito analizar el ETM idóneo potencial y conocimiento especializado de futuros profesores cuando diseñan tareas emblemáticas para el aula. Se propone un estudio de enfoque cualitativo basado en un único caso de tipo instrumental. La información se recoge de una actividad formativa. Los análisis se basan en la complementariedad entre las teorías ETM y MTSK. Finalmente, se pretende aportar en las relaciones sobre ETM idóneo y el dominio PCK, basado en las condiciones para el diseño de tareas emblemáticas.

INTRODUCCIÓN

Desde hace algunas décadas, la formación inicial docente (FID) ha sido objeto de especial atención. En particular, se ha problematizado tanto el conocimiento que tienen los futuros profesores cuando ingresan en la formación inicial, como el que desarrollan durante dicha formación (Llinares y Chapman, 2019). La presente investigación tiene como propósito analizar el trabajo matemático y conocimiento especializado de futuros profesores en una actividad formativa que demanda el diseño de propuestas de enseñanza para el aula.

En esta perspectiva, Santágueda-Villanueva y Lorenzo-Valentín (2024) han investigado cómo los futuros profesores se enfrentan las competencias matemáticas durante sus prácticas formativas, las cuales primeramente han sido direccionadas al estudio del aprendizaje, luego a las capacidades y actualmente al desempeño en el aula. El estudio de Clemente y Llinares (2015) analiza las formas de discurso de futuros profesores al resolver problemas geométricos, destacando la importancia de la enseñanza basada en el descubrimiento, visualización, descripción y representación de conceptos y propiedades tanto en el mundo físico, como también, el desarrollo del razonamiento lógico

Por su parte, Ayvaz *et al.* (2017) analizan las imágenes conceptuales de futuros profesores de matemáticas sobre el concepto de diagonal y sus propiedades. Los resultados revelan dificultades en los razonamientos para probar sus afirmaciones y se plantean ideas para mejorar el conocimiento conceptual e incluir la demostración en la formación. En la investigación de Avcu (2022), se exploran las definiciones de cuadriláteros dadas por profesores en formación, revelando variados niveles de desempeño y se plantea cómo ayudar a los programas de formación a fin de reflexionar sobre mejores propuestas para la enseñanza del profesorado. Por otra parte, Henríquez-Rivas y Verdugo-Hernández (2023) analizan el diseño de tareas realizado por futuros

profesores asociado con las representaciones de una función, destacando dificultades y posibilidades de mejoras en este tipo de instancias de formación. De aquí que, en este trabajo se pone especial atención en el diseño de actividades que permitan a los futuros profesores diseñar y mejorar sus propias propuestas para la enseñanza.

En la perspectiva de la teoría de los Espacios de Trabajo Matemático (ETM), algunos autores han estudiado al futuro profesor de matemáticas. En Montoya-Delgadillo (2014) se analiza el rol y estatus de la demostración en la formación del profesorado, dando cuenta de rupturas en la transición liceo-universidad y carencia de transposiciones didácticas frente al proceso de prueba en geometría. Por su lado, la investigación de Gómez-Chacón y Kuzniak (2015) analiza el trabajo geométrico de futuros profesores al considerar el uso de un entorno tecnológico en su formación y se evidencian dificultades en su ETM personal. Los autores destacan la necesidad de integrar este tipo de enseñanza en la formación docente y proponen el estudio del ETM con los futuros docentes, para ayudar en su posterior trabajo en el aula.

Otros trabajos (e.g., Kuzniak y Nechache, 2021; Henríquez-Rivas y Kuzniak, 2021; Henríquez-Rivas y Verdugo-Hernández, 2023) muestran el ETM como una herramienta de análisis teórica y metodológica para la investigación y uso en la formación del profesorado. Estas investigaciones destacan el potencial del uso del ETM en la formación de profesores para el diseño de tareas, lo cual se plantea como un desafío para continuar profundizando en futuros estudios.

Tal como se reporta, la complejidad de la formación inicial para la enseñanza de las matemáticas invita a reflexionar sobre aquello que el futuro profesor (FP) desarrolla en su formación, vinculado con lo que el profesor utiliza en su práctica, en particular, en el diseño de propuestas matemáticas para el aula. De este modo, la presente investigación tiene como objetivo analizar el trabajo matemático y conocimiento especializado de futuros profesores cuando diseñan tareas emblemáticas para el aula.

MARCO TEÓRICO

Usaremos las teorías ETM y MTSK, retomando los avances realizados, desde la conexión entre teorías (Prediger *et al.* 2008), que expresan la potencialidad de su uso conjunto (Espinoza-Vásquez *et al.*, 2022, 2025; Verdugo-Hernández *et al.*, 2022).

Los Espacios de Trabajo Matemático (ETM) posibilitan el estudio de la enseñanza y aprendizaje en torno a una tarea y/o problema matemático. Este modelo considera un plano epistemológico (que incluye las componentes referencial, artefacto y representamen) y un plano cognitivo (con las componentes prueba, construcción y visualización). Estas componentes se relacionan a su vez por medio de tres génesis que modelizan la relación entre el plano epistemológico y el cognitivo (discursiva, instrumental y semiótica) y tres planos verticales que representan circulaciones entre génesis (plano [Sem-Dis], [Sem-Ins] e [Ins-Dis]).

Desde la participación del futuro profesor en diseño y análisis (a priori) de tareas matemáticas para el aula, se estudia cómo éste pretende proponer el contenido matemático para una situación concreta, es decir, se estudia el ETM idóneo potencial

del FP (Henríquez-Rivas *et al.*, 2022). Asimismo, el estudio se apoya en la idea de *tareas emblemáticas* (Kuzniak y Nechache, 2016), entendidas como aquellas que pueden ser validadas mediante el análisis y la experimentación, debiendo cumplir tres condiciones de manera conjunta:

1. Debe estar disponible en el ETM de referencia,
2. Debe estar presente en el ETM idóneo,
3. Debe permitir un trabajo matemático *completo*, es decir, debe permitir la circulación e interacción entre los componentes, génesis y planos verticales del ETM.

De lo anterior, el presente estudio pone atención en tareas que están disponibles en el currículo escolar y que los futuros profesores adaptan para su implementación (potencial o simulada) en la enseñanza.

Por otra parte, la teoría del Conocimiento Especializado del Profesor de Matemática (MTSK) se presenta como un constructo para el estudio de la práctica del profesor en términos de los conocimientos que la sustentan (Carrillo *et al.*, 2018). Su formulación contempla un dominio de conocimiento matemático (MK) y uno de conocimiento didáctico del contenido (PCK). En este estudio nos focalizamos en el subdominio de conocimiento del tema (KoT), dentro del MK, que considera la profundidad con la que el profesor conoce los temas matemáticos como parte del cuerpo de conocimiento matemático, y en el dominio PCK, que contempla el conocimiento de la enseñanza de la matemática (KMT), el conocimiento de las características del aprendizaje de los estudiantes (KFLM) y el conocimiento sobre los estándares de aprendizaje (KMLS).

METODOLOGÍA

Para analizar el ETM idóneo potencial del FP y el conocimiento especializado que despliegan cuando diseñan tareas en actividades que promueven contextos simulados de la formación inicial docente (FID), se propone un estudio de un único caso de tipo instrumental (Stake, 2007), lo cual se fundamenta en que se trata de un objeto de estudio particular que permite entender en general, el diseño de tareas de FP, las que son adaptadas para el aula, considerando las dos teorías en conjunto para los análisis.

Para este reporte, la recolección de datos considera las producciones escritas de FP en una actividad de formación docente realizada durante un semestre. En este caso, se presentan las propuestas de enseñanza que realiza un grupo de futuros profesores (el caso de estudio se denomina como FP1), en contexto de trabajo colaborativo. FP1 seleccionan un tema del currículo escolar de educación secundaria relacionado con la enseñanza del área de cuerpos 3D y su relación con las figuras 2D. La información recogida se inserta en una actividad formativa en el 8° semestre de la formación, tras haber recibido cursos matemáticos y didácticos específicos sobre los contenidos implicados durante los semestres anteriores. La realización se llevó a cabo el segundo semestre de 2023, en el horario asignado del curso (4 horas semanales), lo que implicó tanto horas de trabajo presencial, como horas de trabajo autónomo. La actividad formativa involucra tres momentos, los que se describen brevemente a continuación.

El Momento 1 se centra en el ETM idóneo de referencia y potencial del FP, lo que incluye la selección de un tema y tarea propuesta en el currículo escolar, y su adaptación para la enseñanza. Además, cada FP debe realizar un análisis a priori de su tarea adaptada.

El Momento 2 involucra el ETM idóneo efectivo del FP, con la implementación (en contextos simulados) de la tarea adaptada en el momento anterior.

El Momento 3 se refiere al ETM idóneo potencial del FP, lo que involucra la reflexión y mejoras de la tarea propuesta.

El presente estudio pone la atención en este momento 3 de la actividad formativa. Para ello, se considera la tarea en su versión inicial propuesta en el currículo escolar y la propuesta final de FP1, que es el resultado del proceso de diseño, simulación, reflexión y reformulación de la tarea.

Criterio	Componente	Descriptor
Génesis semiótica (GS)	Representamen	Relaciona objetos matemáticos y elementos significantes.
	Visualización	Interpreta y relaciona objetos matemáticos con los registros de representaciones semióticas (identificación, tratamientos, conversiones).
Génesis instrumental (GI)	Artefacto	Utiliza artefactos de tipo material o un sistema simbólico.
	Construcción	Se basa en los procesos dados por las acciones desencadenadas por los artefactos utilizados y las técnicas de uso asociadas.
Génesis Discursiva (GD)	Referencial	Utiliza definiciones, propiedades o teoremas
	Prueba	El razonamiento discursivo se basa en distintas formas de justificación, argumentación o demostración.
Plano vertical	[Sem-Ins]	Los artefactos se usan en la construcción de resultados bajo ciertas condiciones o para la exploración de representaciones semióticas.
	[Ins-Dis]	El proceso de prueba se basa en una experimentación con el empleo de un artefacto, o bien, en la validación de una construcción.
	[Sem-Dis]	El proceso de visualización de los objetos representados se pone en coordinación con un razonamiento discursivo para probar.

Tabla 1: Protocolo para el análisis del ETM. Fuente: Henríquez Rivas *et al.*, 2021.

En cuanto a los análisis, este estudio se basa en una metodología adaptada de Kuzniak y Nechache (2021), que permite describir y analizar las principales acciones en la realización de una tarea, que considera: 1) La descripción en la resolución de la tarea; 2) A partir de lo anterior, se analizan e interpretan el trabajo matemático y conocimiento especializado observados en términos del ETM y MTSK. Este análisis

deductivo contempla el uso de un protocolo teórico que ha sido usado en investigaciones previas (e.g. Espinoza-Vásquez y Verdugo-Hernández, 2022; Henríquez-Rivas *et al.*, 2021), el cual considera categorías teóricas (Tablas 1 y 2).

Conocimiento Matemático	
Sub dominio	Descripción
Conocimiento de los Temas (KoT)	Corresponde al conocimiento del profesor sobre el tema, su red conceptual y aplicaciones.
Conocimiento de la Estructura de la Matemática (KSM)	Corresponde al conocimiento de las conexiones del tema con otros o su progresión epistemológica.
Conocimiento de la Práctica Matemática (KPM)	Corresponde al conocimiento sobre la forma en que se produce, explora y comunica en matemáticas.
Conocimiento Didáctico del contenido	
Conocimiento de la Enseñanza de las Matemáticas (KMT)	Corresponde al conocimiento de los temas como objetos de enseñanza.
Conocimiento de Características del Aprendizaje de la Matemáticas (KFLM)	Corresponde al conocimiento de los temas como objetos de aprendizaje.
Conocimiento de los Estándares de Aprendizaje de las Matemáticas (KMLS)	Corresponde al conocimiento del profesor sobre lo que el estudiante debe o puede alcanzar en determinado nivel.

Tabla 2: Protocolo para el análisis del MTSK. Fuente: Carrillo *et al.*, 2018.

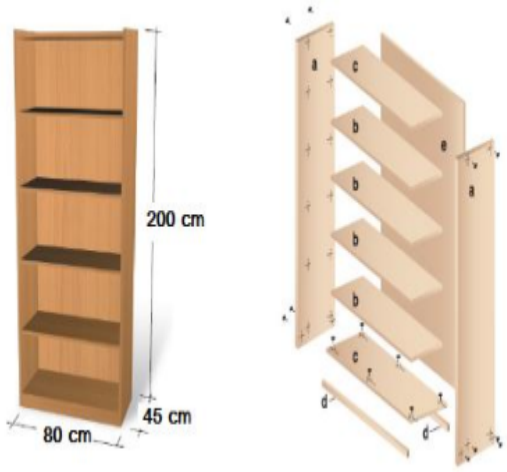
RESULTADOS

A continuación, se presenta la tarea propuesta en el currículo escolar, correspondiente a la parte inicial del trabajo (Momento 1) y luego, la tarea reformulada en el Momento 3, lo que considera: una descripción general de la organización en términos de enseñanza de la tarea, la presentación del enunciado de la tarea, la respuesta esperada por FP1 y, finalmente, los análisis teóricos sobre la tarea.

Momento 1: Tarea disponible en el currículo escolar

La tarea se presenta en el currículo de 3° y 4° de la educación secundaria (16 y 17 años aproximadamente). Específicamente, se relaciona con el *Objetivo de Aprendizaje* (Ministerio de Educación [Mineduc], 2020), "*Resolver problemas que involucren relaciones entre figuras 3D y 2D en las que intervengan vistas, cortes, proyecciones en el plano o la inscripción de figuras 3D en otras figuras tridimensionales*" (p.39).

La tarea se denomina *Diseño de una Repisa* (véase Figura 1). Al respecto, su presentación indica que para su diseño se debe "*determinar su función, dimensiones, el despiece para determinar cada una de las partes y el armado del mueble*" (Mineduc, 2020, p. 162).



1. Supongan que disponen de un espacio, en la habitación, de 2 m de largo y 1 m de ancho para ubicar un mueble tipo repisa y respondan las siguientes preguntas, que los orientarán para diseñarla.
   a. Organicen los elementos que guardarían en la repisa en la siguiente tabla:

Objeto					
Largo					
Alto					
Ancho					

   b. Expliquen qué medidas deben considerar para dimensionar las repisas.
   c. Diseñen el mueble según los objetos que ubicarían en él y dibujen las tres vistas del mueble en una cuadrícula, con las dimensiones correspondientes (largo, alto y ancho).
   d. Describan el dibujo desde su vista frontal, lateral derecha e izquierda.
   e. ¿Cuántos centímetros cuadrados de área ocupará el mueble en la habitación?
   f. En otra cuadrícula, dibujen cada una de las piezas que conforman el mueble. Especifiquen las dimensiones de cada una, considerando que usarán madera de 15 mm de espesor.
   g. ¿Por qué es importante especificar las medidas de cada pieza?
   h. Expliquen cuál es el aporte de la geometría en el diseño de un mueble.

Figura 1: Tarea propuesta en currículo escolar (Mineduc, 2020, p. 163).

Momento 3: Tarea propuesta desde el ETM idóneo potencial

Descripción de la tarea propuesta

La tarea propuesta por los FP1, que llaman *Manos a la obra*, considera la planificación de la enseñanza mediante tres sesiones de clases en torno a la creación de un mueble. Esto constituye una de las adaptaciones de la tarea, en relación con la primera versión planteada en el currículo escolar. Según la organización de la enseñanza de FP1, cada clase contempla un objetivo de aprendizaje específico:

- Clase 1: Crear una figura en 3D asociada a un objeto real, con el uso de software geométrico.
- Clase 2: Descomponer la figura 3D a 2D para visualizar sus partes, usando un software geométrico.
- Clase 3: Diseñar un manual de instrucciones para la elaboración del mueble, visualizando la figura en 3D y usando el software geométrico en Geogebra.

El estudio presentado por FP1 se focaliza en las clases 1 y 2, lo que involucra presentar la construcción de distintos muebles y, luego, encontrar un modelo geométrico que determine la cantidad de madera necesaria con el uso de Geogebra. Cabe señalar que la tarea considera tres sub-tareas y, para cada clase, se realizará una de estas de manera secuenciada. La tarea completa se muestra en la Figura 2.

"Manos a la obra"

Una de las características principales de un mueble es que es portátil; puede moverse de un lugar a otro, permitiendo mayor utilidad y comodidad. En el área de diseño, se planifica y ejecuta la producción de diferentes prototipos de muebles; con ayuda de la tecnología y una variedad de materiales, se puede personalizar y crear nuestros propios muebles. Un tipo de mueble es el de caja. Sus piezas conforman una caja, generalmente de forma recta, incluyendo armarios y sus derivaciones. Para diseñarlo, es clave determinar su función, dimensiones, el despiece para determinar cada una de las partes y el armado del mueble (Ministerio de Educación, 2020).

Fig.1. Imágenes de muebles

En grupos de 3 a 4 integrantes realicen lo siguiente:

1. Supongan que disponen de un espacio, en su casa y/o departamento, para ubicar un mueble, consideren las limitaciones espaciales y escojan el espacio que ocupará el mueble en su casa, y diséñelo en 3D, con el uso de software educativo.

2. Encuentre un modelo geométrico en 2D y su expresión algebraica para determinar la cantidad de madera a utilizar en la construcción de un mueble. Valida tu respuesta con el uso del software GeoGebra.

3. Realicen un manual de instrucciones para la elaboración del mueble visualizando la figura en 3D con el uso del software geométrico en GeoGebra.

Figura 2: Tarea adaptada. Fuente: elaborado por FP1.

A modo ilustrativo, FP1 muestran los siguientes ejemplos de muebles que podrían ser creados por los estudiantes (clase 1), que asocian con la primera sub-tarea.

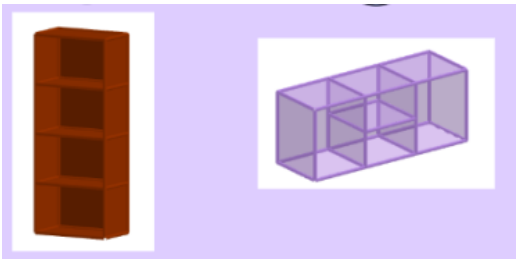


Figura 3: Ejemplos de muebles creados en clase 1. Fuente: elaborado por FP1.

Luego, para la clase 2, FP1 plantean una respuesta esperada para la segunda sub-tarea (Figura 4), para lo cual representan en 2D las figuras de la primera repisa (café).

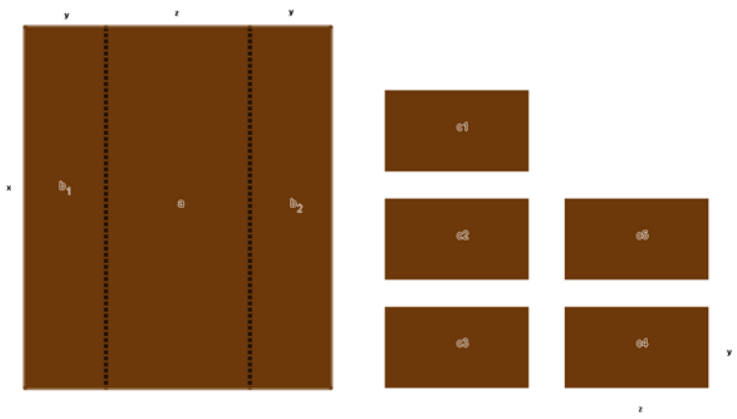


Figura 4: Descomposición en 2D de una repisa. Fuente: elaborado por FP1.

En seguida, consideran ciertas medidas numéricas, lo que les permite determinar la cantidad de madera requerida para construir el mueble. Además, plantean una expresión algebraica para la solución, lo que se muestra en la Figura 5.

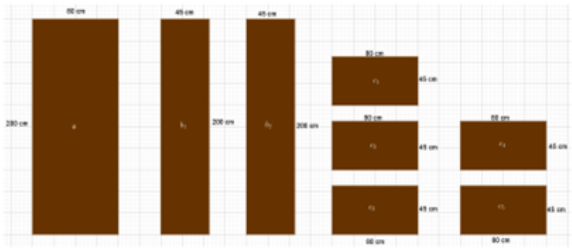


Figura 18: Elaboración propia

De lo anterior, podemos determinar la cantidad de madera calculando el área total de las partes del mueble, utilizando la siguiente fórmula algebraica:

Cálculo de área total = área de tapa trasera (a) + área de tapas laterales (b_1 y b_2)
+ área de repisas intermedias (c_1, c_2, c_3, c_4 y c_5)
Sea CT: área total del mueble
$CT = xz + 2xy + 5yz$
$CT = 200 \cdot 80 + 2 \cdot 200 \cdot 45 + 5 \cdot 45 \cdot 80$
$CT = 5200\ cm^2$ de madera

Respuesta: La cantidad de madera necesaria para construir el mueble es de 5200 cm^2.

Figura 5: Respuesta esperada para sub-tarea 2. Fuente: elaborado por FP1.

Análisis teóricos de la tarea propuesta

La tarea presentada en el currículo escolar (Figura 1) muestra un enfoque en la medición y dimensiones de objetos, el cálculo de áreas y las explicaciones del proceso involucrado, lo cual deja ver el ETM de referencia. Por otro lado, la tarea adaptada por FP1 involucra el trabajo en grupo y deja abiertas consideraciones espaciales, sugiriendo un trabajo geométrico en 2D y 3D con uso de algún software educativo. Esto último incentiva un trabajo matemático distinto al inicial.

La tarea pretende un trabajo que va desde la génesis instrumental hacia la génesis semiótica, utilizando el referencial que poseen FP1. Además, al incluir medidas de las figuras, se busca aplicar fórmulas para el cálculo de áreas en 2D como artefactos

simbólicos que permitan responder a la tarea y elaborar un modelo para el área de las piezas del mueble. Esta construcción e interpretación se realiza usando un artefacto tecnológico, lo que implica que se favorece en plano [Sem-Ins].

FP1 guían el trabajo de los estudiantes, puntualizando distintos aspectos de la resolución. La primera sesión se enfoca en la visualización del mueble, para que los estudiantes se familiaricen y comprendan el diagrama, lo que nos muestra que el trabajo matemático inicia desde la génesis semiótica, a través de las representaciones de las caras del modelo figural. En la segunda sesión, FP1 se centran articular distintos tipos de representaciones: figurales y numérica (Fig 4→Fig 5), asignando valores y variables a las piezas del mueble. La organización de FP1, refleja la forma en que diseñan el ETM idóneo en términos de la secuencia de tareas y sub-tareas.

La tarea adaptada se alinea con el objetivo de aprendizaje del currículo chileno, lo que muestra su conocimiento sobre la secuenciación de temas y, a la vez, respecto de lo que se espera en este nivel (KMLS). La descomposición del objetivo en sub-objetivos, organiza el proceso de enseñanza-aprendizaje, vinculando KMLS con el KMT respecto de la estrategia de enseñanza adoptada. En este sentido, se aprecia una propuesta de enseñanza que incorpora la contextualización del área de figuras en 2D, que se apoya en el conocimiento de la fenomenología y aplicación del tema (KoT). Del mismo modo, la utilización de la fórmula del área es parte de su conocimiento del tema (KoT) que refuerza la estrategia de enseñanza y sustenta el planteamiento de la tarea (KMT), reflejando además un conocimiento procedimental que refuerza en sus estudiantes (pues lo deben aplicar) como conocimiento previo de ellos (KMLS).

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

Desde la perspectiva de la complementariedad entre ETM y MTSK, la estructuración del ETM idóneo potencial se ve altamente influenciada por cómo FP1 conocen los temas matemáticos y su didáctica. Las decisiones sobre la selección de tareas llevan a FP1 a movilizar conocimientos sobre el tema de estudio como procedimientos, representaciones y usos, lo que se alinea con la activación de diferentes génesis del ETM. Esto refleja tanto el punto de partida del trabajo que propone en la simulación de clases, como la forma en que organiza la enseñanza del tema.

Notamos que el análisis desde el MTSK refuerza lo evidenciado en el ETM idóneo, con respecto al uso del conocimiento en el dominio PCK para estructurar dicho ETM. En este diseño, los conocimientos sobre lo esperado en el nivel escolar (KMLS) son clave frente a la ausencia de estudiantes reales. FP1 pueden utilizar sus conocimientos adquiridos en la formación respecto de cómo se aprende y enseña el tema, intentando concretar los conocimientos teóricos de la formación en tareas concretas para la enseñanza. De este modo, el estudio desde el MTSK puede evidenciar cuáles son los conocimientos que los futuros profesores ponen en juego en sus propuestas y cuáles requiere su formación para realizar estas propuestas.

Por su parte, el ETM estudiado en un contexto de simulación de clases, aún se encuentra poco explorado, y permite observar la formación docente en términos de los conocimientos esperados en los futuros profesores, lo que nutre el estudio del MTSK (Verdugo-Hernández *et al.*, en prensa). En este sentido, reconocemos que el estudio de simulaciones desde ambas teorías es relativamente nuevo. Por tanto, futuras investigaciones sobre la relación ETM-MTSK pueden explorar en este ámbito. Consideramos que las condiciones de las tareas emblemáticas pueden ser de utilidad para estos fines de estudio.

En cuanto a las limitaciones del trabajo, observamos que la ausencia de estudiantes reales puede restringir las evidencias obtenidas para el PCK y el ETM idóneo efectivo. Sin embargo, el estudio del ETM idóneo potencial en la simulación de clases en la FID constituye un contexto para examinar in situ el conocimiento del FP y explorar otras relaciones entre ETM y MTSK. Asimismo, se proyecta que la implementación de este tipo de propuestas en la FID en contextos reales (en la formación práctica), se plantea como una posibilidad de investigación a futuro.

Finalmente, en este trabajo se buscó estrechar la relación entre los conocimientos movilizados para la enseñanza y el diseño del ETM idóneo, en la línea del estudio del diseño y adaptación del ETM idóneo y el dominio PCK, a partir del trabajo matemático que se promueve en las diferentes propuestas de enseñanza. En específico, consideramos que una actividad formativa desarrollada en la formación inicial del profesorado ha permitido avanzar en el estudio de tareas emblemáticas. Esto se constituye como un punto de encuentro para el estudio de la relación ETM-MTSK, lo cual podría ser retomado en futuras investigaciones, con atención en las condiciones que deben cumplir este tipo de tareas.

Agradecimientos

Paula Verdugo-Hernández agradece a ANID, Fondo Nacional de Desarrollo Científico y Tecnológico de iniciación 2023, Folio 1123024. Carolina Henríquez-Rivas agradece a ANID, Fondo Nacional de Desarrollo Científico y Tecnológico de iniciación 2023, Folio 11230523. Gonzalo Espinoza-Vásquez agradece a ANID, Fondo Nacional de Desarrollo Científico y Tecnológico de Iniciación 2023, Folio 11231088. Nuria Climent agradece a PID2021-122180OB-100, financiado por MICIU/AEI/10.13039/501100011033, y ProyExcel_00297 de la Junta de Andalucía (España).

Este trabajo está vinculado a la Red MTSK de la Asociación Universitaria Iberoamericana de Posgrado (AUIP).

REFERENCIAS

Avcu, R. (2022). Pre-service middle school mathematics teachers' personal concept definitions of special quadrilaterals. *Mathematics Education Research Journal.* https://doi.org/10.1007/s13394-022-00412-2

Ayvaz, Ü., Gündüz, N., y Bozkuş, F. (2017). Understanding of Prospective Mathematics Teachers of the Concept of Diagonal. *Journal on Mathematics Education, 8*(2), 165-184. https://doi.org/10.22342/jme.8.2.4102.165-184

Carrillo, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L.C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, A., Ribeiro, M., y Muñoz-Catalán, M.C. (2018). The Mathematics Teacher's Specialised Knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education*, *20*(3), 236-253. https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981

Clemente, F., y Llinares, S. (2015). Formas de discurso y razonamiento configural de estudiantes para maestro en la resolución de problemas de geometría. *Enseñanza de las Ciencias, 33*(1), 9-27. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.1332

Espinoza-Vásquez, G., Verdugo-Hernández, P., Henríquez-Rivas, C. y Ponce, R. (2022). Avances en la relación entre MTSK y espacios de trabajo matemático. En J. Carrillo, M. A. Montes y N. Climent (Eds.). *Investigación sobre conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK): 10 años de camino* (pp. 265-276). Dykinson. https://doi.org/10.2307/j.ctv2zp4vp1.24

Espinoza-Vásquez, G., Henríquez-Rivas, C., Climent, N., Ponce, R., & Verdugo-Hernández, P. (2025). Teaching Thales's theorem: relations between suitable mathematical working spaces and specialised knowledge. *Educational Studies in Mathematics,* 118, 271-293. https://doi.org/10.1007/s10649-024-10367-9

Gómez-Chacón, M. I., y Kuzniak, A. (2015). Spaces for geometric work: figural, instrumental, and discursive geneses of reasoning in a technological environment. *International Journal of Science and Mathematics Education, 13*, 201-226. https://doi.org/10.1007/s10763-013-9462-4

Henríquez-Rivas, C., y Kuzniak, A. (2021). Profundización en el trabajo geométrico de futuros profesores en entornos tecnológicos y de lápiz y papel. *Bolema, 35*(71), 1550-1572. https://doi.org/10.1590/1980-4415v35n71a15

Henríquez-Rivas, C., Kuzniak, A. y Masselin, B. (2022). The idoine or suitable MWS as an essential transition stage between personal and reference mathematical work. En A. Kuzniak *et al.* (Eds.). *Mathematical work in educational context: The perspective of the theory of Mathematical Working Spaces* (pp. 121-146). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-90850-8_6

Henríquez-Rivas, C., y Verdugo-Hernández, P. (2023). Diseño de tareas en la formación inicial docente de matemáticas que involucran las representaciones de una función. *Educación Matemática, 35*(3), 178-208. https://doi.org/10.24844/EM3503.06

Kuzniak, A., y Nechache, A. (2016). Tâches emblématiques dans l'étude des etm idoines et personnels : existences et usages. *Fifth ETM Symposium*, 145-155.

Kuzniak, A., y Nechache, A. (2021). On forms of geometric work: a study with pre-service teachers based on the theory of Mathematical Working Spaces. *Educational Studies in Mathematics, 106*, 271-289. https://doi.org/10.1007/s10649-020-10011-2

Ministerio de Educación. (2020). *Programa de Estudio 3º o 4º Medio Formación Diferenciada Matemática Geometría 3D*. Ministerio de Educación.

Montoya-Delgadillo, E. (2014). El proceso de prueba en el espacio de trabajo geométrico: profesores en formación inicial. *Enseñanza de las Ciencias, 32*(3), 227-247. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.1049

Llinares, S., y Chapman, O. (2019). *International Handbook of Mathematics Teacher Education: Volume 2: Tools and Processes in Mathematics Teacher Education*. Brill. https://doi.org/10.1163/9789004418967

Prediger, S., Arzarello, F., Bosch, M., & Lenfant, A. (2008). (Eds.), Comparing, Combining, Coordinating - Networking strategies for connecting theoretical approaches. ZDM, *40*(2), 163-327. https://doi.org/10.1007/s11858-008-0093-0

Stake, (2007). *Investigación con estudio de casos*. Ediciones Morata.

Verdugo-Hernández, P., Espinoza-Vásquez, G y Henriquez-Rivas, C. (2024) Conocimiento y trabajo matemático del futuro profesor: uso de ejemplos en simulaciones de clases. Dykinson S.L. (en prensa).

Verdugo-Hernández, P., Espinoza-Vásquez, G. y Carrillo Yáñez, J. (2022). Análisis de una tarea sobre sucesiones desde el uso de las herramientas y el conocimiento matemático del profesor. *Enseñanza de las Ciencias*, *40*(2), 1-21. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.3457

CONOCIMIENTOS TEÓRICOS Y PRÁCTICOS EN EL ESPACIO DE TRABAJO MATEMÁTICO IDÓNEO BAJO INSTANCIAS COLABORATIVAS DE LA TRÍADA FORMATIVA CON USO DE LA CALCULADORA

Romina Menares Espinoza[1], Laurent Vivier[2]

[1]Universidad de Valparaíso, [2]Université Paris Cité

Resumen. En este trabajo mostramos resultados empíricos sobre la construcción de Espacios de Trabajo Matemático (ETM) idóneos, producto de la interacción de profesores con distintos roles: profesores en formación, en servicio y formadores de profesores, en un ambiente donde convergen conocimientos teóricos y prácticos. Utilizamos como marco teórico lo que Eraut (2003) entiende por conocimiento teórico y práctico, y la teoría de los ETM (Kuzniak, 2022). Metodológicamente, realizamos una investigación de diseño (Gravemeijer y Cobb, 2006). Los resultados demuestran el desarrollo de ETM enriquecidos, gracias a la reflexión que se produce en la interacción entre los docentes que participan, principalmente en torno al rol de la calculadora "sin usar la tecla log" para la construcción de conocimiento sobre logaritmo en base diez.

Palabras clave: Espacio de Trabajo Matemático idóneo, tríada formativa, trabajo colaborativo, conocimientos teóricos y prácticos, calculadora.

INTRODUCCIÓN

La desarticulación de la teoría con la práctica en profesores en formación y en servicio es un problema que persiste por décadas. (Huong *et al.*, 2020; Jaworski, 2023; Kohen y Borko, 2019; Little y Anderson, 2016; Muñoz-Martínez *et al.*, 2021) Según estudios, las prácticas en la formación inicial docente constituyen un escenario importante donde estudiar el problema, pues es un ambiente donde convergen los conocimientos teóricos con los prácticos (Potari, 2020). Se ha evidenciado que espacios de colaboración entre agentes de la tríada formativa: profesor en formación, profesor guía en la escuela y profesor supervisor, pueden generar vínculos entre la teoría y la práctica, creando sinergias que llevarían a un conocimiento compartido. (Crecci y Fiorentini, 2018) En este trabajo nos interesamos en conocer cómo la colaboración entre los agentes de la tríada formativa, y los conocimientos teóricos y prácticos que se despliegan en ella contribuye al desarrollo de Espacios de Trabajo Matemático (ETM) enriquecidos. Específicamente, nos centramos en los ETM idóneos potenciales (Henríquez-Rivas *et al.*, 2022) que se construyen en sesiones grupales, y en el ETM idóneo actual (*Ibid)* observado en una clase en segundo año de enseñanza secundaria, sobre logaritmos en base diez con uso de la calculadora, pero sin la tecla "*log*". Esto último, es una parte fundamental de nuestro estudio, pues durante su diseño e implementación, fue apareciendo, como elemento crucial, el uso de la calculadora sin la tecla *"log"*, que movilizó el ETM en las distintas génesis que lo componen.

Aspectos teóricos

La investigación se sustenta teóricamente en lo que Eraut (2003) define como conocimiento teórico y conocimiento práctico, y en la teoría de los Espacios de Trabajo Matemático (Kuzniak, 2022). En cuanto a lo primero, buscamos en el diálogo que se da en la tríada, elementos indicativos de conocimiento teórico o práctico que se hacen explícitos en el escenario de colaboración. Según Eraut (2003), los conocimientos teóricos en la educación son aquellos "conceptos, marcos, principios e ideas que pueden utilizarse para interpretar, explicar o juzgar intenciones, acciones y experiencias en entornos educativos o relacionados con la educación" (p. 60, traducción propia). Para nosotros, estos conceptos pueden provenir tanto de la matemática como de la didáctica de la matemática. El autor considera como práctica "un conjunto o secuencia explícita de acciones que puede reproducir cualquier profesional con la competencia necesaria" (p. 63, traducción propia). Complementamos esta última noción, para llevarla al campo del conocimiento, con la aproximación de Elbaz (1981), quien define el conocimiento práctico como las percepciones que subyacen a la práctica.

Para comprender cómo las interacciones y articulaciones que se dan entre los conocimientos teóricos y prácticos en el escenario colaborativo, enriquecen el trabajo de la tríada formativa, utilizamos la teoría de los Espacios de Trabajo Matemático (ETM) (Kuzniak, 2022). La teoría distingue tres génesis que relacionan un plano epistemológico, con tres componentes, y un plano cognitivo, con tres procesos (Figura 1). Es usual en la teoría considerar *planos verticales* (Coutat y Richard, 2011) para tomar en cuenta el hecho que las génesis no son aisladas.

Además, se distinguen tres tipos de ETM: ETM de referencia, ETM idóneo y ETM personal. En particular, nos interesamos por el ETM idóneo (Henríquez-Rivas *et al.*, 2022), y por la componente artefacto y la génesis instrumental del ETM (Figura 1).

Para profundizar más en el ETM idóneo, es necesario referirnos a la diferencia que Henriquez-Rivas *et al.* (2022) establecen entre el ETM idóneo llamado *potencial* y el ETM idóneo llamado *actual*. El ETM idóneo potencial se refiere a las organizaciones didácticas que se establecen previamente a la clase; acá aparecen hipótesis sobre lo que podría suceder en la clase: posibles preguntas, respuestas, dificultades y errores de los estudiantes, así como también, reacciones del profesor que dicta la clase. Naturalmente, este ETM idóneo potencial tiene un punto de vista idealista de lo que ocurrirá en la clase, y generalmente se refiere a espacios de trabajo más completos que el ETM idóneo *actual*. En cuanto a este último, se define como aquel que se desarrolla en el aula.

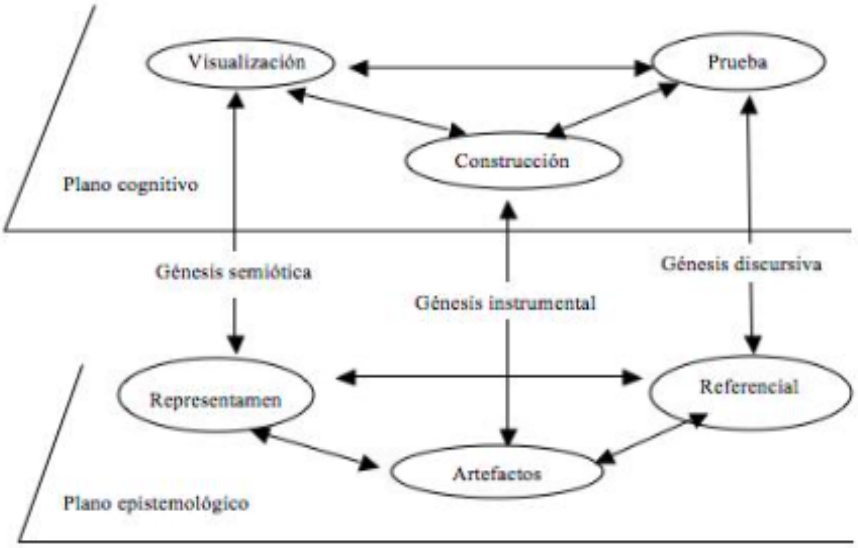


Figura 1: Diagrama del Espacio de Trabajo Matemático (Kuzniak, 2022).

La riqueza de los ETM dependerá de la diversidad de elementos puestos en juego, de la coordinación y articulación de los procesos, y de la calidad de los discursos (Kuzniak, *et al.*, 2022). Al respecto, el autor precisa que "el trabajo matemático es completo cuando su circulación está asegurada entre todas las dimensiones y componentes del diagrama ETM" (Kuzniak, 2022, p. 24, traducción propia).

El artefacto calculadora en el Espacio de Trabajo Matemático

La calculadora es intrínsecamente un artefacto, por lo que la dimensión instrumental está siempre activada cuando ésta se usa. La génesis instrumental permite pulsar las teclas adecuadas para el proceso de construcción que produce un número, como nuevo signo numérico. Sin embargo, el contexto del trabajo matemático puede ser muy diferente: En un primer nivel, las teclas se pulsan con referencia a un manual de instrucciones, sin saber exactamente de qué se trata. Por ejemplo, la tecla "pi" se utiliza para calcular el área de un círculo cuyo radio se conoce, sin tener una idea clara del número ni de cómo calcularlo, sobre todo con tantos decimales. Este uso es altamente instrumental, o en el plano [Sem-Ins], sin referencia discursiva.

En un segundo nivel de uso existe una comprensión de los objetos con los que trabajamos a través de la calculadora. Por ejemplo, para pi, se conoce al menos una definición de pi, que es un objeto integrado en el marco teórico de referencia (por ejemplo, como coeficiente de proporcionalidad entre el diámetro y la circunferencia de un círculo). Esto puede permitir cierto dominio del objeto, como calcular con uno o dos decimales, midiendo el perímetro de círculos de un diámetro dado, pero no permite realizar cálculos más avanzados, cuando a veces se necesitan más decimales. También puede ocurrir que la definición y el uso instrumental estén desconectados: se puede tener una definición de pi sin tener una forma de calcular un valor aproximado de este número. En este nivel el trabajo se sitúa más en el plano [Ins-Dis].

En un tercer nivel de uso, el trabajo es en cierto modo más avanzado que en el nivel 2. Sigue estando más en el plano [Ins-Dis], pero el dominio es mayor en el sentido de que se es capaz de producir el mismo resultado que la calculadora por otros medios, por ejemplo con un artefacto simbólico como un algoritmo justificado discursivamente (por ejemplo con la fórmula de Machin). En este último nivel, tenemos entonces que elegir entre un procedimiento largo y costoso y un artefacto que nos permita obtener el resultado deseado de forma más rápida y eficaz.

Aspectos metodológicos

Metodológicamente, utilizamos la investigación de diseño intervencionista (Gravemeijer y Cobb, 2006), pues creamos un escenario de planificación, implementación y análisis de clases de enseñanza secundaria, en el cual ubicamos a la tríada, inicialmente con recursos proporcionados por los investigadores. El rol de los investigadores fue de mediadores y el trabajo estuvo dirigido por preguntas activadoras. En particular, para el tratamiento del logaritmo en base diez, quisimos indagar en los fundamentos para el uso de un algoritmo y en el rol que se le daría en la clase a la calculadora, por lo que las preguntas tuvieron una intención particular.

Seguimos las tres fases que los autores describen para la investigación de diseño: 1) Fase de preparación del experimento, 2) Fase de experimentación y 3) Fase de análisis retrospectivo. Para desarrollar la primera fase, revisamos material correspondiente al logaritmo en base diez y organizamos el trabajo en tres actividades (A, B y C), estableciendo algunas preguntas guías para el trabajo.

La actividad A (figura 2) consistió en analizar tareas propuestas para el tratamiento del logaritmo en un texto de tercer año de secundaria relacionada con los terremotos, y en el programa de estudios del mismo nivel. Se les pide a los participantes que respondan sin utilizar la tecla “log” de la calculadora. La actividad B consistió en comprender un algoritmo para la obtención del logaritmo de 2022 en base diez (figura 3). La actividad C consistió en analizar las cuatro nociones básicas (Basic Model, BM) sobre logaritmo, presentadas en Weber (2016) (figura 4).

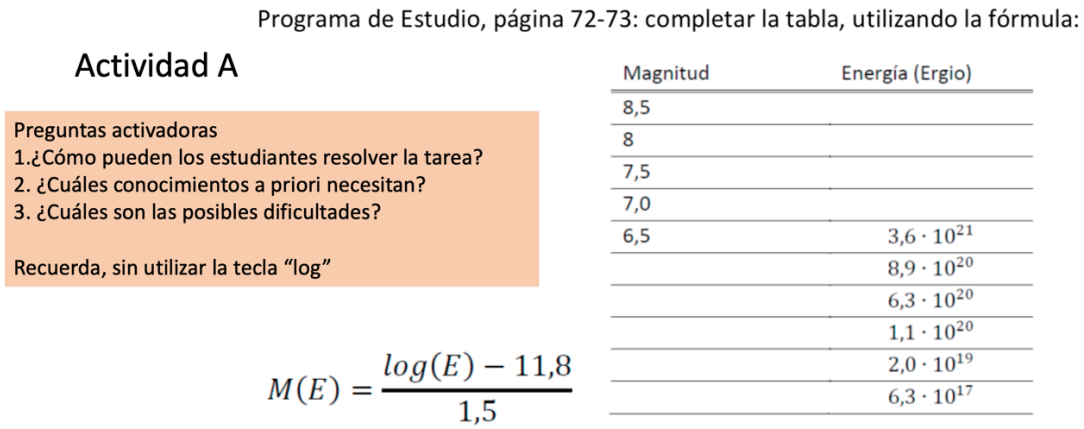


Figura 2: Parte de la actividad para el grupo A: Encontrar el valor del logaritmo sin usar la tecla “log”.

B- Algoritmo Nos inspiramos por Weber, C. (2019). Making Sense of Logarithms as Counting Divisions, *The Mathematics Teacher*, Vol. 112, No. 5, 374-380.

Algoritmo para calcular 4 decimales del logaritmo de 2022 :

L=0 ; *k*=0 ; *a*=2022

Repetir *5* veces :

n=(número de cifras de la parte entera de *a*)-1

L=*L*+*n*/10^*k*

a=(*a*/10^*n*)^10

k=*k*+1

Aplicación con calculadora (lo que aparece en la pantalla) :

2022/10^3
2,022
2,022^10
1142,38242
1142,38242/10^3
1,14238242
1,14238242^10
3,78542918
3,78542918/10^0
3,78542918
3,78542918^10
604159,008
604159,008/10^5
6,04159008
6,04159008^10
64790681,8
Conclusion : Log(2022)=3,3057 aproximación al cuarto decimal

Preguntas activadoras:

1. Calcular el 5to decimal del logaritmo de 2022 utilizando el algoritmo.
2. Justificar el algoritmo.

Completar el gráfico de la página 68 del Programa de Estudios (Mineduc, 2019) (**recuerda, sin utilizar la tecla "log"**).

Figura 3: Parte de la actividad para el grupo B: Comprensión de un algoritmo para el cálculo del logaritmo de 2022 en base diez.

C- Las 4 nociones básicas - Weber, C. (2016). Making Logarithms Accessible — Operational and Structural Basic Models for Logarithms, *Journal für Mathematik-Didaktik*, 2016, Vol. 37, Issue 1 Supplement, 69–98.

(BM1) The logarithm of a number b (to base a) indicates how often the base a fits into the number b as a factor. (Basic model of 'multiplicative fitting-into')

Ejemplo: $1024=4\times4\times4\times4\times4 \Rightarrow \text{Log}_4(1024)=5$

Because counting the factors is equal to counting the divisions by the factor, it can be slightly reformulated: The logarithm of a number b (to base a) indicates how often the number b has to be divided by the base a to produce 1. (Basic model of 'repeated division')

Ejemplo: $1024/4=256$, $256/4=64$, $64/4=16$, $16/4=4$ y $4/4=1 \Rightarrow \text{Log}_4(1024)=5$

(BM2) The (common) logarithm of a number b finds the number of digits of b, minus one. (Basic model of 'counting the number of digits')

Ejemplo: $\text{Log}_{10}(1000)=3$, $\text{Log}_{10}(31812)\approx4$

(BM3) The logarithm of an expression reduces multiplications and divisions to additions and subtractions, and it reduces powers and roots to multiplications and divisions. (Basic model of 'decreasing the hierarchy level'): $\Phi(x\cdot y) = \Phi(x) + \Phi(y),\ x > 0\ ,\ y > 0$ and therefore $\Phi(x^n) = n.\Phi(x)$

Ejemplos: $\text{Log}(2000)=\text{Log}(1000)+\text{Log}(2)$ y $\text{Log}(2048)=\text{Log}(2^{11})=11\text{Log}(2)$

(BM4) The logarithm of an expression (to base a) is the exponent by which the base a must be raised to yield the expression. (Basic model of 'inverse exponent'): $a^{\text{Log}_a b} = b$

Ejemplo: $5^3=125 \Leftrightarrow \text{Log}_5(125)=3$

They all support meaningful mathematical reasoning, because they have a certain explanatory power when it comes to argumentation or solutions to specific tasks.

They can therefore be structured as follows:

- On one hand, (BM1) and (BM2) refer to logarithms as numbers. (BM3), however, refers to logarithms as operators, while (BM4) refers to both numbers and operators.
- On the other hand, (BM1) is more closely related to the operational conception of logarithms (as they generate result), whereas (BM4) is more closely related to its structural conception (as it refers to another concept).
- The remaining two basic models, (BM2) and (BM3), can potentially be useful to bridge operational and structural conceptions of logarithms, emphasizing the effects of logarithms.

Preguntas activadoras:

1. Identificar los BM en el texto escolar y Programa de Estudio (Texto: 44-50. Programa: 67-74)
2. ¿Están articulados?

3. ¿Cómo se pueden extender las BM en los textos a todos los números reales?

Figura 4: Parte de la actividad para el grupo C: Identificar las BM en texto escolar y Programa de Estudio y discutir sobre su extensión a todos los números reales.

La fase 2 de la investigación de diseño se llevó a cabo en cinco sesiones: tres sesiones previas a la clase y dos sesiones posteriores a la clase. En la primera sesión participaron tríadas repartidas en diferentes grupos, quienes trabajaron con actividades distintas (un grupo trabajó con la actividad A, dos grupos trabajaron con la actividad B y otros dos grupos trabajaron con la actividad C). En las siguientes sesiones no hubo separación por grupos. Los investigadores asistieron a la clase que se implementó en el liceo por una de las profesoras guías, la cual fue videograbada. En las sesión posterior a la implementación, los participantes del taller observaron el video de la clase y reflexionaron sobre aspectos que les resultaron relevantes. En la última sesión del taller, los investigadores plantearon dos temas que identificaron como importantes de discutir: el uso de la calculadora y por qué enseñar el algoritmo.

La fase 3 de la investigación corresponde a un análisis retrospectivo que realizaron los investigadores posterior a la implementación. En este análisis establecieron temas y episodios en los vídeos que tuvieron relevancia en cuanto a la reflexión y a la bidireccionalidad de la colaboración entre los participantes.

Para los análisis, nos guiamos por Nechache y Gómez-Chacón (2022), y por Gómez-Chacón *et al.* (2016). En este último se consideran las interacciones y se identifica cómo estas van influyendo en la construcción del ETM. Los autores presentan una manera de relacionar metodológicamente la interacción –propia de ambientes de colaboración– y la componente afectiva, con el estudio del ETM. En esta investigación dejamos de lado la variable afectiva, por no ser parte de nuestro objetivo. En su lugar, identificamos si el conocimiento que se despliega es teórico o práctico, según Eraut (2003). Para los análisis adaptamos la tabla que proponen los autores sobre el razonamiento en zig-zag en las transiciones entre génesis y entre planos del ETM (p. 917). Para atender a la componente de colaboración, identificamos episodios en los vídeos de las sesiones donde se observaba la reflexión sobre algún asunto específico, los aportes de dos o más sujetos en esa reflexión, y la verbalización de algún conocimiento nuevo generado a partir del diálogo. Presentamos el análisis de resultados de acuerdo con cada episodio.

Resultados

Identificamos episodios en cada sesión, y seleccionamos cinco episodios en los que se observa interacción de los participantes, para identificar en ellos la activación de planos verticales, de manera de caracterizar la construcción de conocimiento en el trabajo matemático desarrollado. En este escrito, por asuntos de espacio, solo mostraremos tres episodios y solo un esquema (en el *Episodio 1*).

Episodio 1: Este episodio corresponde a una discusión sobre la actividad A, que se dio en un grupo compuesto por tres profesores en formación (PF), a quienes llamaremos Andrés, Beltrán y César. En el momento de la sesión los tres cursaban práctica intermedia (intervención de una unidad en el aula escolar). Se da el siguiente diálogo:

Andrés: Yo apliqué la fórmula y cuando despejé la E me quedó con una potencia, porque hay un logaritmo.

Beltrán: Ah, a mí me quedó lo mismo, eso, $3{,}6 \cdot 10^{24{,}55}$

César: Ya, pero y ¿qué es esa potencia? (señalando la potencia de $10^{24{,}55}$). El 24 lo puedo entender, pero ¿el coma 55?, ese no sé qué es.

Beltrán: A lo mejor es por el coma 6 que nos dio antes (haciendo referencia al resultado que era $3{,}6 \cdot 10^{24{,}55}$). 0,55 se aproxima a 0,6.

Andrés: Ya, pero ¿qué tiene que ver eso con el resultado de lo otro?, yo no creo que sea eso, pero no sé qué es. Lo que sí, el estudiante debe saber la relación entre logaritmo y exponencial. Ya, ¿y la otra?, ¿cómo calculamos el logaritmo de esos números?

César: Yo estuve intentando, pero no pude, no llegué a nada, no se me ocurre

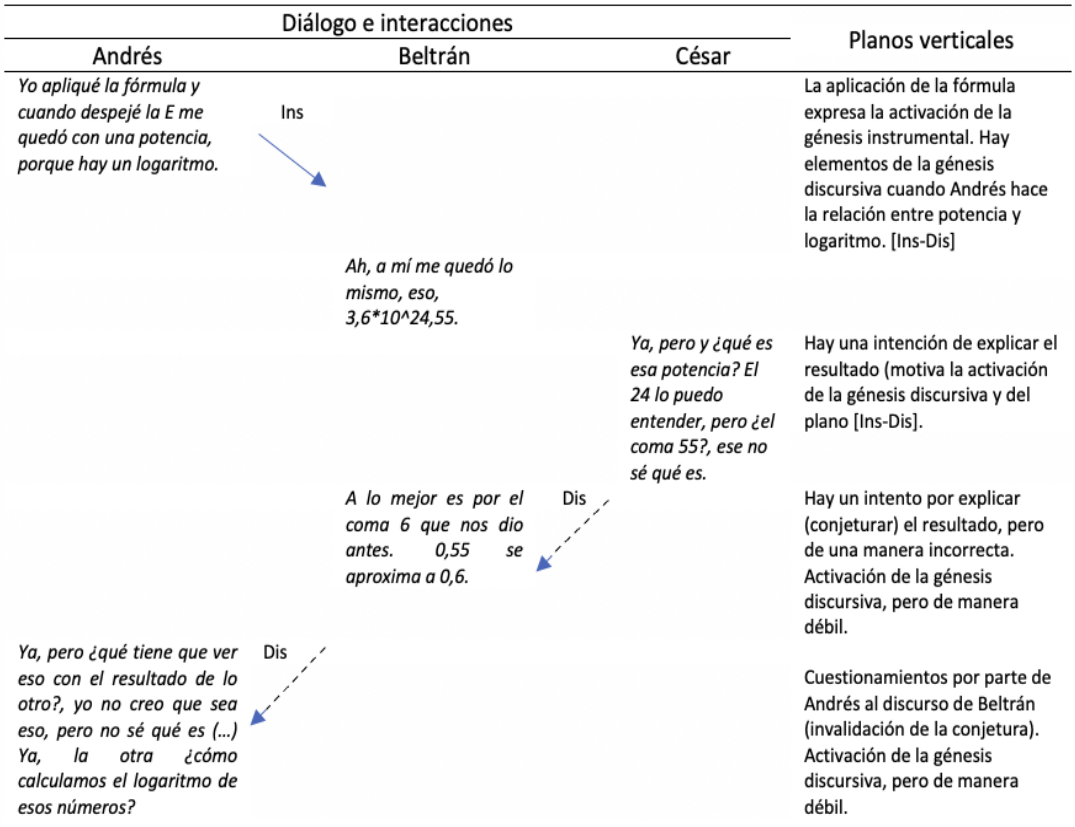


Figura 5: Esquema adaptado de Gómez-Chacón *et al.* (2016, p. 917) para estudiar las interacciones en el Episodio 1, y la activación de planos verticales de ETM personales en el trabajo colaborativo.

Como los PF buscaban resolver la tarea, lo que se puede observar es principalmente parte del ETM personal. Solo en una frase del diálogo podemos identificar parte del ETM idóneo (cuando Andrés afirma que "e*l estudiante debe saber la relación entre*

logaritmo y exponencial"). Para el análisis del ETM personal nos apoyamos en el esquema de la figura 5.

El esquema permite observar que existen tres activaciones en el ETM construido por los PF, motivados por la colaboración que se da entre ellos. La primera es la de la génesis instrumental acompañada de elementos discursivos, pues Andrés, además de aplicar la fórmula, justifica su resultado con el hecho de que el logaritmo en base diez es la inversa (en un sentido funcional) a la potencia de diez. Acá se observa el uso de un *conocimiento teórico*. La segunda activación es la de la génesis discursiva, pero de una manera muy débil y con errores. La activación de esta génesis es motivada por una pregunta que realiza César y que responde Beltrán. César intenta interpretar el exponente 24,55, y destaca que el 24 es posible de interpretar (se infiere que se refiere a que sabe lo que significa 10^24), mientras que César entrega una respuesta errada sobre la interpretación de la potencia 0,55. Andrés hace ver que la respuesta de César no es válida, por lo que identificamos una nueva activación de la génesis discursiva. Como no se entrega finalmente una explicación, esta génesis se presenta de manera débil. En todo el diálogo se puede identificar la activación del plano [Ins-Dis], donde se intenta interpretar el resultado después de aplicar una fórmula.

Episodio 3: Este episodio corresponde a la segunda sesión del taller, en la cual se comienza a planificar la clase. En este episodio intervienen cuatro PF –dos de ellos cursaban práctica inicial (Ana y Daniel) y dos práctica intermedia (Andrés y Carlos)– y la profesora supervisora (PS). Los participantes discuten acerca del uso del algoritmo en la clase, estableciéndose el siguiente diálogo:

Ana:	Queríamos ver cómo podríamos incluir lo del algoritmo, porque hay ciertas partes que no son muy intuitivas, como las de multiplicar por un uno conveniente.
Andrés:	Sí, de hecho van a aplicar un algoritmo sin saber lo que es un algoritmo. Por ejemplo, cuando dividen por diez, no va a saber por qué tiene que dividir por diez.
PS:	Es importante que lo grafiquen para que les haga sentido.
Daniel:	Lo que habíamos pensado es que nos gustaría que cada uno tenga un número propio, como su fecha de cumpleaños, que sea muy distinto uno con otro, y después lo grafique para que le dé sentido a la función logaritmo.
Carlos:	Pero ¿qué gano con graficar mi edad con el logaritmo? Tiene que ser una utilidad en el sentido de ganar algo.
PS:	En ese caso es mejor los sismos, porque el logaritmo tiene sentido en relación con qué tan fuerte se siente el terremoto.

Como se trata de un trabajo que tiene como objetivo la planificación de la clase, lo que se construye corresponde a una parte del ETM idóneo potencial de los profesores que participan. Para el análisis de este episodio, nos apoyamos en un esquema similar al de la Figura 3, donde notamos que existen dos interacciones desconectadas una con la

otra. En la primera interacción se discute sobre la necesidad de incluir el algoritmo en la clase y sobre los problemas para su comprensión por parte de los estudiantes del liceo, lo que es indicador de *conocimiento práctico*; Ana se refiere a la dificultad de multiplicar por un uno conveniente, pues califica esta acción como no intuitiva. Andrés apoya esta idea, pues para él, los estudiantes aplicarán un algoritmo sin saber qué es un algoritmo, refiriéndose al paso donde se debe dividir por diez. Esta interacción entre Ana y Andrés son también indicadores de *conocimiento práctico*. Ambos PF activan en este diálogo el plano vertical [Ins-Dis], pues discuten sobre los fundamentos del artefacto utilizado (el algoritmo) y sobre la validación de este, que darán frente a los estudiantes para su comprensión.

La segunda interacción permite que se active la génesis semiótica, pues se piensa en hacer una conversión del registro numeral (o algebraico) al registro gráfico. Luego se cuestiona el sentido que puede o no tener la gráfica del logaritmo de la fecha de cumpleaños, profundizando aún más en la visualización y la génesis semiótica. Hallamos también elementos discursivos conectados cuando PS señala que un mejor ejemplo es el de los sismos, pues el logaritmo tendrá relación con qué tan fuerte es el movimiento telúrico, y en esta parte se puede notar una articulación entre *conocimiento teórico* y *conocimiento práctico*. En términos del ETM, identificamos en esta interacción la activación del plano vertical [Sem-Dis].

Episodio 4: Este episodio corresponde a un diálogo que se dio en la última sesión del taller. Los participantes ya habían observado el vídeo de la clase implementada en el liceo, y los investigadores plantearon como tema de discusión el uso de la calculadora, dándose el siguiente diálogo:

Andrés: Veo a la calculadora como una herramienta que nos permite hacer procesos que nosotros ya deberíamos saber, pero si estoy abriendo un nuevo conocimiento, no usaría la calculadora porque no voy a entender lo que está pasando.

Daniel: Nos podríamos haber emancipado más de la calculadora de lo que lo hicimos, tipo dejar los cálculos que sabíamos que iban a hacer, escritos, por ejemplo 2^10…es contradictorio que les digamos que no usen la calculadora pero igual les dejemos usarla para algunos cálculos.

Ana: En la planificación no hablamos mucho del uso de la calculadora para la clase, pero era necesario plantear ese tema, porque hay un cambio de discurso.

En esta parte se comienza a identificar más conocimiento práctico puesto en juego, cuando se habla del doble discurso de utilizar, para ciertas ocasiones, calculadora, y no utilizarla en otras. Se le da un sentido al uso del instrumento, y se establece una condición para la utilización de ciertas teclas. Esto indica la activación de las génesis instrumental y discursiva de manera articulada, por lo que identificamos al plano [Ins-Dis] en el diálogo. Es importante destacar la reflexión acerca del potencial de entender el algoritmo para el cálculo del logaritmo, usando un conocimiento ya adquirido por

los estudiantes, que es el de potencia. Esto pone en evidencia la discusión sobre los distintos niveles que toma el artefacto calculadora cuando se pone en uso.

CONCLUSIONES

La investigación que presentamos nos mostró que los espacios de colaboración entre profesores con distintos roles posibilita el despliegue de conocimientos teóricos y prácticos y su articulación. Lo anterior, a su vez contribuye al desarrollo de un ETM idóneo enriquecido, pudiendo identificar la activación de los distintos planos verticales. Se reveló la importancia de que todos los participantes del estudio trabajen con un objetivo común, pues esto permitió disminuir el carácter jerárquico del que enseña, del que tiene mayor experiencia en el aula escolar, y del que está en proceso de formación. Esto permitió identificar mayor sinergia en la discusión por grupo.

El tema tratado (logaritmos en base diez) permitió poner en uso el artefacto *calculadora* (sin utilizar la tecla "*log*"), y así darle mayor sentido en el trabajo matemático de los estudiantes en el liceo, activando y articulando fuertemente las génesis instrumental y discursiva. En el trabajo se pudo evidenciar los distintos niveles que puede alcanzar el artefacto calculadora quitando la tecla "*log*", y que los participantes fueron conscientes de ello.

AGRADECIMIENTOS

Agradecimientos al proyecto FONDECYT de Iniciación Nº11240839.

REFERENCIAS

Coutat, S., & Richard, P. (2011). Les figures dynamiques dans un espace de travail mathématique pour l'apprentissage des propriétés géométriques. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, *16*, 97-126.

Crecci, V. y Fiorentini, D. (2018). Reverberations of learning by Math teachers in a borderland community between university-school. *Educar EM Revista, 34*(70), 273-292. http://dx.doi.org/10.1590/0104-4060.57781

Elbaz, F. (1981). The teacher's "practical knowledge": Report of a case study. *Curriculum Inquiry, 11*(1), 43-71. https://doi.org/10.2307/1179510

Eraut, M. (2003). The many meanings of theory and practice. *Learning in Health and Social Care, 2* (2), 60-65. 10.1046/j.1473-6861.2003.00045.x

Gómez-Chacón, I. M., Romero, I. M., & Garcia, M. M. (2016b). Zig-zagging in geometrical reasoning in technological collaborative environments: A mathematical working space-framed study concerning cognition and affect. *ZDM Mathematics Education, 48*(6), 909-924. https:// doi.org/10.1007/s11858-016-0755-2

Gravemeijer, K. y Cobb, P. (2006). Design research from a learning design perspective. In: Van den Akker, J., Gravemeijer, K, McKenney, S. & Nieveen, N. (Eds). (2006), *Educational design research*. London: Routledge, 17-51.

Henríquez-Rivas, C., Kuzniak, A. y Masselin, B. (2022). The idoine or suitable MWS as an essential transitional stage between personal and referencie Mathematical Work. In Kuzniak, A., Montoya-Delgadillo, E. & Richard, Ph. (Eds.), *Mathematical Work in educational context. The perspective of the theory of Mathematical Working Spaces*. (pp. 121-147). Cham, Switzerland: Springer Nature.

Kuzniak, A. (2022). The Theory of Mathematical Working Spaces–Theorical Characteristics. In Kuzniak, A., Montoya-Delgadillo, E. & Richard, Ph. (Eds.), *Mathematical Work in educational context. The perspective of the theory of Mathematical Working Spaces*. (pp. 3-31). Cham, Switzerland: Springer Nature.

Nechache, A. y Gómez-Chacón, I. (2022). Methodological aspect in the theory of Mathematical Working Spaces. In Kuzniak, A., Montoya-Delgadillo, E. & Richard, Ph. (Eds.), *Mathematical Work in educational context. The perspective of the theory of Mathematical Working Spaces*. (pp. 73-90). Cham, Switzerland: Springer Nature.

Potari, D. (2021). Mathematics teacher professional learning and teacher education practices. *Journal of Mathematics Teacher Education, 24*(3), 227-230. http://dx.doi.org/10.1007/s10857-021-09501-8

Weber, C. (2016). Making Logarithms Accesible – Operational and Structural Basic Models for Logarithms, *Journal für Mathematik–Didaktik, 37*(1), 69-98.

Weber, C. (2019). Making Sense of Logarithms as Counting Divisions, *The Mathematics Teacher, 112*(5), 374-380.

TRAVAIL MATHÉMATIQUE DES ÉLÈVES ET DÉVELOPPEMENT DE CONNAISSANCES DIDACTIQUES DE PROFESSEURS DE MATHÉMATIQUES DÉBUTANTS

Christine Choquet

CREN – INSPÉ Nantes Université

Cette communication s'est inscrite dans le thème 3 du colloque : elle interroge le développement de connaissances didactiques chez des professeurs de mathématiques débutants, lors de leur formation initiale, en appui sur des analyses du développement du travail mathématique d'élèves de cycle 4 (Elèves de 11-14 ans, en France). Elle vise à partager des questions et des résultats de recherche sur la formation initiale des professeurs de mathématiques, à partir de l'étude d'une situation de formation élaborée afin de mettre en jeu simultanément des éléments théoriques issus de la recherche en didactique des mathématiques et des éléments issus de la pratique de ces professeurs débutants associés au développement du travail mathématique des élèves.

LE CADRE DE L'APPRENTISSAGE PAR PROBLEMATISATION

Notre recherche se situe dans le Cadre de l'Apprentissage par Problématisation (CAP) (Fabre & Orange, 1997 ; Orange, 2012 ; Hersant, 2022) et mobilise, dans le cadre de nos analyses, des éléments du cadre des Espaces de Travail Mathématique (ETM) (Kuzniak, 2006). Nous revenons ici sur certains des aspects théoriques du CAP et sur la manière dont nous analysons le processus de problématisation, notamment en faisant référence aux réflexions menées dans le thème 1 et aux questions posées lors du colloque ETM7 (Choquet *et al.*, 2023). Dans le CAP, le travail mathématique de l'élève est étudié en tant que processus, il est associé aussi bien à la résolution du problème par l'élève qu'à sa construction (à savoir, comment l'élève pose et élabore le problème ou des sous-problèmes lui permettant de cheminer vers la résolution et des solutions). Afin de rendre compte de l'activité mathématique des élèves, des espaces de contraintes peuvent être élaborés (Orange, 2012). Ils sont constitués de trois registres : 1/ le registre empirique « des faits provenant d'observations ou expériences » (ces faits sont construits) ; 2/ le registre des modèles (ou des nécessités) i.e. « des explications construites pour rendre compte des faits jugés pertinents pour le problème travaillé » (Orange, 2012, p. 24) ; 3/ le registre explicatif (REX) qui correspond aux présupposés considérés comme allant de soi, non remis en cause, permettant de générer les explications.

LE CADRE DE LA PROBLEMATISATION EN FORMATION INITIALE

Dans le cadre de l'apprentissage par problématisation, la pratique enseignante peut être envisagée comme la solution retenue à un problème professionnel. (Fabre, 2006, Ouitre, Lebouvier & Musquer, 2022) En partant de ce postulat, nous avons construit plusieurs scénarios de formation initiale à destination des étudiant.es en première ou

deuxième année de Master MEEF[36] Parcours Mathématiques. Plusieurs objectifs sont fixés par le formateur, dans le cadre d'une formation à et par la recherche en didactique des mathématiques :

- Repérer et analyser l'activité mathématique des élèves
- Faire découvrir aux étudiant.es différents cadres théoriques

Si on se place dans le CAP, l'enjeu premier est de faire identifier par les étudiant.es des sous-problèmes associés aux pratiques enseignantes et de cheminer avec eux vers des solutions, tout en mettant au jour les raisons des choix retenus par les étudiant.es dans les séances construites et menées ainsi que la manière dont ils questionnent ou non les raisons de ces choix.

QUESTION DU DEVELOPPEMENT DU TRAVAIL MATHEMATIQUE DANS LA CONCEPTION ET LA MISE EN ŒUVRE DE SON ENSEIGNEMENT CHEZ DES PROFESSEURS DEBUTANTS

Le CAP est un cadre qui permet l'analyse de l'activité mathématique des élèves. Il peut également participer à la conception de séances dans le but de déclencher chez des élèves l'apprentissage de connaissances mathématiques (Grau *et al.*, 2023). C'est dans cette optique que les modalités de formation que nous étudions sont conçues par le formateur : il s'agit de problématiser le savoir visé dans la conception d'une séance. Les modalités de formation reposent sur l'élaboration de séances lors de la formation, au sein du collectif d'étudiant.es. Cette élaboration est directement associée à des apports théoriques du formateur, lors des différents temps de formation. Ces apports ont pour enjeu de permettre aux étudiant.es de problématiser le savoir visé et ainsi de dégager des nécessités à construire par les élèves. Une fois élaborée, quelques étudiant.es mettent en œuvre ces séances dans des classes lors de leurs différents stages, en responsabilité ou en pratique accompagnée. Ce travail mené en formation initiale insiste notamment sur la place de la résolution de problèmes dans les apprentissages des élèves et sur le repérage du travail mathématique des élèves. Il permet donc de questionner avec les professeurs débutants le développement du travail mathématique des élèves à travers la conception, la mise en œuvre de séances et des analyses *a posteriori* de séances.

PRESENTATION DES MODALITES DE FORMATION DONT EST EXTRAIT NOTRE CORPUS

Les deux exemples que nous mobilisons ici s'appuient sur l'étude de temps de formation initiale avec des étudiant.es de M1 (Première année de Master MEEF Parcours mathématiques).

Lors de leur formation *à et par la recherche*, ainsi que dans le module *didactique des mathématiques,* les étudiant.es sont confrontés à l'étude de plusieurs cadres théoriques,

[36] Métiers de l'Enseignement, de l'Education et de la Formation

à travers l'étude d'extraits d'articles de recherche et d'exemples de travaux menés dans ces différents cadres théoriques. Parallèlement à ce travail, ils ont à élaborer collectivement des séances, en lien avec les questions qui sont apparues lors des cours, des séances que certains d'entre eux mettront en œuvre afin de recueillir des productions d'élèves. Le travail en formation continuera sur l'analyse des productions des élèves au regard des cadres théoriques proposés.

Le temps de formation se découpe donc en trois temps :

Lors du 1er temps, les étudiant.es construisent des situations d'enseignement adaptées à leur classe de stage, dans le but de les mettre en œuvre de leur stage en pratique accompagnée. Ils rédigent une analyse *a priori* en repérant les savoirs mathématiques en jeu, les différentes procédures possibles des élèves. Ils s'appuient pour cela sur tous les cadres théoriques d'analyse qu'ils ont découverts lors de leur formation, en particulier le CAP et les ETM.

Le 2ème temps correspond au stage et aux choix du formateur parmi les données recueillies lors du stage : il s'agit des documents de préparation, du déroulé de la séance et des productions d'élèves fournis par les étudiant.es ayant expérimenté la séance dans leur classe de stage.

Le 3ème temps est le retour en formation initiale, et l'analyse fine, par groupes d'étudiant.es des activités des élèves dans les cadres proposés, le CAP et les ETM dans nos deux exemples proposés ici.

Figure 1 : Analyse lors du 3ème temps de formation en appui sur les cadres théoriques étudiés.

Pour notre recherche, nous recueillons tous les documents produits par les étudiant.es lors des temps de formation (documents de préparations de séances, brouillons d'analyse de l'activité des élèves, rédaction de synthèse, etc.). Nous comptons également sur une visite du formateur pendant leur stage, un entretien post-visite et sur des extraits vidéo ou audio recueillis lors des séances.

Exemple 1

La première séance a été présentée lors du colloque ETM7 (2022) : elle est dédiée à l'étude en classe d'un problème ouvert mobilisant la notion d'angle en classe de 4e (12-13 ans).

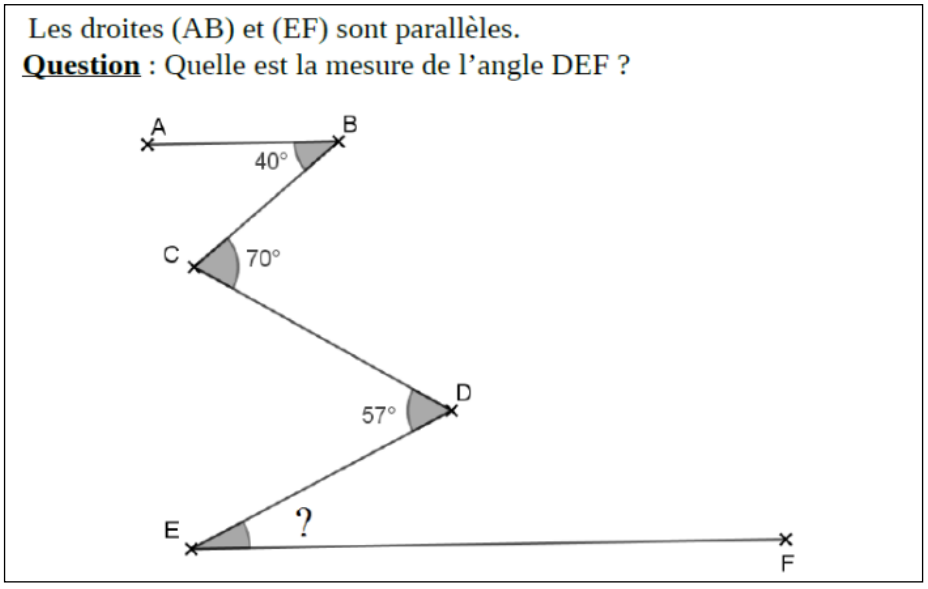


Figure 2 : Énoncé « Les angles » proposé aux élèves de 4e.

S'appuyant sur la figure qu'ils vont compléter, les groupes raisonnent sur des propriétés des angles différentes (angles alternes-internes, correspondants, opposés par le sommet, mesures des angles dans un triangle). L'enseignant conclut la séance sur ces différentes propriétés qui ont émergé.

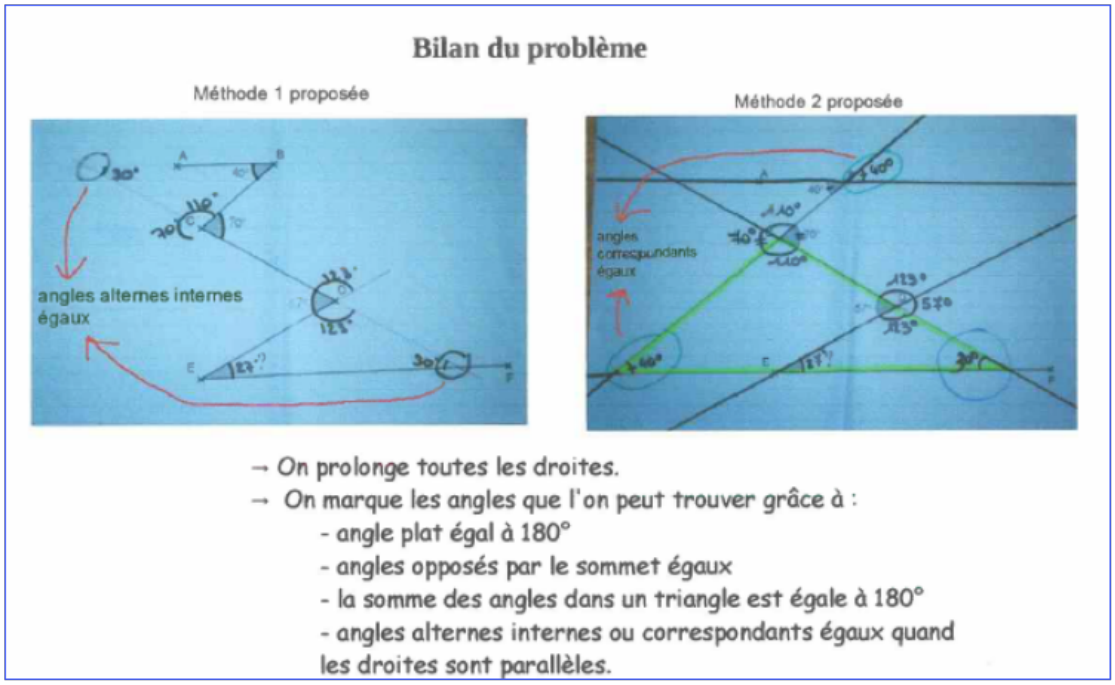


Figure 3 : Synthèse de l'enseignant proposé aux élèves.

Lors du 1er temps de formation, les étudiant.es analysent *a priori* l'énoncé et préparent la séance, se basant sur les questions posées par l'analyse *a priori* : Quelles adaptations de leurs connaissances (Robert, 2008), les élèves, vont-ils être amenés à faire avec cet énoncé ? Est-il nécessaire d'introduire des intermédiaires dans la résolution du problème ? La recherche d'une solution s'appuie-t-elle sur des changements de registres, de cadres ? Etc. Après la mise en œuvre en classe et le recueil de données issues des séances (qui participe au 2ème temps de formation), les étudiant.es, lors du 3ème temps de formation sont amenés à élaborer des espaces de contraintes (EC) (Orange, 2012), par groupes et à justifier et comparer leurs EC. C'est bien ce travail d'échanges et de comparaisons qui va les amener à hiérarchiser les différentes productions des élèves et à engager une analyse fine de l'activité des élèves, au-delà du simple repérage de leurs erreurs (Cf. Annexe 1).

Ils vont ainsi mettre au jour tous les raisonnements convoqués par les élèves, mettant en jeu ce que l'enseignant, lors de la séance, n'avait pas repéré. C'est lors de l'analyse en cours, avec les autres étudiant.es qu'apparait un décalage fort entre la trace écrite proposée comme étant le bilan et ce qu'ont produit les élèves. Par suite, ils vont remettre au travail la synthèse proposée par cet enseignant et réfléchir à une synthèse adossée aux raisonnements des élèves, en s'inspirant de leurs EC et en référence aux connaissances qu'ils ont acquises sur l'enseignement de la géométrie au collège (Géométrie dessinée/Géométrie abstraite et relations GI/GII [Houdement & Kuzniak, 2006]).

Exemple 2

Après le travail sur l'exemple 1, le deuxième exemple s'adosse également à une réflexion sur l'enseignement de la géométrie au collège. L'enjeu pour le formateur est d'amener les étudiant.es à questionner la place du vocabulaire de géométrie dans les travaux des élèves et la place à donner dans son enseignement à l'apprentissage de ce vocabulaire adapté.

Auparavant, les étudiant.es ont travaillé le cadre des ETM pendant des cours de didactique des mathématiques. Avec ce 2ème exemple, le but du formateur est de les amener à repérer et comprendre le travail mathématique des élèves, en construisant et manipulant différents ETM.

Lors du 1er temps de formation, les étudiant.es vont rédiger plusieurs énoncés liés à des programmes de construction. Pour cela, ils vont s'inspirer d'un document rédigé par l'IREM de Rennes[37] et un des étudiants va choisir de mettre en œuvre certains de ces programmes de construction dans une classe de 5e (11-12 ans), lors de son stage en pratique accompagnée. La séance vise la réalisation de figures à partir de différents programmes de construction. Les productions des élèves sont individuelles même si des échanges ont lieu dans des groupes entre les élèves. L'enseignant conclut la séance

[37] IREM de Rennes (1992). Lire et écrire des textes mathématiques.

sur l'identification de difficultés liées au vocabulaire de géométrie et aux techniques de construction.

Trace un segment [AC] de 8 cm. I est le milieu du segment.
Trace une droite (d) passant par I.
Place un point B sur la droite (d) tel que le segment [AB] mesure 7 cm.
Trace le triangle ABC.
Place le point J symétrique de I par rapport à [BC].
Trace l'arc de cercle de centre B et de rayon [BJ]. K est le point d'intersection de l'arc de cercle et du segment [AB].
Trace la perpendiculaire à (d) passant par J.

Figure 4 : Exemple d'un énoncé proposé aux élèves de 5e.

Il recueille les productions des élèves et enregistre les échanges dans les groupes. Lors du 3è temps de formation, les étudiant.es vont d'abord repérer les erreurs des élèves puis hiérarchiser les productions des élèves selon les procédures de résolution mobilisées. En établissant des liens entre cette analyse hiérarchisée des productions et la transcription des extraits audio des interactions entre les élèves dans les groupes, les étudiant.es vont élaborer des Espaces de Travail Géométrique (Kuzniak, 2006) pour chacun des groupes (Cf. Annexe 2) et ainsi proposer une caractérisation des différentes genèses instrumentale, sémantique et discursive.

Cette réflexion sur l'élaboration de différents ETG va mettre en exergue l'activité des élèves dans le cadre de ce programme de construction. Elle va surtout amener les étudiant.es à pointer et interpréter les erreurs ou difficultés des élèves. Les étudiant.es ont ainsi pris conscience du travail nécessaire à mener avec des élèves de cet âge sur le vocabulaire, adossé aux différentes genèses qu'ils ont identifiées, avant et lors d'une entrée dans une géométrie abstraite.

ANALYSE DU TRAVAIL MATHEMATIQUE ET DEVELOPPEMENT DE CONNAISSANCES DIDACTIQUES EN FORMATION INITIALE

En appui sur certaines des séances mises en œuvre par quelques professeurs débutants, choisies par le formateur, et au regard d'éléments issus de cadres théoriques de recherche en didactique des mathématiques, les analyses menées en formation permettent donc d'interroger le travail mathématique des élèves et de réfléchir en termes d'alternatives dans la conception et la mise en œuvre des séances analysées tout en permettant l'acquisition de connaissances didactiques.

Nous étudions leurs travaux d'analyse et les conclusions énoncées par les étudiant.es. L'analyse dans le cas de l'exemple 1 de formation a été menée dans le CAP, en termes d'*espace de contraintes (EC)*, en appui sur différents registres -*empirique, des nécessités à l'intérieur des modèles et explicatif*- (Orange, 2012 ; Choquet *et al.*, 2023). Cet EC met en évidence la construction de sous-problèmes dans la classe et les

différents raisonnements des élèves. L'analyse amène à réinterroger la mise en commun menée par le professeur en fin de séance, essentiellement centrée sur les propriétés repérées et le processus d'institutionnalisation ainsi engagé ne permettant pas de revenir sur les raisonnements des élèves. L'analyse des productions des élèves issues de l'exemple 2 a été menée en mobilisant des éléments des ETM, en termes de genèses sémiotique, instrumentale et discursive. Elle permet aux étudiant.es de repérer et d'analyser finement les difficultés des élèves (notamment en faisant des liens entre leurs productions et les interactions dans chaque groupe). L'analyse dans ce cadre conduit ainsi à identifier le travail mathématique (géométrique) en développement dans la classe, en repérant les différentes genèses. Ce repérage des différentes genèses, dans ce 3è temps de formation, permet aux étudiant.es de problématiser le savoir visé pour la classe. Il constitue un élément de savoir nouveau de la formation, sur lequel ils pourraient s'appuyer pour élaborer d'autres séances de géométrie.

Notre but est de comprendre comment la formation initiale va permettre d'interroger les pratiques enseignantes avec des étudiant.es – professeurs débutants, tout en leur permettant d'acquérir des connaissances didactiques. Ce travail repose ici, lors des 3 temps de formation, sur des choix faits par le formateur. Ces choix ne sont pas anodins et doivent être pris en compte dans la réflexion sur les conditions de possibilités d'un développement de connaissances didactiques chez des étudiant.es. Nous avons, dans une recherche précédente, mis en évidence des effets des choix des formateurs sur la pratique des débutant.es (Choquet, 2022). Notre caractérisation d'effets (direct, perturbant et réflexif) sur les pratiques des choix faits lors d'une formation est sans doute à compléter mais elle permet d'identifier des liens entre la formation proposée et les pratiques. Ces trois effets ne sont pas attendus ou visés par la formation mais sont un moyen pour le chercheur de caractériser l'effet d'une formation sur les pratiques (ici des débutants). Dans le cas des deux exemples proposés, un premier effet direct de la formation est repérable chez l'étudiant mettant en œuvre la séance élaborée en formation et appliquant finalement ce qui a été produit en formation car en accord avec ses propres représentations de la séance et de l'activité mathématique des élèves prévue. Un deuxième effet, réflexif cette fois, est ensuite repérable lors du 3è temps de formation quand les outils issus des cadres théoriques, mobilisés et imposés par le formateur, viennent interroger le travail mathématique des élèves. C'est, nous semble-t-il, à la condition d'un effet réflexif que les étudiant.es prendront pleinement conscience du travail mathématique des élèves et réinterrogerons leurs pratiques.

BIBLIOGRAPHIE

Choquet, C. (2022). Comprendre les effets des choix de formateurs sur les pratiques de professeurs de mathématiques débutants. *Annales de didactique et de sciences cognitives. Les Annales thématiques*, 1, 287-313. Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques (IREM) de Strasbourg.

Choquet, C., Grau, S., Hersant, M., Legrand, J.-M., Zebiche, N. (2023). Le travail mathématique à l'aune du cadre de l'apprentissage par problématisation : travail

mathématique et processus de problématisation chez les élèves. Dans C. Derouet, A. Nechache, P.R. Richard, L. Vivier, I.M. Gómez-Chacón, A. Kuzniak, M. Maschietto & E. Montoya Delgadillo, *Actes du septième symposium d'Étude sur le Travail Mathématique* (131-142). IREM de Strasbourg.

Fabre, M. (2006). *Situations de formation et problématisation*. De Boeck supérieur.

Fabre, M., & Orange, C. (1997). Construction des problèmes et franchissement des obstacles. *ASTER*, 24, 37-57.

Grau, S., Choquet, C., Hersant, M., Legrand, J.-M., Zebiche, N. (2023). Conception de situations et conditions pour la construction de nécessités dans le CAP. Dans C. Derouet, A. Nechache, P.R. Richard, L. Vivier, I.M. Gómez-Chacón, A. Kuzniak, M. Maschietto & E. Montoya Delgadillo, *Actes du septième symposium d'Étude sur le Travail Mathématique* (143-154). IREM de Strasbourg.

Hersant, M. (2022). Usages et apports du cadre de la problématisation à la didactique des mathématiques. In *Le cadre de l'apprentissage par problématisation. Apports aux recherches en didactiques*. (Doussot S., Hersant M., Lhoste Y., Orange-Ravachol D.). Presses Universitaires de Rennes.

Houdement, C., Kuzniak, A. (2006). Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie. *Annales de Didactiques et de Sciences Cognitives*, 11, 175-193. Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques (IREM) de Paris.

Kuzniak, A. (2006). Paradigmes et espaces de travail géométriques. Eléments d'un cadre théorique pour l'enseignement et la formation des enseignants en géométrie. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*. Vol. 6, 2. 167-187.

Orange, C. (2012). *Enseigner les sciences : Problèmes, débats et savoirs scientifiques en classe*. De Boeck.

Ouitre, F., Lebouvier, B., & Musquer, A. (2022). Problématisation et analyse de pratique professionnelle didactique. Quelle contribution spécifique pour la formation ? In S. Doussot, M. Hersant, Y. Lhoste, & D. Orange Ravachol, *Le cadre de l'apprentissage par problématisation* (Presses Universitaires de Rennes, p. 165-180).

ANNEXE 1

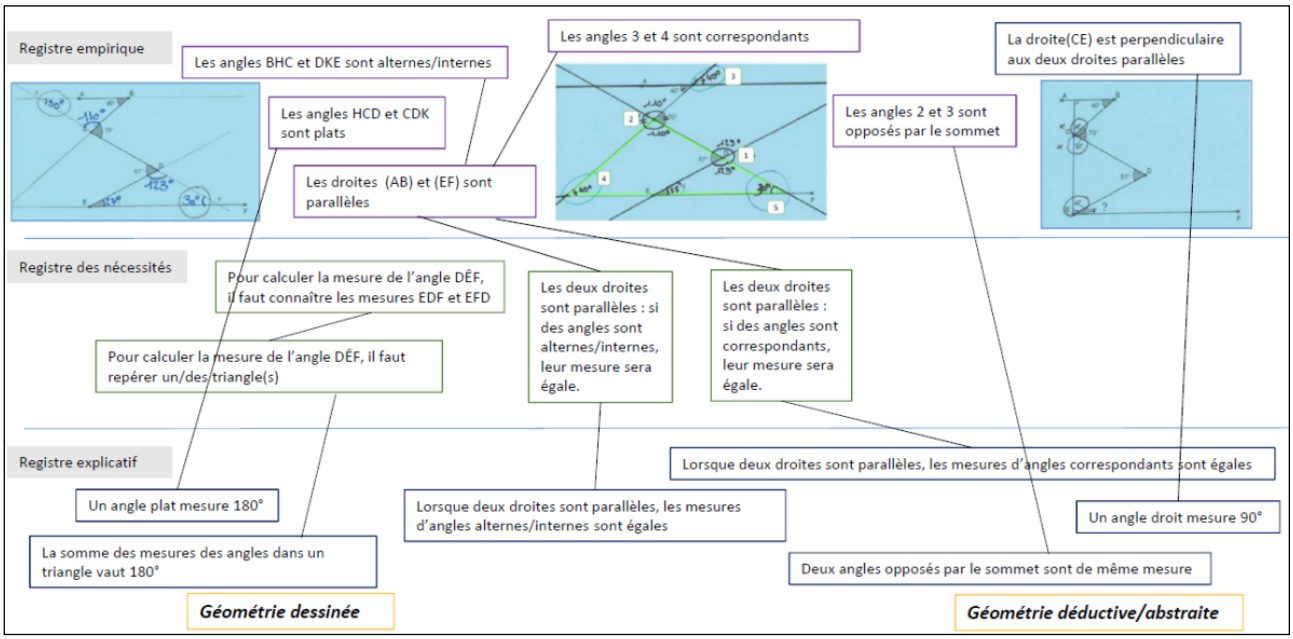


Figure 5 : Exemple d'un EC proposé après le 3ème temps de formation.

ANNEXE 2

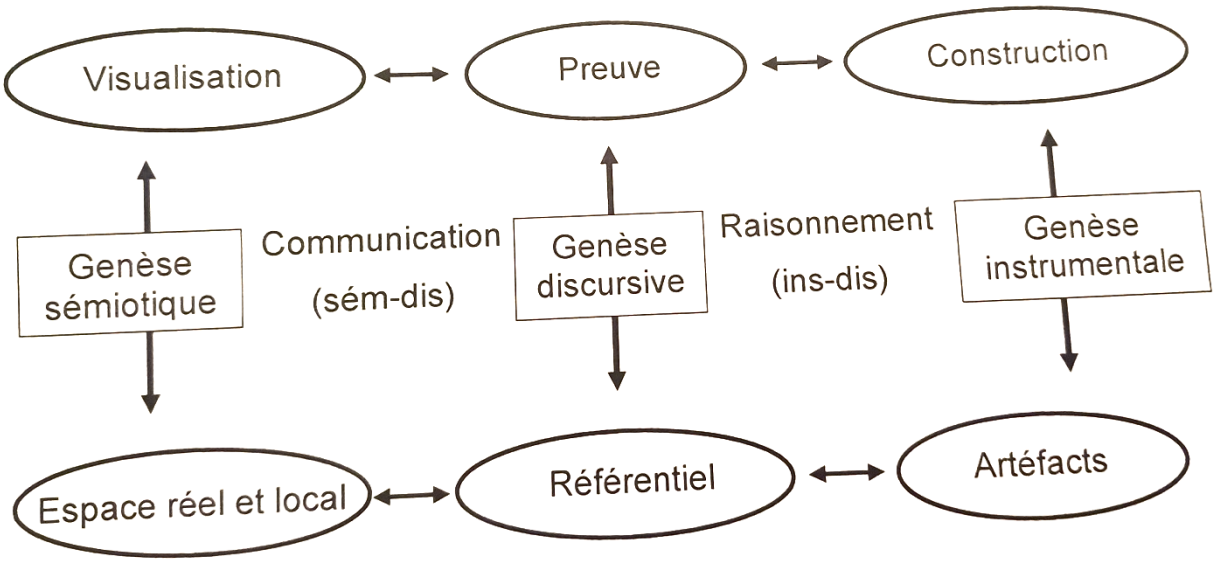


Figure 6 : Schéma proposé par un étudiant d'un ETG autour de la genèse discursive.

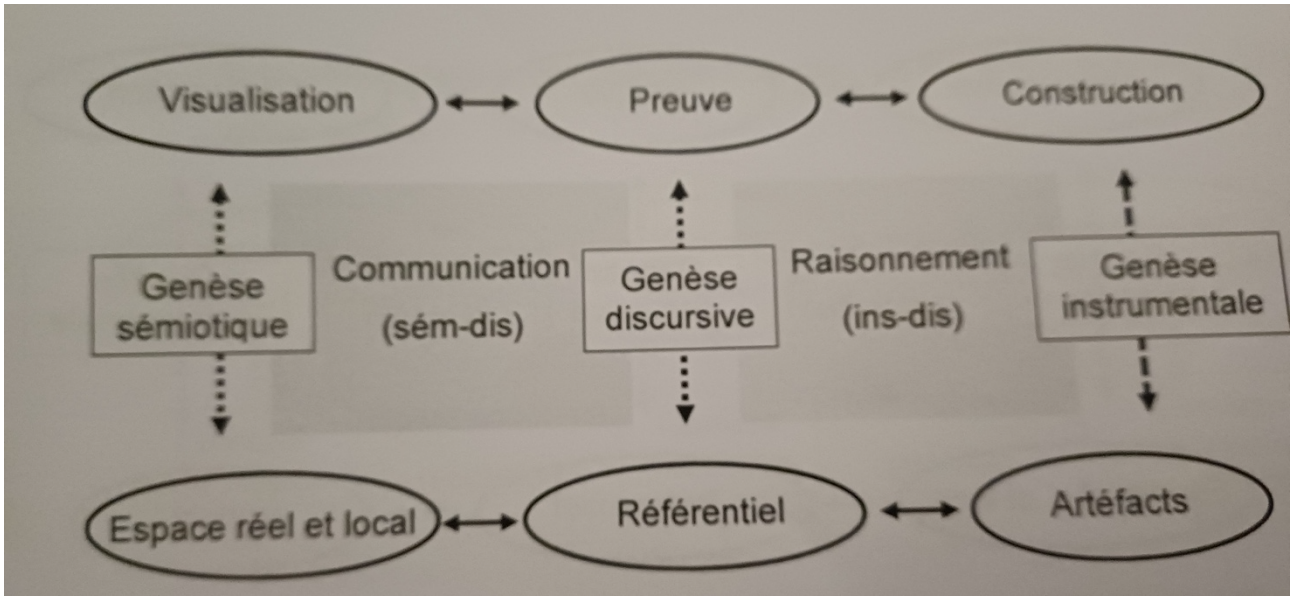


Figure 7 : Schéma proposé par un étudiant d'un ETG réduit avec les genèses discursive et sémiotique fragiles et une genèse instrumentale activée.

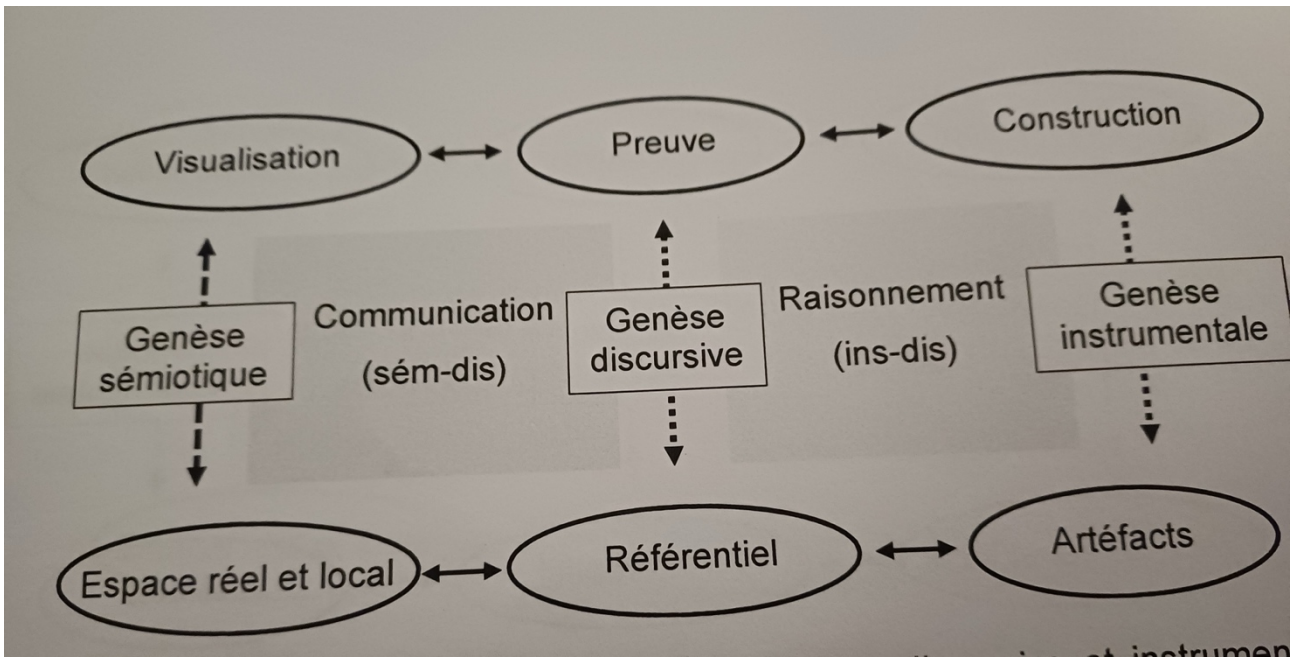


Figure 8 : Schéma proposé par un étudiant d'un ETG réduit avec les genèses discursive et instrumentale fragile et une genèse sémiotique activée.

EXAMINATION OF MATHEMATICAL WORK PERFORMED IN MATHEMATICAL MODELING TASK IN THE LIGHT OF MWS: THE CASE OF PRE-SERVICE ELEMENTARY MATHEMATICS TEACHERS

Ozan Deniz Kiyici, Filiz Tuba Dikkartin Övez

Balikesir University, Necatibey Faculty of Education, Türkiye

This study examined the mathematical works of pre-service elementary mathematics teachers in problem situations involving mathematical modelling activities, as through the lens of the theory of Mathematical Working Spaces. The qualitative case study design was employed with 15 pre-service elementary mathematics teachers who were selected using criterion sampling. The data obtained through guided exploratory questions presented with the problem situation were analyzed descriptively and interpreted in the light of the components of the Mathematical Working Spaces theory.
Keywords: Mathematical Working Spaces, modelling task, mathematical modelling

INTRODUCTION

Mathematical literacy is a critical skill for enabling individuals to understand the role of mathematics in daily life, address real-world challenges, and engage in meaningful reasoning (Altun, 2020; Ministry of National Education [MoNE], 2023). Despite some improvement in Turkish students' performance in international assessments such as Program for International Student Assessment (PISA), nearly half continue to perform at lower levels (MoNE, 2023). Mathematical literacy skills are a specific objective in the Turkish Mathematics Curriculum (MoNE, 2018). This highlights the need for instructional approaches that connect mathematics with authentic problem contexts.

Mathematical modelling, which establishes a link between reality and mathematics, is considered as a cyclical process of reaching a mathematical result and interpreting the result in the context of mathematics and real life (Lesh & Doerr, 2003). In this cycle, students define, mathematize, solve, and interpret real-world problems. Recent studies emphasize not only the use of mathematical representations and models but also the role of technology in supporting modelling processes (Hall & Lingefjard, 2016).

The theory of Mathematical Working Spaces (MWS) offers a powerful lens to analyze mathematical work by bridging epistemological and cognitive dimensions (Kuzniak, 2014). Its application to modelling tasks allows a deeper understanding of how individuals interact with representations, tools, and theoretical knowledge during problem solving (Kuzniak *et al.*, 2016; Montoya Delgadillo *et al.*, 2017). However, research shows that pre-service mathematics teachers face considerable difficulties when integrating modelling into practice (Hidayat & Iksan, 2018; Korkmaz, 2010; Paolucci & Wessels, 2017). To better understand these difficulties, scholarly publications have emerged that explore how modelling emerges through the lens of MWS theory (Derouet, 2019; Derouet *et al.*, 2017; Frejd & Bergsten, 2018; Lagrange, 2021; Nechache, 2018).

It is hypothesized that the reasons for the difficulties experienced in the process can be determined by explaining the actions of pre-service teachers during problem solving involving mathematical modelling activity. In this respect, this study aims to investigate the actions of pre-service elementary teachers during the modelling process, using the MWS framework. In line with this purpose, the research question is: What kind of interactions occur between the components of MWS during pre-service elementary mathematics teachers' mathematical modelling processes?

METHOD

In this research, a qualitative case study design was employed to explore the actions of pre-service elementary mathematics teachers during a mathematical modelling task. This design was chosen for its capacity to provide an in-depth examination, contextualized understanding of complex teaching and learning phenomena (Creswell, 2013). The case study, framed within the MWS theory, allowed the researchers to trace participants' cognitive and epistemological aspects by focusing on a single modelling activity in a natural educational setting. Multiple data sources were used to ensure a rich and triangulated representation of participants' mathematical work.

Study Group

The study group for the research was determined by criterion sampling, which is one of the purposeful sampling methods that allows in-depth analysis by selecting varied situations. Criterion sampling involves selecting participants who meet specific predefined criteria relevant to the focus of the study (Büyüköztürk *et al.*, 2008). The selection criteria for the study group were met by pre-service teachers who had successfully completed a course involving mathematical modelling. It was anticipated that these pre-service teachers would engage with the components of the mathematical modelling cycle throughout the problem-solving process. The study group was constituted by 15 pre-service elementary mathematics teachers studying at a university in western Türkiye who had completed a mathematical modelling course. The participants engaged in mathematical studies in groups comprising three or four individuals, with the formation of these groups being meticulously structured to ensure heterogeneity, taking into account their performance levels in the mathematical modelling course.

Data Collection and Mathematical Task

In order to develop the modelling task, the Ministry of National Education Mathematics Curriculum (MoNE, 2018) was reviewed and the concepts that modelling can be carried out were determined. A modelling task was developed for the concept of area measurement, which is a wide range of concepts that can be used in almost all levels of mathematics teaching and where various mathematical studies can be carried out by using different techniques in different geometric shapes.

In this study, the modelling task presented to the pre-service teachers involved estimating the area of a structure in a real-world image, specifically, the floor area of

Colosseum in Rome (Fig 1). The context was based on a contemporary restoration project, in which it was proposed to install a retractable floor system over the ancient underground tunnels of the Colosseum to enable cultural and touristic events to be held inside the arena. Pre-service teachers were asked to estimate the area that would need to be covered by such a retractable platform. To do so, they had to make assumptions based on a top-down image of the Colosseum, interpret spatial features, and estimate the area of the floor above the exposed tunnels. The task required them to engage in mathematization of a real-life context, make measurement-based approximations, use digital tools to support their reasoning, and validate their solutions. This modelling context allowed for rich engagement with multiple MWS components – including representations (e.g., diagrams, photos), artefacts (e.g., measurement tools, software), and theoretical references (e.g., geometric formulas) – and supported transitions across different phases of the modelling cycle.

Figure 1: Photo provided in the worksheet.

The development of this problem situation was grounded in the characteristics of model-eliciting activities, such as providing assistance to a real-life customer/consultant, offering detailed explanations regarding the mathematical work undertaken in the solution process, and interpreting the real-life situation. The problem situation was accompanied by readiness questions to facilitate problem comprehension and guided exploration questions designed to stimulate mathematical work. These guided exploration questions were meticulously crafted to align with the mathematical modelling cycle and the characteristics of the components in the MWS theory.

Subsequent to the pilot study, revisions were made to facilitate a more profound comprehension of the expressions and visuals in the problem situation, and guided exploration questions were formulated in accordance with the opinions of three experts. The problem situation and guided exploration questions were finalized and applied to the main study group. Following an initial phase of individual work to understand the problem, group study commenced. During this phase, the actions undertaken by the pre-service teachers to address the problem were observed, and pertinent notes were recorded. The aim of these interventions was to support the smooth progression of mathematical activity, particularly when students faced difficulties that disrupted their modelling process (Bukova Güzel *et al.*, 2016). It was expected that the participants would be able to use tools such as a computer and the internet during the modelling activity, and therefore each group was provided with a computer during the study. The pre-service teachers were asked to express their thoughts aloud and explain them in detail, even if they were incorrect. Audio and video recordings were made during the group discussions with a camera in order to prevent data loss by missing any case.

Data Analysis

The aim of this study was to analyze the cognitive and epistemological aspects of students' mathematical work using two interrelated frameworks: the modelling cycle (Blum & Leiss, 2007) and the theory of MWS (Kuzniak & Nechache, 2021). The analysis was conducted in three stages. In the first stage, actions performed by the pre-service teachers were identified and segmented *("zoom-in")* according to the modelling cycle phases (e.g., understanding the context, mathematization, interpretation). In the second stage, a detailed examination *("zoom-out")* of these actions was conducted to explore how they related to the MWS components – representations, artefacts, and theoretical references – and how these actions navigated across different cognitive processes. In the third stage, a global synthesis was carried out to determine the dominant geneses and vertical planes involved in the students' work. This layered analysis allowed us to integrate the modelling phases with MWS structures, providing a comprehensive understanding of students' mathematical activity.

In this study, two groups of pre-service teachers were analyzed as they worked on the same mathematical modelling task. The comparative analysis aimed to reveal differences in how each group interacted with the components of the MWS framework during the modelling process.

FINDINGS

Mathematical Work of Group 1

The modelling task required pre-service teachers to estimate the area of a retractable platform to be installed over the underground tunnels of the Colosseum, based on an aerial photograph. In Group 1, pre-service teachers worked individually for 10 minutes before transitioning to group discussion. Those who initiated discussion exhibited a sound understanding of the problem context, although minor uncertainties emerged

regarding the data provided and the goal of the task. One of the students suggested using an alternative aerial image of the Colosseum to improve measurement accuracy, proposing the use of web-based tools such as Google Earth.

The group eventually agreed that the approximate area could be calculated by assuming a circular geometric shape and estimating its diameter from the photograph. To do this, they selected a reference object – a truck visible in the image – whose real-world length was assumed to be between 8 m and 13 m. One pre-service teacher articulated the following reasoning.

97 PT 1: ...for example, the length of the truck in the photograph is 2 cm. In real life, the length of this truck would be between 8 m or 13 m. We can ratio the length of the two to the diameter of the circle.

The argument was posited that the data obtained from a bird's-eye view of the Colosseum would be more reliable. Following a comprehensive review of the photographic evidence obtained from the internet, it was determined that the dimensions of the truck depicted therein would serve as the reference object for this calculation. The pre-service teachers articulated their perspective on this matter as follows:

210 PT2: Let’s go from the truck anyway.

211 PT1: Let’s find the length of the truck horizontally. Was the other shape a circle? Is it a full circle? If it is a full circle, we find the diameter of this place.

212 PT3: But there will be a difference because of the perspective.

213 PT1: Let it be that much difference. Let’s find an approximation. If we find one side, the other side will be the same amount.

216 PT2: If we find the length of the diameter of the circle, we already find the measure of its area.

217 PT1: Yes. Then we find the diameter from the length of the truck.

In this dialogue, it is evident that the pre-service teachers posited that by employing the ratio between the length of the truck depicted in the photograph and its actual length, the diameter length of the circle shape presumed to be at the base of the Colosseum can be ascertained.

The image to be utilized was transferred to the dynamic geometry software GeoGebra, where two points were selected by the pre-service teachers on the shape presumed to be a circle.The length between these two points was then determined by examining the toolbar in the software and selecting the 'length measurement' tool (see Fig 2). The length of the truck in the photograph was then calculated by performing analogous actions. They asserted that a constant of proportion was established by comparing the two length measurements.

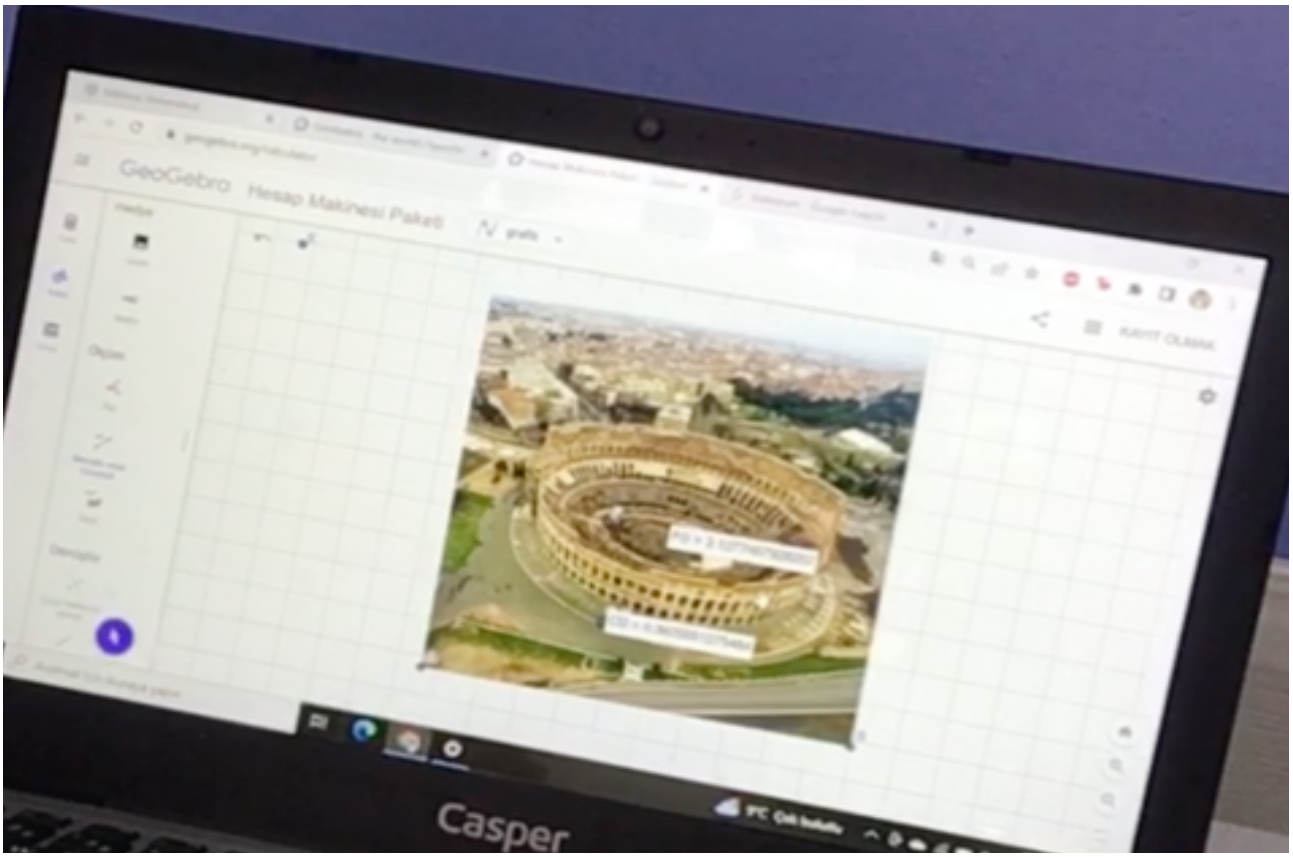


Fig 2. Use of point tool and measure tool in GeoGebra by Group 1.

In order to transfer the data obtained from the photograph to real life, it was necessary to determine the average length of a truck. In line with the information obtained by the prospective teachers who conducted internet research, it was stated that the length of the truck in the photograph was 5.5 meters. The calculation of the diameter length of the circle model yielded a result of 47.3 meters, while the radius length was determined to be 23.6 meters. However, the radius of the circle shape was accepted as 24 meters, given the rounding of the measurement. Utilizing the area formula for a circle, the mathematical calculation yielded an area of 1,808 square meters.

The pre-service teachers, who initiated the process of verifying the accuracy of the obtained result, conducted an internet search to procure information regarding the Colosseum. This research yielded the following discussion, which included the following data: the floor area of the building was 24 thousand square meters, the radius was 268 meters, and the circumference was approximately 500 meters.

343 PT3: But think of it like this. The round part is really small, because 50 thousand people will fit in here... so we found it approximately correct.

Although the calculated area by the Group 1 appeared to differ substantially from the surface area they found online, this discrepancy stemmed not from an error in calculation, but from a difference in the scope of measurement. The students focused

on estimating the area of the central platform to be covered, while the online data referred to the entire footprint of the Colosseum, including its outer structure and surrounding base.

Aware of this difference, the students nevertheless used the larger value as a means of validation, reasoning that their calculated area should reasonably be smaller than the total area of the monument. This comparison reflects a developing understanding of model validation within the modelling cycle, and indicates their engagement in critical analysis. It also illustrates how pre-service teachers interpreted real-world data within a mathematical context using components of the MWS framework – particularly in the interplay of representations, tools, and reasoning strategies.

Initially, during the understanding and mathematization phases, pre-service teachers engaged with visual representations and proportional reasoning – indicating the semiotic genesis, as they constructed meaning from photographs and inferred spatial relations.

As they proceeded to manipulate the image using GeoGebra's measurement tool, the focus shifted to the instrumental genesis. This was marked by purposeful use of technological artefacts (point and length tool), whereby students translated visual data into quantifiable measures, aligned with the epistemological plane.

Later, when students discussed the appropriateness of their estimates, and justified their approach using known geometric formulas (e.g., area of circle), their activity activated the discursive genesis. Here, theoretical references were articulated and used to validate decisions, situated within the [Ins-Dis] vertical plane.

Rather than occurring simultaneously, these genesis processes unfolded progressively. This temporal layering illustrates how students moved from interpreting and exploring representations, to operating with tools, and finally to structuring theoretical argumentation – forming a coherent sequence of mathematical work.

Mathematical Work of Group 2

Following an examination of the problem situation, it was posited by the pre-service teachers who responded to the readiness questions that a photograph of the Colosseum from a bird's eye view was required. To this end, a search was conducted on the search engine using the keyword "bird's eye view". Upon realizing that the area to be covered by the photograph was an ellipse, the pre-service teachers engaged in the following discussion to resolve the issue:

43	PT4:	We use cars here as a reference object. We can also find the diameter of shape with the length of the line segment of the car. That is, we go from the length of the line segment. Now we will create a circle surrounding the shape, using the center.
47	PT5:	Are we going to take the whole circumference of the Colosseum?
54	PT4:	Are we going to take the whole colosseum and subtract the walkable part in the middle?

60 PT6: Do you think we will think of it as an ellipse or a circle?

61 PT4: There is an ellipse drawing tool in GeoGebra. We can use that.

62: PT6: Then we can create the ellipse by marking two points at the endpoints of the shape.

In the discussion, it was seen that the pre-service teachers sought to simplify the problem situation by employing their reasoning, planning and making assumptions skills. It was observed that the pre-service teachers who attempted to create the shape to calculate the area measure using the tools in GeoGebra dynamic geometry software encountered difficulty. This difficulty can be attributed to the fact that the ellipse creation tool utilizes two focal points, with the pre-service teachers having placed these at the extremities of the shape.

The pre-service teachers, having reconsidered the issue, established a correct relationship between the given and the required by means of expressions that demonstrated their full comprehension of the problem. There followed a discussion during which the following points were raised:

97 PT4: Now he wants a cover to cover the rest of the floor. When we look at the shape, it looks like there is a semicircle there.

99 PT6: Yes, I understand, you are right. We will find the area of the ellipse and subtract the area of that semicircle and find a close value.

101 PT4: Let's do it like this... Let's create a circle on the ground, the area of this circle will be exactly half of it.

The area on the ground where tourists can walk is determined to be almost a semicircle, and the pre-service teachers created an ellipse by using the ellipse creation tool, stating that the shape on the ground to be covered is an ellipse. However, the ellipse was created by dragging the points without considering the focal points. It was observed that the circle and ellipse models were colored using the features in the GeoGebra tool. This approach is believed to have contributed to the visualization of the model, as illustrated in Figure 3.

In order to establish a relationship between the lengths depicted in the photograph and their real-life counterparts, the pre-service teachers zoomed in on an automobile seen in the photograph, determined its endpoints and formed a line using the line tool, passing through two points. Thinking about the length of a car in real life, the pre-service teachers determined that a car is 4.5 meters long based on information obtained from the internet. Following the execution of additional corrections on the marked points, the following discourse ensued between the pre-service teachers who determined the length between the two points through the algebra window of GeoGebra:

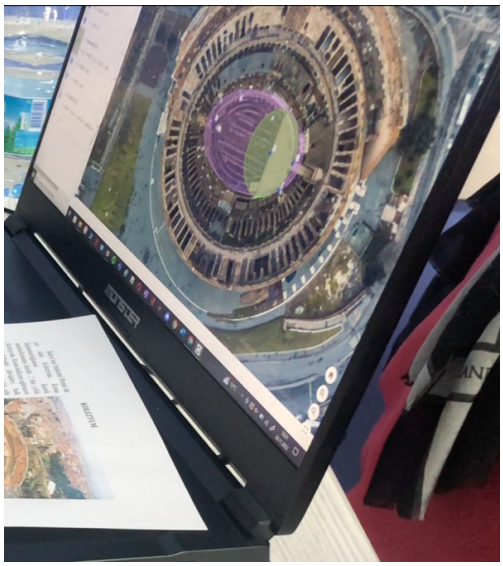


Fig 3. Visualization of problem

185 PT5: ...What is the length of the line segment of this? It says 0.28 in the algebra window, what does it mean. I think the length of the line segment is 0.28. Let's find the length of the ellipse as a line segment.

191 PT4: Now there are two points on the ellipse. Should we take points H and G (focal points) to determine its length?

198 PT5: We got 5.44 between H and G. Now let's divide it by 0.28.

In this dialog, pre-service teachers who determine the length measurements on GeoGebra seek to obtain the data required to calculate the area of the ellipse. It was observed that the two radiuses required to calculate the area of the ellipse were created using the line segment tool. It was observed that the students initiated the execution of mathematical operations by employing the concept of ratio-proportion, thereby transferring the length measurements determined by the length measurement tool and the algebra window to real-life scenarios. The worksheet quote for mathematical operations is presented in Figure 4.

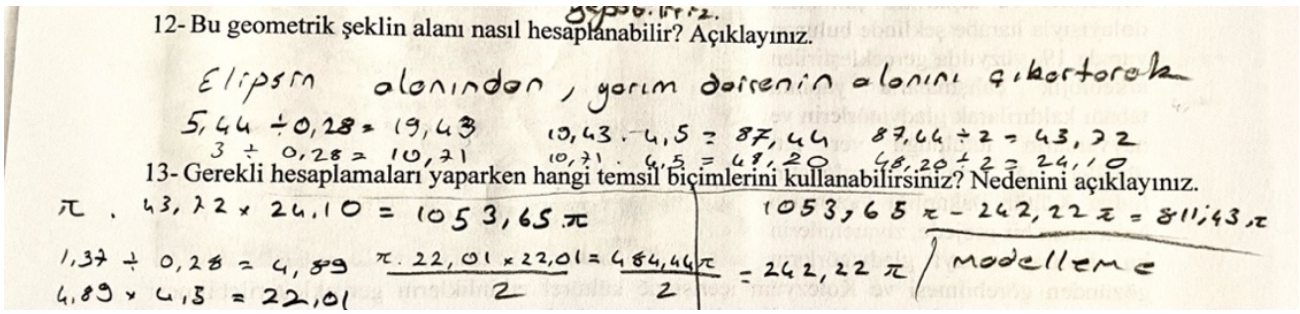


Fig 4. Mathematical Calculations of Group 2.

Following the execution of the requisite calculations, it was determined that a mathematical result had been reached, albeit with an error having been made in its

calculation. Consequently, the pre-service teachers proceeded to revise their calculations and thereby finalized the mathematical study. When questioned about the correspondence of the result obtained to real-life scenarios, it was asserted that an internet search had been conducted, leading to the attainment of a result that approximated the true value.

The mathematical activity of Group 2 begins with the recognition of the situation presented in the task and the intention to visualize the scenario through a drawing. The pre-service teachers' comments indicating that their initial approach is anchored in visual representation. This signifies the emergence of the semiotic genesis within the [Sem-Ins] vertical plane, where signs are being created to represent the task context.

The Group 2's attempt to conceptualize the problem through the notion of area involves a key transition: they choose to represent the floor with ellipse and semi-circle. Utilizing these shapes is not arbitrary; rather, it is coherent with the modelling context presented in the task. The presence of multiple figures signals not a lack of understanding but rather a flexible and context-sensitive mathematical interpretation, in line with the modelling component of MWS theory and its cognitive-epistemological interaction.

As Group 2 discuss the solution, we observe a shift from visualization to construction: the pre-service teachers begin utilizing measurement techniques, marking the development of the instrumental genesis. The tools here are both conceptual and procedural, and the activity remains within the Sem-Ins plane.

The discursive genesis was activated when pre-service teachers' verbalized justifications for their modelling decisions. Explanations of solution evidences an attempt to anchor computational activity within a theoretical framework – a central feature of discursive genesis. Although the group does not construct a full deductive argument, this use of previously institutionalized mathematical knowledge for validation supports the interpretation of a partial [Sem-Dis] and [Ins-Dis] vertical planes' activation.

These circulations illustrate the emergence of a personal MWS wherein pre-service teachers try to coordinate visual intuition, procedural competence, and theoretical reasoning. However, while visualization and procedural fluency are evident, discursive elements remain relatively underdeveloped, suggesting that although the pre-service teachers can operate within the [Sem-Dis] plane, their mathematical work tends to be driven more by iconic representations and rules than by structured argumentation.

Overall, Group 2 exhibits a mathematically meaningful engagement with the task. The varied geometric shapes they consider reflect not confusion, but an adaptive modelling response aligned with the real-world context posed in the task. The evolution of their mathematical work shows the progressive unfolding of genesis processes and an increasing, though still partial, integration of the three dimensions of MWS.

RESULTS AND DISCUSSION

It was observed that, in the actions performed by the pre-service teachers at the stages of understanding and simplifying the problem, the epistemological basis of mathematical concepts was taken into consideration and the mathematization of the problem was initiated in this direction. Considering the actions performed by the two groups (Group 1 and Group 2), it can be said that the mathematization stage of the mathematical modelling cycle is facilitated by the effective and correct use of components in the epistemological plane. However, incorrect mathematization can result in mathematical work proceeding in a different direction. For instance, in Group 2, the initial assumption of modelling the arena with a full circle led to the use of incorrect focal points in the ellipse tool, which eventually caused them to reconsider. This illustrates how the mathematization trajectory may shift based on representational assumptions. The study can therefore be guided by Derouet (2019)'s idea of teacher intervention at this stage.

The instrumental genesis process was observed to be carried out in the mathematical works conducted for the solution of the mathematized problem. At this point, it can be said that the use of technological tools supports instrumental genesis (Frejd & Bergsen, 2018). The discursive genesis process, facilitated by the theoretical underpinnings of the concept and reasoning strategies, culminated in the attainment of a mathematical result and an evaluation of its precision. This finding aligns with the study by Verdugo Hernández *et al.* (2023), who emphasized that the realization of the semiotic genesis plays a key role in the transition from intuitive representations to formalized mathematical reasoning in modelling activities.

However, the pre-service teachers who planned to use the circle representation in the solution process of the problem could not carry out the visualization process and created an incorrect model. Although the model was solved correctly, there is a discrepancy between the mathematical result and the actual result. Verdugo Hernández *et al.* (2023) state that the semiotic genesis of the concept in the problem is related to the progress of the mathematical modelling cycle. In this respect, it can be posited that the successful completion of mathematical work is contingent upon the realization of semiotic genesis – a key consideration for supporting future teachers in developing modelling competence.

REFERENCES

Altun, M. (2020). *Matematik okuryazarlığı el kitabı: Yeni nesil soru yazma ve öğretim düzenleme teknikleri* [Handbook of mathematical literacy: Next generation question writing and teaching organization techniques]. Alfa Aktüel.

Blum, W., & Leiss, D. (2007). How do students and teachers deal with modelling problems. *Mathematical modelling: Education, engineering and economics*, 222-231.

Bukova Güzel, E., Tekin-Dede, A., Hıdıroğlu, Ç., Kula-Ünver, S., & Özaltun-Çelik, A. (2016). *Matematik eğitiminde matematiksel modelleme* (E. Bukova Güzel, Ed.) [Mathematical modelling in mathematics education] Pegem Akademi.

Büyüköztürk, Ş., Kılıç-Çakmak, E., Akgün, Ö., Karadeniz, Ş., & Demirel, F. (2008). *Eğitimde bilimsel araştırma yöntemleri* [Scientific research methods in education]. Pegem Akademi.

Creswell, J. W. (2013). *Qualitative inquiry and research design: Choosing among five approaches* (3rd ed.). Thousand Oaks, CA: SAGE.

Derouet, C. (2019). La fonction de densité au carrefour entre probabilités et analyse. Une ingénierie didactique en classe de terminale scientifique. *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques 2017*, 174-193.

Derouet, C., Kuzniak, A., Laval, D., Montoya Delgadillo, E., Moutet, L., Nechache, A., Parzysz, B., & Vivier, L. (2017). modelling tasks and mathematical work. CERME 10, Dublin, Ireland,

Frejd, P., & Bergsten, C. (2018). Professional modellers' conceptions of the notion of mathematical modelling: Ideas for education. *ZDM*, *50*, 117-127.

Hall, J., & Lingefjard, T. (2016). *Mathematical modelling: applications with GeoGebra*. John Wiley & Sons.

Hidayat, R., & Iksan, Z. H. (2018). Mathematical modelling competency for Indonesian students in mathematics education programmes. *Creative Education*, *9*(15), 2483-2490. https://doi.org/10.4236/ce.2018.915187

Korkmaz, E. (2010). *İlköğretim matematik ve sınıf öğretmeni adaylarının matematiksel modellemeye yönelik görüşleri ve matematiksel modelleme yeterlikleri* [Preservice elementary mathematics and classroom teachers' views and competencies regarding mathematical modelling] [Doctoral Dissertation, Balıkesir University]. Balıkesir.

Kuzniak, A. (2014). Understanding geometric work through its development and its transformations. In S. Rezat, M. Hattermann, & A. Peter-Koop (Eds.), *Transformation - A Fundamental Idea of Mathematics Education* (pp. 311-325). Springer New York. https://doi.org/10.1007/978-1-4614-3489-4_15

Kuzniak, A., & Nechache, A. (2021). On forms of geometric work: a study with pre-service teachers based on the theory of Mathematical Working Spaces. *Educational Studies in Mathematics*, *106*(2), 271-289. https://doi.org/10.1007/s10649-020-10011-2

Kuzniak, A., Tanguay, D., & Elia, I. (2016). Mathematical Working Spaces in schooling: an introduction. *Zdm*, *48*(6), 721-737. https://doi.org/10.1007/s11858-016-0812-x

Lagrange, J.-B. (2021). Les espaces de travail connectés: une perspective nouvelle pour la modélisation dans le secondaire? *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, *21*(1), 9-28. https://doi.org/10.1007/s42330-020-00130-6

Lesh, R., & Doerr, H. (2003). Foundations of a models and modelling perspective on mathematics teaching and learning. In R. Lesh & H. Doerr (Eds.), *Beyond constructivism: A models and modelling perspective on mathematics teaching, learning, and problem solving* Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Ministry of National Education [MoNE]. (2018). *Matematik Dersi Öğretim Programı* [Mathematics curriculum]. Ankara

Ministry of National Education [MoNE]. (2023). *PISA 2022 Türkiye Raporu* [PISA 2022 Turkey Report]. Ankara: General Directorate of Measurement, Evaluation and Testing Services Retrieved from https://meb.ai/UnfgXga

Montoya Delgadillo, E., Viola, F., & Vivier, L. (2017). Choosing a mathematic working space in a modelling task: the influence of teaching. CERME 10, Dublin, Ireland.

Nechache, A. (2018). L'articulation des genèses de l'Espace de Travail Mathématique dans la résolution de tâches probabilistes faisant appel à la modélisation. *Menon-Journal of Educational Research-online, 4th Thematic Issue*, 93-104.

Paolucci, C., & Wessels, H. (2017). An examination of preservice teachers' capacity to create mathematical modelling problems for children. *Journal of Teacher Education*, *68*(3), 330-344. https://doi.org/10.1177/0022487117697636

Verdugo Hernández, P., Huincahue, J., Cumsille, P., & Nechache, A. (2023). Articulación entre Modelización y Espacios de Trabajo Matemático. Análisis de una Tarea bajo el ciclo de Blomhøj en Educación Superior. *Acta Scientiae*, *24*(7), 146-175. https://doi.org/10.17648/acta.scientiae.7135

AMENER LES ÉLÈVES À PROBLÉMATISER EN MATHÉMATIQUES : ENJEUX ET LIMITES

Sylvie Grau

INSPE Nantes Université - Laboratoire du CREN

Nous allons nous intéresser à l'analyse des interactions entre élèves lorsqu'ils sont amenés à poser, construire et résoudre un problème mathématique collectivement. Il s'agit de mieux comprendre des phénomènes observés dans des classes ordinaires et lors d'ingénieries didactiques expérimentées auprès d'élèves de fin de collège et seconde (14 à 16 ans). En particulier, nous verrons que le travail mathématique peut être de nature très différente suivant le scénario choisi par l'enseignant et que certains malentendus peuvent faire obstacle à la construction des savoirs visés.

LE TRAVAIL MATHEMATIQUE DANS LE CADRE DU CAP

L'activité de l'élève est analysée dans le cadre théorique de l'apprentissage par problématisation (CAP) au regard de trois registres (Doussot *et al.*, 2022). Le registre empirique regroupe les faits, considérés comme ce qui est considéré comme vrai, même si ce n'est que temporairement. Ces faits peuvent être directement des données du problème prélevées, des données construites ou des hypothèses de travail. Le registre des nécessités est l'ensemble des conditions qui permettent de circonscrire le problème et le résoudre, elles amènent une limitation des possibles, permettent la factualisation, orientent la résolution. Ce sont des contraintes non contingentes. Elles amènent certaines nécessités qui caractérisent les savoirs mathématiques mobilisés. Enfin le registre explicatif (REX) désigne le cadre dans lequel le problème est posé, construit et résolu. Ce REX peut être une théorie mathématique, un paradigme, mais il peut aussi relever d'une organisation propre à l'élève qui, pour lui, garantit le sens et la cohérence des modèles utilisés et des conditions dans lequel il problématise. Le REX se différencie des paradigmes tels qu'ils sont définis dans les ETM du fait que ce registre théorique n'est pas toujours institué dans une communauté scientifique identifiée (Choquet *et al.*, 2022a et 2022b). Les ingénieries dans le CAP ont pour objectif de confronter les élèves à des situations qui leur permettent de construire un savoir apodictique (caractérisé par des nécessités logiques qui font qu'il est ce qu'il est et qu'il ne peut pas être autrement). L'analyse du travail mathématique de l'élève passe, dans le CAP, par la reconstruction du problème construit par l'élève à partir des traces de son activité (les traces écrites intermédiaires, les productions, les interactions dans les groupes, l'usage fait des outils numériques etc.). Lorsque nous faisons l'analyse *a priori* d'une situation didactique, nous utilisons un espace de contraintes (EC) dans lequel nous regroupons d'une part les fait et d'autre part les nécessités qui entrent en jeu dans la construction et la résolution du problème théorique, et nous essayons de formaliser le REX qui leur donne une cohérence en lien avec l'ETM de référence correspondant. L'objectif de ces analyses est d'identifier les nécessités à construire pour viser l'émergence d'un savoir apodictique chez nos élèves. La problématisation résulte ainsi

de trois genèses, différentes de celles qui interviennent dans les ETM, que sont la construction de nécessités, la factualisation (remise en question et construction de faits), et la construction du problème qui permet l'avancée dans la solution. Nous utilisons ensuite un EC pour une analyse *a posteriori*, de manière micro pour étudier le travail mathématique d'un élève ou méso (respectivement macro) pour étudier celui d'un groupe d'élèves (respectivement d'une classe).

MISE EN OEUVRE DU TRAVAIL DES PROBLEMES DANS LES CLASSES

En France, avant 1950, l'activité scolaire de l'élève était organisée en deux phases : l'acquisition et l'utilisation des connaissances. Les problèmes étaient alors introduits en fin d'apprentissage pour rendre opérationnelles les connaissances, et mesurer leur disponibilité (Champagnol, 1974). Avec les pédagogies dites « nouvelles » qui se développent dès 1922, un renversement va s'opérer (Hugon, 2016). Dans l'idée que l'on apprend mieux ce que l'on cherche, le problème devient le point de départ de l'apprentissage. Dans une perspective constructiviste, il s'agit d'accompagner l'élève dans la mise à jour d'un savoir visé. Le problème devient moyen d'apprentissage, l'occasion d'apprendre par franchissement d'un obstacle au sens de Bachelard ou au fil d'une enquête au sens de Dewey. En parallèle de ce changement de paradigme et dans la continuité des travaux de Piaget, Brousseau, dans les années 80, élabore la TSD (théorie des situations didactiques) dans laquelle, l'élève peut agir sur le milieu (Brousseau, 1988) et fait évoluer son action et ses connaissances dans un processus d'adaptation et d'assimilation en fonction des rétroactions de ce milieu. Avec le socioconstructivisme, le langage prend un rôle très important dans la conceptualisation. Il s'agit d'amener les élèves à échanger, comparer, critiquer solutions et processus. Les élèves sont donc partie intégrante du milieu et les interactions langagières sont aussi des actions sur le milieu. L'accompagnement des programmes de 2002 intitulé « problèmes pour chercher » propose un protocole aux enseignants en plusieurs étapes : la phase de recherche, la présentation des solutions, l'échange organisé autour de plusieurs propositions, la validation, la conclusion. Les textes de l'époque insistent sur la mise au travail des élèves, ce qui va amener les enseignants à privilégier la recherche au détriment des autres étapes, d'autant que l'activité réflexive et métacognitive nécessaire est difficile à concevoir par les enseignants, peu formés à cela et que la nature même des savoirs mathématiques utiles pour la résolution peuvent être difficiles à identifier pour eux (Choquet, 2016 ; Houdement, 2012 entre autres). Dans les programmes scolaires actuels, il est signifié au cycle 1 que l'élève « apprend en réfléchissant et en résolvant des problèmes »[1] dans toutes les disciplines. Pour cela l'enseignant doit « poser des questions ouvertes pour lesquelles les enfants n'ont pas de réponse directement disponible ». La résolution de problème intervient donc bien en amont des apprentissages, il s'agit d'activités « de haut niveau, fondamentales pour donner aux enfants l'envie d'apprendre et les rendre autonomes intellectuellement ». Il est précisé que le rôle de l'enseignant est de « susciter des discussions » sans que la

[1] Programme du cycle 1, BOEN n° 31 du 30 juillet 2020.

fonction ni la gestion de ces discussions ne soient précisées. Aux cycles 2 et 3, résoudre des problèmes vise à s'approprier des connaissances mathématiques en en garantissant le sens mais vise aussi le développement de compétences. Au cycle 4, le programme de mathématiques présente les problèmes comme des objets d'apprentissage, insistant sur des aspects méthodologiques (automatismes, analogies, raisonnements, démonstrations). En 2022, le ministère français de l'éducation national a publié le guide « La résolution de problèmes mathématiques au collège », dans lequel le rôle des problèmes dans la construction des connaissances est remis en avant : « il serait vain, par exemple, de vouloir comprendre la notion de fonction sans vivre à travers les problèmes la puissance de cette notion elle-même. »[2] (p. 11). On y précise que « les interprétations construites par les élèves peuvent être en décalage avec la perspective adoptée par le concepteur du problème ». Les auteurs mettent donc en alerte contre certains malentendus. Par ailleurs, les recherches en neurosciences cognitives apportent depuis quelques années un éclairage sur les fonctions exécutives de bases - la mémoire de travail, le contrôle de l'inhibition et la flexibilité cognitive - sur lesquelles repose la résolution de problèmes (Bouin & Lachaux, 2018). Elles considèrent que placer les élèves en situation-problème est un levier pour les apprentissages pour peu que cette situation-problème crée une rupture avec les conceptions préexistantes chez les élèves, contienne un obstacle à dépasser et vise la création d'un savoir précis (Bourassa & al., 2021). Plusieurs aspects sont donc à prendre en compte dans le travail des problèmes à l'école : leur pertinence didactique, l'aspect motivant et engageant, leur rôle dans le développement des fonctions cognitives. Nous faisons l'hypothèse que ces aspects peuvent entrer en résonance mais qu'ils peuvent aussi être en concurrence.

L'IMPORTANCE DES DEBATS DANS LE CAP

La résolution de problème est souvent organisée dans les classes ordinaires en quatre étapes : la recherche individuelle (I), la recherche en petits groupes (G), le débat en plénière autour des productions (D), la mise en texte d'une solution (T). L'organisation chronologique de ce scénario semble mettre en évidence un parcours préalablement défini dans l'ETM idoine, parcours qui met en fin de scénario l'accent sur la genèse discursive de l'ETM. Ces étapes IGDT peuvent cependant avoir des fonctions très différentes. Prenons l'exemple du débat, il peut viser la résolution du problème en privilégiant un travail dans le plan instrumental-sémiotique permettant le contrôle des techniques mobilisées ; le développement d'une argumentation amenant à travailler en particulier dans le plan instrumental-discursif pour justifier des procédures ; ou viser la construction des nécessités du savoir, ce qui suppose un travail complet dans l'ETM pour accéder aux raisons tant fonctionnelles que théoriques qui font que le savoir est ce qu'il est. En particulier, si la dernière phase (T) n'est pas menée par l'enseignant avec l'intention de mettre en relation les spécificités des savoirs identifiés en lien avec les problèmes, les élèves risquent de retenir des éléments de contexte et non la structure

[2] https://eduscol.education.fr/document/13132/download?attachment

mathématique du problème, en s'appuyant essentiellement sur des conceptions intuitives (Rivier *et al.*, 2022) et peu transférables.

Construire un savoir apodictique suppose de le construire en lien avec une classe de problèmes et des nécessités dans un REX qui lui donne du sens. L'élève doit cependant avoir la responsabilité des trois étapes de la problématisation que sont : poser, construire et résoudre le problème. L'enseignant doit donc amener l'élève à poser le problème, c'est-à-dire à prendre conscience que ce problème existe, à l'aide d'une situation portant en elle un paradoxe, un élément qui entre en conflit avec des connaissances antérieures, un doute. Construire le problème suppose la mise en tension des faits et des idées. A ce stade le processus de modélisation est à l'œuvre et la mise en tension peut être facilitée par un travail en groupe. Des solutions temporaires peuvent apparaître, des conditions sont formulées, les faits sont listés mais la résolution n'est pas encore complète. Un débat peut alors faire émerger les nécessités qui vont permettre de reformuler le problème dans un nouveau REX où la résolution devient possible. La fonction du débat n'est pas d'établir la valeur de vérité des propositions, mais bien de faire construire les nécessités qui font qu'elles sont ce qu'elles sont, il s'agit d'accéder aux raisons. Le débat mathématique a vocation à amener l'élève à passer d'une argumentation à une démonstration. Les raisons évoquées par les élèves peuvent avoir différentes natures et l'analyse des ETM dans lesquels les élèves travaillent peut permettre d'identifier si ces raisons sont pragmatiques (l'élève a réussi à produire un résultat, ce qui relèverait de la genèse instrumentale), analytiques (l'élève met en relation différents faits pour leur donner du sens, ce qui relèverait d'un travail dans un plan semiotique-instrumental) ou théoriques (l'élève justifie ses propositions par des propriétés mathématiques, ce qui relèverait d'un travail dans des plans incluant la genèse discursive). La question est de savoir si un débat en classe entière peut permettre à tous les élèves d'accéder aux raisons théoriques. Margolinas mettait déjà en garde en 2003 contre le caractère potentiellement différenciateur des pratiques de débat telles qu'elles peuvent être observées dans les classes de mathématiques : « cette pratique masque l'absence de travail de formulation de la majorité des élèves » (Margolinas, 2003, p. 12). En particulier la temporalité contraint fortement les pratiques enseignantes.

Pour répondre à cette question, nous avons mené des ingénieries didactiques visant l'acquisition d'un savoir apodictique. Nous avons expérimenté et analysé différents scénarios (débat à l'oral en classe entière *versus* à l'oral ou à l'écrit en petits groupes).

ANALYSE D'UN DEBAT A L'ORAL EN CLASSE ENTIERE

Une première expérimentation menée en classe de 2nde a permis de confronter les élèves à un problème de conversion d'unité de mesure de température − contexte très souvent utilisé pour introduire la notion de fonction affine :

> Les américains utilisent une autre unité que le degré Celsius pour mesurer la température, ils utilisent le degré Fahrenheit. Quand la température augmente de 50°C, elle augmente de 90°F et l'eau qui bout à 100°C, bout à 212°F.

> On veut créer un programme à l'aide d'un tableur pour que, lorsqu'on entre une température en °C dans une cellule, s'affiche automatiquement dans une autre cellule la température en °F. Comment faire ?

Les élèves sont directement autorisés à échanger dans le groupe. L'avantage est de permettre aux élèves d'échanger sur les premières idées, représentations, automatismes induits par la situation (Grau, 2017) et non sur des éléments de résolution que les plus rapides auraient trouvés. Après avoir cherché en groupe, un débat est organisé. Un groupe vient présenter sa solution au tableau et les autres élèves la critiquent. La production choisie par l'enseignant est représentative d'une interprétation erronée commune à plusieurs groupes dans la classe : la confusion entre les grandeurs et leurs variations (beaucoup d'élèves ont considéré que 50°C correspondait à une température de 90°F). L'enjeu d'apprentissage est la construction du concept de covariation proportionnelle (Passaro, 2016). Pour analyser le débat, nous en faisons une macrostructure (Fabre & Orange, 1997) : nous reprenons la transcription et identifions les thèses énoncées, les objections, les dépassements d'objection et les alternatives. Nos analyses montrent que les prises de paroles ont différentes fonctions dans la problématisation. Nous identifions trois rôles : questionner, évaluer, formuler. Les questions peuvent amener des explicitations, des explications, des argumentations, elles peuvent être à l'origine de la mise en évidence de paradoxes ou d'impensés. Les évaluations portent un jugement permettant de se mettre d'accord sur ce qui peut être considéré comme vrai, faux ou encore en question. Elles permettent de cadrer la recherche en limitant le champ de l'exploration. Enfin les formulations ou reformulations, permettent des changements de registres qui peuvent donner à voir des propriétés ou des détails qui modifient la construction du problème. Problématiser nécessite de prendre alternativement ces différents rôles, dans l'idée de contrôler sa propre activité pour décider, structurer le raisonnement et sélectionner des indices (Choquet et al, 2022b). Ici, ces rôles sont à distance de l'action. L'échange a permis de corriger l'erreur et a donné l'illusion à l'enseignant que la question était réglée. En effet, en analysant les interventions orales du point de vue des unités du raisonnement covariationnel de Passaro repérées au cours du débat, nous avons mis en évidence que différents problèmes sont travaillés chronologiquement au cours du débat - la recherche d'une fonction, la question de l'image de 0, la question de la linéarité de la fonction cherchée – ce qui atteste d'une effective progression dans les unités de raisonnement, allant d'une conception locale à une conception globale. Cependant les élèves qui prennent la parole ne sont pas les mêmes suivant les problèmes abordés laissant craindre une pratique potentiellement discriminante. Traduit dans les ETM (voir tableau 1), il semble que la solution exposée et critiquée atteste d'un travail mathématique dans le plan sémiotique-instrumental que globalement tous les élèves ont mené. Le débat remet en cause ce qui est vu avec ce qui est su et atteste d'un travail dans le plan sémiotique-discursif auquel participe une majorité d'élèves. Cependant, la construction du concept de covariation proportionnelle ne concerne que quelques élèves en fin de séance. Le travail dans le plan instrumental-discursif n'est effectif que pour ces élèves.

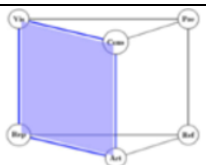
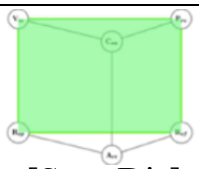
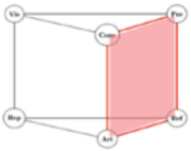
 [Sem-Ins]	 [Sem-Dis]	 [Ins-Dis]
Factualisation Mise en commun de ce que les élèves ont produit : - graphiques - tableaux de valeurs - calcul mobilisant la proportionnalité.	**Mise en tension faits/idées** Débat sur la cohérence entre ce qui est vu (points alignés, valeurs dans le tableau) et ce qui est su des fonctions affines.	**Construction de nécessités** Mise en évidence de la proportionnalité des écarts comme propriété caractéristique des fonctions affines.

Tableau 1 : analyse croisée du débat dans les ETM et le CAP.

Nous pensons qu'une autre manière d'organiser l'analyse critique des productions, privilégiant des débats à l'oral et à l'écrit dans des petits groupes, serait pertinente pour amener plus d'élèves à travailler dans le plan instrumental-discursif. Cela suppose de concevoir un support écrit qui sera mis au travail dans chaque groupe et une production écrite attendue à l'issue de l'activité. Le choix de ce qui va être soumis à la critique est important didactiquement pour que le savoir visé soit effectivement mis au travail. Ce support écrit doit permettre à un maximum d'élèves de formaliser les concepts abstraits mobilisés, mais il doit aussi être en étroite relation avec le problème. Il doit donc reprendre les propositions des élèves sous différentes formes (textes, graphiques, tableaux, schémas...) auxquels nous ajoutons certains ostensifs (flèches, point d'interrogation, cases vides etc.) qui orientent le regard sur certains aspects qui n'avaient pas été questionnés. Il s'agit d'inducteurs potentiels de problématisation pour orienter le débat sur les caractéristiques du savoir mathématique visé (Grau, 2022). Ce travail vise un travail complet dans l'ETM.

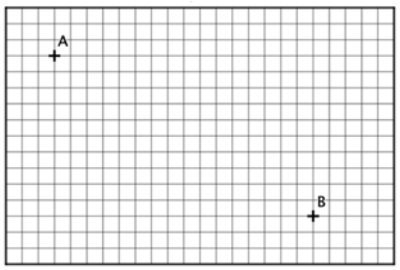
DEBATS A L'ORAL ET A L'ECRIT DANS DES PETITS GROUPES

Le principe est de poser un premier problème aux élèves de sorte qu'un paradoxe, un doute, une question émerge (plusieurs solutions incompatibles ou un résultat incohérent du point de vue mathématique ont été trouvées). L'étape suivante est le travail de ce nouveau problème devenu explicatif. La construction d'un EC *a priori* peut aider à repérer les nécessités à construire en lien avec la construction de faits. Cette factualisation peut passer par une mise en évidence assumée par l'enseignant de certains éléments de la situation ou par des questions intermédiaires amenant à les construire.

Prenons l'exemple d'un problème proposé dans une classe de 4e. Il s'agit du problème 4 page 150 du guide : « La résolution de problème mathématiques au collège »[1]. L'objectif d'apprentissage est la démonstration en géométrie, nécessaire pour réaliser

une construction rendue impossible (le milieu est donc ici contraignant). Dans l'étape 1, cinq figures sont données aux élèves répartis en groupes de quatre avec deux points A et B différemment placés dans la feuille (voir figure ci-dessous)

Chaque figure doit être complétée par un point J qui respecte les conditions suivantes :



- I, C et D sont trois points tels que le point I est le milieu des segments [AC] et [BD] ;
- E est le point tel que le point A est le milieu du segment [DE] ;
- Le point J est le milieu du segment [CE].

Il faut placer le point J sur toutes les figures. Répartissez-vous les figures à compléter.

A l'étape 2, une figure supplémentaire est donnée, pour laquelle la construction sort de la feuille et ne peut donc pas être réalisée. La consigne est :

> Amélie dit qu'elle peut placer J de manière certaine et très précise sans tracer les autres points. Quel est son secret ?

Cette deuxième étape propose une énigme, les élèves doivent repérer que dans tous les tracés, le point J semble être le milieu du segment [AB]. Cela suppose qu'ils analysent les tracés précédents ou un tracé à main levée de la solution. Les figures nécessaires pour établir la preuve ne sont pas tracées. Aucun mot dans l'énoncé évoque explicitement des quadrilatères et donc des parallélogrammes et la figure obtenue est relativement complexe. Par ailleurs si les élèves peuvent coder le milieu d'un segment, ils ne savent pas coder des parallélismes. Le travail doit déboucher sur un problème explicatif : pourquoi J est-il nécessairement le milieu de [AB] ?

L'analyse *a priori* dans le CAP permet de dresser l'EC qui suit (voir Figure 1). Dans le registre des faits figurent les données du problème (en gras), des propriétés caractéristiques du parallélogramme (en grisé), et des faits construits au cours de la résolution du problème (en pointillés). L'organisation de la gauche vers la droite reflète une chronologie possible. Le registre des nécessités met en évidence des conditions nécessaires construites ou à construire pour permettre la résolution du problème en lien avec le savoir visé qui est la démonstration en géométrie plane. Enfin les différents REX identifient des paradigmes dans lesquels les élèves travaillent, considérés comme une certaine manière de dire, agir, penser. Nous avons repris ici deux des paradigmes définis par Houdement et Kuzniak : G1 est celui de la géométrie naturelle, c'est une géométrie dans laquelle la validation se fait par le sensible, la réalité, la perception ; G2 est celui où la validation se fait par des lois hypothéticodéductives dans un système axiomatique, ces axiomes n'étant pas détachés de la réalité. Ces deux géométries se distinguent clairement par la nature des objets étudiés mais elles ne s'excluent pour autant pas l'une l'autre, au contraire elles se complètent dans un va et vient possible entre des constructions (G1) qui permettent de conjecturer des propriétés (G2) et des raisonnements (G2) qui permettent d'effectuer un tracé (G1) – ce qui est le cas dans cette situation.

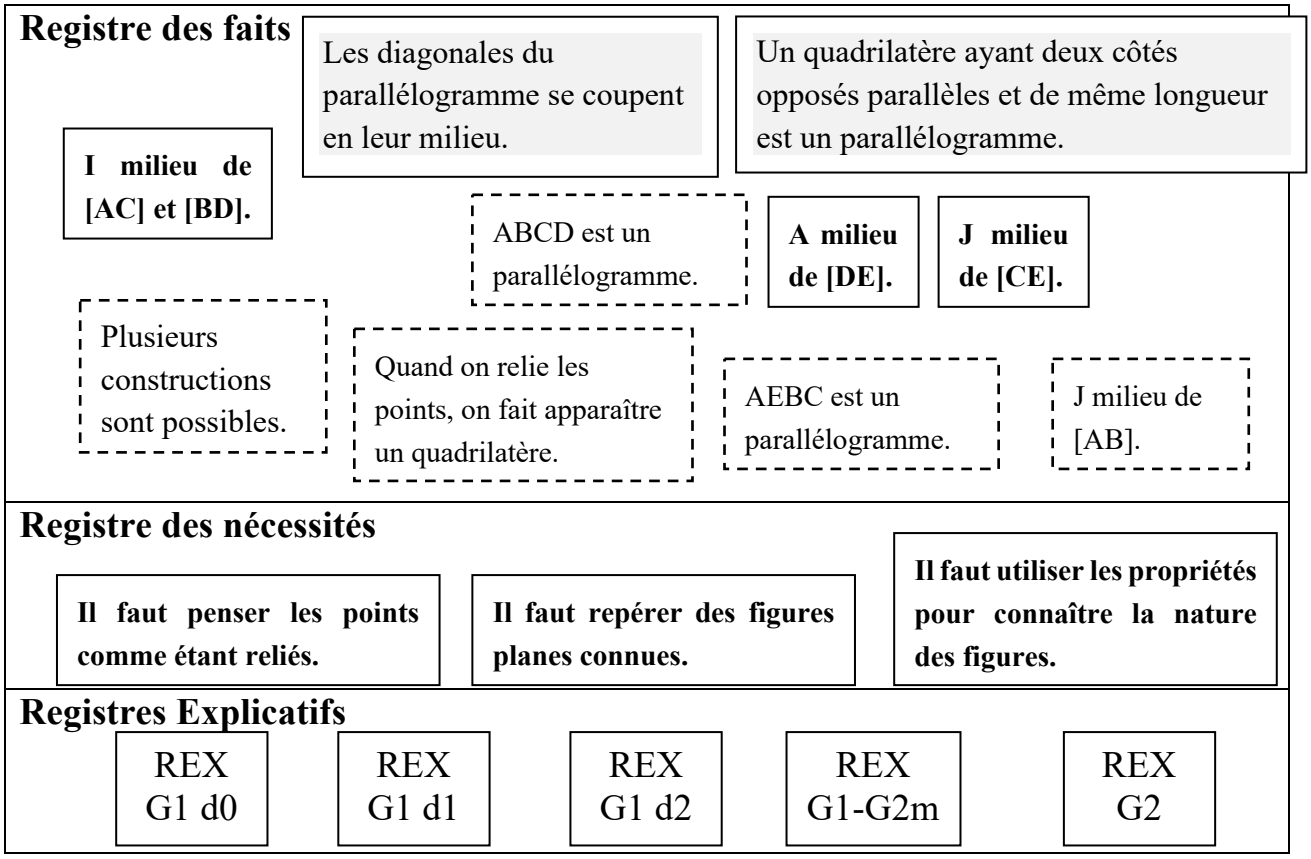


Figure 1 : EC du problème de construction.

Démontrer suppose de travailler dans le paradigme G2, et donc de faire construire les nécessités du passage de G1 à G2. En nous appuyant sur les conditions de ce passage développées par Duval, il s'agit de développer une vision non iconique des tracés. Ici, nous pouvons identifier cinq REX suivant que l'élève travaille dans le paradigme G1 ou G2, mais aussi suivant qu'il change de dimension et travaille sur des points et leur position (G1d0), sur des segments et leur longueur (G1d1) ou sur des figures planes (G1d2), et enfin suivant qu'il perçoit ou non des agencements de figures planes connues (G2m) dans une division méréologique. Nous pouvons donc identifier trois nécessités à construire pour les élèves : relier les points, repérer des figures planes connues, utiliser les propriétés caractéristiques pour déterminer la nature des figures. Du point de vue du travail mathématique, il s'effectue d'abord dans le plan sémiotique-instrumental du fait des constructions réalisées et des visualisations possibles sur ces tracés, de configurations connues. Dans la classe ordinaire où ce problème a été posé, l'enseignant a organisé une mise en commun qui lui permet d'établir la démonstration en amenant les élèves à rappeler la définition et les propriétés du parallélogramme. Par un jeu de couleurs sur le tracé, il fait apparaître les différentes figures pour mettre en place la transitivité qui permet de démontrer que J est bien le milieu de [AB] mais le travail dans le plan instrumental-discursif reste ici implicite. En particulier, la genèse instrumentale qui permet de visualiser les éléments indispensables à la démonstration n'est pas explicitée (nécessité de faire apparaître des figures connues, rendre visible le parallélisme). La séance se termine sur une rédaction de la démonstration à partir des

définitions et propriétés et d'une trame permettant de repérer les trois étapes de la démonstration.

Dans le CAP, nous estimons possible de proposer de nouvelles tâches aux élèves afin qu'ils construisent les nécessités, en particulier en amenant les élèves à échanger sur ce qu'ils produisent afin qu'ils explicitent ce qui contraint leur activité et donc à mettre en tension les REX dans lesquels ils travaillent. Il s'agit, comme dans les débats en classe entière, de questionner, reformuler et valider ce qui a été produit, mais en lien avec l'agir. On cherche à accéder aux raisons de l'agir. Pour que chaque élève puisse travailler dans le plan discursif-instrumental, il nous semble intéressant d'amener les élèves à critiquer, catégoriser, hiérarchiser ce qu'ils ont produit. Ici par exemple, nous proposons aux élèves de catégoriser les réponses produites par la classe. La comparaison doit amener à repérer les ostensifs dans différents registres, questionner ce qui est affirmé (propriété ou conjecture), identifier les faits et leur nature (la question du vu et du su). Dans les ingénieries que nous menons, ces tâches reposent sur des comparaisons entre des productions d'élèves en petits groupes visant à repérer des stratégies, idées, possibles et les formaliser. Les interactions que nous cherchons sont de natures différentes de celles mises en évidence lors du débat en classe entière. Nous cherchons à mettre l'élève dans une posture réflexive par rapport à son action. Nous parlons de débat à l'oral ou à l'écrit en petits groupes du fait que les arguments sont repris des productions écrites des élèves et soumises à la critique orale et écrite. Les élèves prennent ici les différents rôles déjà évoqués (ils peuvent questionner, contrôler, formaliser) auquel se rajoute un rôle qui est celui d'agir pour que les interactions portent effectivement sur l'action. Nous considérons que ces quatre rôles sont indispensables à la problématisation et que le scénario doit permettre à tous les élèves de les endosser alernativement, soit de manière spontanée, soit de manière contrainte par les types de tâches proposées (Grau, 2022).

PROBLEMATISATION ET MALENTENDUS SOCIO-SCOLAIRES

L'analyse de l'activité des élèves en petits groupes dans les conditions définies plus haut atteste d'une problématisation par une majorité d'élèves, mais aussi de malentendus socio-scolaires (Rayou, 2020) qui empêchent certains d'entrer réellement dans un travail mathématique. Dans la poursuite de notre travail de thèse (Grau, 2017), nous avons en particulier analysé le travail des groupes pour lesquels nous n'avions pas identifié de traces de problématisation. Nous avons ainsi pu catégoriser ces malentendus que nous allons illustrer par quelques exemples de propos d'élève de 2nde (repéré par leur initiale et le repérage du temps dans le verbatim) lors de la résolution du problème de conversion d'unité de température. Nous identifions des malentendus cognitifs (écart entre les procédures intellectuelles de l'élève et les attentes du professeur) lorsque par exemple les élèves ne savent pas ce qu'il faut faire parce que « il n'y a pas de question » (B,1474), ils ne se représentent pas la forme de la solution du problème. C'est aussi le cas, lorsqu'ils ne perçoivent pas le but de l'activité :

1501 J : Non mais en fait, faut comprendre un truc, hé Léna faut comprendre un truc, toutes ces questions c'est des questions pièges.

Ils peuvent être identitaires (écart entre les besoins, les ressentis, le style de l'élève et celui attendu par l'institution d'un élève ayant une activité mathématique) lorsque les élèves ne se sentent pas capables de résoudre un problème : « on n'est pas des savants nous » (L, 1202), ou identifient par exemple une élève comme étant plus capable parce que sa mère est professeure de mathématiques. Ces malentendus peuvent encore être culturels (écart entre les valeurs, la culture familiale, la place que l'élève a dans la société et les valeurs portées par les objets scolaires). Les élèves peuvent ne pas avoir les références contextuelles pour comprendre la situation : dans notre exemple, ne pas imaginer que d'autres unités de mesure peuvent être utilisées dans d'autres pays, ou faire des erreurs d'interprétation du fait de la polysémie des mots (ici confusion entre la température d'un corps en sciences physique, avec celle d'un corps humain).

Différentes expérimentations semblent montrer que la confrontation régulière à des problèmes ouverts, un enseignement basé sur une pédagogie coopérative, un travail régulier de l'oral et des écrits intermédiaires sont autant de conditions permettant d'éviter certains malentendus. Dans les quelques exemples donnés, il nous semble que les ETM peuvent apporter des pistes pour limiter les malentendus socio-scolaires. Pour un élève pour lequel la tâche semble éloignée de ce qu'il imagine comme étant les attendus usuels en classe de mathématiques du point de vue cognitif, il peut être intéressant de voir si la genèse instrumentale est déjà assurée, afin de donner à l'élève un sentiment de compétence, un pouvoir d'agir. Pour ce qui est du malentendu culturel, les contextes et la modélisation doivent amener l'enseignant à se questionner sur la pertinence de ses choix au regard des enjeux didactiques. Pour ce qui est de l'identité symbolique, il semble que le fait de maintenir l'élève dans des tâches mathématiques simples et détachées des problèmes complexes ne lui procure pas un sentiment de compétence suffisant pour qu'il se reconnaisse capable de faire le travail mathématique demandé. Ces hypothèses restent à confirmer et ouvrent de nouveaux champs de recherche.

DISCUSSION SUR LA PORTEE DE CES RESULTATS EN FORMATION

Nous avons présenté le cadre théorique du CAP dans lequel le travail de l'élève est analysé en termes de problématisation. Nous avons montré en quoi le travail de groupe et les débats sont des phases indispensables pour mener le processus de problématisation en classe. Nous avons montré que l'organisation des débats et les supports proposés peuvent modifier radicalement l'espace mathématique dans lequel les élèves travaillent et la manière dont ils problématisent. Par ailleurs, nous avons repéré certains malentendus qui peuvent faire obstacle à l'entrée des élèves dans le travail mathématique. Quelle portée ont ces résultats sur la question de la formation des enseignants ? Quels savoirs apporter aux enseignants en formation initiale ou continue afin qu'ils puissent amener leurs élèves à problématiser, sans que cette activité ne se révèle discriminante socialement ?

Les exemples présentés montrent que l'analyse *a priori* des problèmes dans le CAP suppose que l'enseignant ait lui-même une construction apodictique des savoirs à enseigner, ce qui n'est pas toujours le cas, en particulier si les savoirs sont naturalisés.

Un second point nous semble important, il questionne les pratiques usuelles qui deviennent des doxas. Comment amener les enseignants à expérimenter d'autres scénarios que le scénario IGDT ? à proposer des situations complexes et des activités réflexives qui donnent aux élèves un pouvoir d'agir, penser, dire les mathématiques ? Un autre aspect concerne les pédagogies coopératives (ensemble des modalités permettant aux élèves d'agir et d'apprendre avec, par et pour les autres) qui amènent les élèves à changer plus souvent de rôle dans le but d'expliquer les solutions. Enfin concernant le développement de compétences en résolution de problèmes chez nos élèves, l'hypothèse développée dans le CAP est que le travail de construction du problème est indispensable pour que l'élève puisse le résoudre. Cette construction suppose un temps long, des allers et retours permettant de critiquer des solutions, de tester des hypothèses, de formaliser des faits, d'ouvrir de nouveaux possibles. La formation initiale et continue gagnerait donc à initier les enseignants à un travail des problèmes sur la base de tâches permettant des interactions autour des raisons et non plus uniquement autour des solutions et ce sur plusieurs séances.

En fait ces éléments visent une même préoccupation : comment amener tous les élèves à un travail mathématique le plus complet possible et en particulier un travail mathématique dans les plans faisant intervenir la genèse discursive ? Le croisement du cadre théorique des ETM avec celui du CAP peut apporter un regard nouveau sur cette question en intégrant la problématisation comme un type de circulation spécifique dans les ETM.

REFERENCES

Bouin, N., & Lachaux, J.-P. (2018). *Enseigner : Apports des Sciences Cognitives*. Réseau Canope.

Bourassa, M., Menot-Martin, M., & Philion, R. (2021). Chapitre 12. Planifier la résolution de problèmes complexes – Le coin de l'intervention. In *Neurosciences et éducation* : Vol. 2e éd. (p. 263-291). De Boeck Supérieur.

Brousseau, G. (1988). Le contrat didactique : Le milieu. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *9*(3), 309-336.

Champagnol, R. (1974). Aperçus sur la pédagogie de l'apprentissage par résolution de problèmes. *Revue Française de Pédagogie*, 28, 21-27.

Choquet, C. (2016). Quels problèmes à l'école et au collège pour développer des compétences mathématiques ? Repères IREM, 105, 57-77.

Choquet, C., Grau, S., Hersant, M., Legrand, J.M., Zebiche, N. (2022a). Le travail mathématique à l'aune du cadre de l'apprentissage par problématisation : travail mathématique et processus de problématisation chez les élèves. *Actes ETM7*, Strasbourg, 131-142.

Choquet, C., Grau, S., Hersant, M., Legrand, J.M., Zebiche, N. (2022b). Conception de situations et conditions pour la construction de nécessités dans le CAP. *Actes ETM7*, Strasbourg, 143-154.

Doussot, S., Hersant, M., Orange Ravachol, D., & Lhoste, Y. (2022). *Le cadre de l'apprentissage par problématisation Apports aux recherches en didactique*. PUR.

Fabre, M., & Orange, C. (1997). Construction des problèmes et franchissement des obstacles. *ASTER*, *24*, 37-57.

Grau, S. (2017). *Problématisation en mathématiques : Le cas de l'apprentissage des fonctions affines*. [Thèse de doctorat] Bretagne Loire.

Grau, S. (2022). Le cadre de l'apprentissage par problématisation : outils et enjeux en didactique des mathématiques. *Revue québécoise de didactique des mathématiques*, 1, 43-71.

Houdement, C. (2012). La résolution de problèmes en France (6 à 12 ans). *Actes du colloque EMF 2012* (p. 1795-1805). Espace mathématique Francophone.

Hugon, M.-A. (2016). Les pédagogies nouvelles : Quel apport pour l'école d'aujourd'hui ? *Spécificités*, *9*(1), 26-38.

Margolinas, C. (2003). *Un point de vue didactique sur la place du langagier dans les pratiques l'enseignement des mathématiques*. IUFM d'Aquitaine.

Passaro, V. (2016). Analyse du raisonnement covariationnel et des situations qui en favorisent le déploiement chez des élèves de 15 à 18 ans au Québec. *Actes de la XVIIIe école d'été de didactique des mathématiques*. ARDM, Brest.

Rayou, P. (2020). Des registres pour apprendre. Education et didactique, 14(2), 49-64.

Rivier, C., Scheibling-Seve, C., & Sander, E. (2022). Études des types de problèmes arithmétiques à énoncés verbaux proposés dans 12 manuels scolaires français de cycle 2 : Concordance et discordance par rapport à trois formes d'analogies. *Revue française de pédagogie*, 216(3), 101 -116.

ETM IDÓNEO DE UN GRUPO DE PROFESORES EN FORMACIÓN INICIAL EN EL DOMINIO DE LA PROBABILIDAD

Katherine Machuca Pérez, Elizabeth Montoya Delgadillo

Universidad de Viña del Mar, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso

El propósito de esta investigación cualitativa es estudiar el espacio de trabajo matemático idóneo en el dominio de la probabilidad de un grupo de profesores de matemáticas en formación inicial (PMFI). El sustento teórico es el Espacio de trabajo Matemático (ETM), diseño metodológico estudio de caso, conformado por dos PMFI. Analizaremos los objetos matemáticos, bajo una dimensión semiótica, instrumental y discursiva, identificando planos verticales privilegiados y paradigmas involucrados. Los resultados nos señalan, entre otros aspectos, brechas reconocibles entre el sustento teórico o conceptual de una propuesta de enseñanza y la propuesta propiamente tal, así como también apego al diseño de la propuesta durante su ETM idóneo efectivo.

PROBLEMÁTICA

La probabilidad se ha incluido en los currículos escolares de diversos países, sin embargo, este hecho no asegura transposiciones didácticas efectivas para su enseñanza. El carácter multifacético de la probabilidad, la falta de reversibilidad de los experimentos aleatorios, diferentes interpretaciones del azar a lo largo de la historia (Batanero *et al.*, 2005), las características diferentes del pensamiento probabilístico y las nuevas posibilidades que brindan los recursos tecnológicos, establecerán retos importantes para la educación de los profesores. Investigadores han reconocido una necesidad especifica en la formación del profesorado sobre la enseñanza y aprendizaje de la probabilidad, pues no se ha prestado la atención adecuada a esta (Batanero, 2022; Martin & Thibault, 2016).

De acuerdo con Rodríguez *et al.* (2018), investigaciones sobre la comprensión de la probabilidad por parte de profesores en formación inicial son escasas, más aún en Chile. Dichos autores realizan una investigación con profesores en formación inicial en ejercicio (en activo) de naturaleza mixta. Los resultados indican que los profesores "esgrimen argumentaciones poco plausibles a la hora de hacer uso de la regla aditiva…" (p.153). Generando tensiones en relación con las habilidades y conocimientos que los profesores debiesen aprender en su formación.

En Dayal y Sharma (2020), se realiza un estudio con profesores de matemáticas en formación inicial mediante un estudio de casos colectivo, utilizando la teoría sociocultural. Se diseñó e implementó una secuencia de clase para la enseñanza de la probabilidad en un contexto de juego con dados, la comparación de probabilidades teóricas y experimentales fue fundamental en la secuencia, además de una conjetura inicial desde el enfoque intuitivo. Los resultados indican que a pesar de que los profesores utilizaron diversas estrategias, en algunos casos se presentó el sesgo de equiprobabilidad. Los autores realizan un llamado a los formadores de profesores para

“ayudarles a revelar lo que ya saben con un lenguaje matemático más preciso” (Dayal & Sharma, 2020, p.103).

Por su parte, Machuca y Montoya (2022) realizan un estudio con profesores de matemáticas en formación inicial y en ejercicio mediante un estudio de casos colectivo y utilizando la teoría de Espacio de Trabajo Matemático (ETM). Se modificó e implementó una tarea matemática, la cual permite dos respuestas diferentes y correctas según el modelo de experimento aleatorio considerado. Los resultados indican que la noción de experimento aleatorio no se explicitó en todas las producciones, además de varias suposiciones implícitas. Señalan que “debemos ofrecer más oportunidades…para que los profesores capten estas nociones, que a veces se incorporan implícitamente en la enseñanza y el aprendizaje” (Machuca & Montoya, 2022, p. 573).

Batanero (2022) reflexiona sobre la *formación de profesores para la enseñanza de la probabilidad*, mediante el análisis de cuatro trabajos presentados en ICME-14. Se vuelve a reconocer una necesidad específica en cuanto a la enseñanza y aprendizaje de la probabilidad en la formación inicial de profesores de matemáticas.

En Chile, el Ministerio de Educación establece estándares pedagógicos y disciplinarios para la carrera de pedagogía en matemáticas de educación secundaria, estableciendo criterios explícitos en relación con la educación de los PMFI sobre la enseñanza y aprendizaje de la probabilidad.

De lo anteriormente expuesto nos planteamos ¿Cómo el profesor en formación inicial diseña e implementa una clase referida a la enseñanza de la probabilidad en la educación secundaria en Chile?

FUNDAMENTOS TEÓRICOS

Utilizamos el ETM como sustento teórico, el cual proporciona una herramienta analítica y práctica para el estudio específico del trabajo matemático de estudiantes y profesores cuando se enfrentan a problemas matemáticos en un dominio específico de la matemática, mediante la coordinación de elementos epistemológicos y cognitivos (Kuzniak, 2022; Kuzniak *et al.*, 2016). Cuyo objetivo es poder comprender, desde un punto de vista didáctico, lo que se pone en juego alrededor del trabajo matemático en un contexto educativo.

El modelo considera un plano epistemológico compuesto por tres polos; *representamen* o *signo* en relación con un conjunto de objetos concretos y tangibles organizados en registro de representación semiótica, *artefactos* es todo aquello que ha sufrido una transformación de origen humano por pequeña que esta sea, los cuales pueden ser elementos materiales o simbólicos y cuyo estatus teórico ya no son cuestionados por el usuario y el *referencial teórico* constituido por un conjunto de propiedades, teoremas, definiciones y axiomas en un dominio de la matemática que conforman el marco teórico de referencia. Así, en probabilidad, podemos considerar como representamen, árboles de posibilidades, árboles ponderados, tablas de doble entrada, o cualquier signo propio de la probabilidad e incluso signos de otros dominios

matemáticos, los cuales se utilizan para representar la tarea en cuestión. En relación con los artefactos, se pueden considerar elementos materiales, como dados, monedas o cualquier elemento concreto que sirva para llevar a cabo un experimento aleatorio, artefactos tecnológicos que sirvan para programar y simular aquellos experimentos, artefactos simbólicos como técnicas de cálculo o algoritmos que permitan el cálculo de una probabilidad. Finalmente, el referencial teórico está constituido por todas las propiedades, definiciones y teoremas propios de la probabilidad.

El plano cognitivo se compone de tres procesos; la visualización relacionada con el desciframiento e interpretación de los signos, la construcción relacionada con acciones originadas por el uso de artefactos y las técnicas asociadas y la prueba que utiliza razonamientos de validación basados en un referencial teórico.

El análisis del trabajo matemático a través del ETM permite tener acceso a cómo se construyen significados, mediante el desarrollo de tres génesis; semiótica, instrumental y discursiva, las cuales permiten relacionar las componentes de los planos epistemológico y cognitivo. El modelo también considera tres planos verticales ([Sem-Ins]; [Ins-Dis]; [Sem-Dis]) que relacionan las génesis señaladas anteriormente, de modo de poder organizar y describir las interrelaciones entre ellas. Sobre los paradigmas, en el paradigma uno (P1), la probabilidad está asociada a fenómenos del mundo real considerando un experimento aleatorio concreto y generando un protocolo experimental, generando un experimento pseudo concreto. En el paradigma dos (P2), se deja lado los fenómenos del mundo real considerando un experimento aleatorio genérico y utilizando reglas de cálculo para considerar las probabilidades de eventos. En el paradigma tres (P3), la probabilidad es tratada mediane su estructura axiomática bajo demostraciones matemáticas.

En relación con los enfoques probabilísticos, en la educación matemática se reconocen diferentes enfoques, el intuitivo relacionado con ideas informales y creencias cotidianas probabilísticas que poseen los sujetos. El enfoque clásico relacionado con la razón entre casos favorables sobre casos posibles igualmente probables. El frecuentista permite estimar probabilidades a partir de la frecuencia relativa estabilizada y observada en un gran número de ensayos idénticos e independientes del experimento aleatorio.

DISEÑO METODOLÓGICO

Nuestra investigación es de corte cualitativo, método estudio de caso (Stake, 2010) compuesto por dos PMFI próximos a terminar su formación inicial, identificados en adelante como PF1 y PF2. La institución formadora es una universidad de la región de Valparaíso, Chile. Durante el año 2022 se implementó una nueva malla curricular, sin embargo, ambos sujetos participantes de nuestra investigación se rigen por la malla antigua, la cual contempla nueve semestres, dos cursos de Estadística (CE) y un curso de didáctica de la estadística (CDE). Ambos sujetos participantes se encontraban cursando el octavo semestre y tenían aprobados los cursos señalados anteriormente. Cabe notar entonces, que los PMFI no contaban con un curso de didáctica de la

probabilidad en su formación inicial y tampoco de programación. Además, ambos PMFI participaron en una investigación realizada por las investigadoras (I) de este estudio, cuyo objetivo fue estudiar el ETM personal de los PMFI en probabilidad.

Los PMFI diseñaron e implementaron una situación de enseñanza en el dominio de la probabilidad. Esta se denomina propuesta de innovación en dicha institución y surgió dentro de una investigación en didáctica de la matemática. El informe de dicha investigación, llamado en adelante "informe", es presentado por los PMFI para obtener el título de profesor de matemáticas y en el cual se presenta la propuesta de innovación.

Nuestra investigación se realizó en dos fases, en la primera realizamos un estudio al contexto de la investigación realizada por los PMFI y en la segunda fase realizamos un estudio al diseño e implementación de la propuesta de innovación. Para la primera fase, las técnicas de recogida de datos son revisión documental (Bisquerra, 2019) del informe presentado por los PMFI y una entrevista semi-estructurada (Bisquerra, 2019). Para la segunda fase, además de utilizar las dos técnicas señaladas en la primera fase, también utilizamos la técnica observación no participante (Ruiz, 2012), cuyo registro son notas de campo y medio audiovisual. Esta técnica la utilizamos para la revisión de los videos de las implementaciones, las cuales se realizaron durante mayo del 2021 en formato online y sincrónicamente mediante la plataforma Zoom, nosotros sólo observamos lo que ocurrió en ellas sin participar de ninguna forma en estas.

En la revisión de los videos de las implementaciones nos centramos en las intervenciones que realizan los PMFI, las respuestas que generan en relación con las preguntas que realizan los estudiantes, se consideraron fragmentos de aquellas intervenciones. Ponemos especial atención a la relación (o tensión) entre el ETM idóneo potencial y efectivo diseñado por los PMFI.

La entrevista se realizó online y con ambos PMFI conjuntamente, durante la segunda semana de agosto del 2021 y tuvo una duración aproximada de 60 minutos. Se grabó mediante la opción de video que ofrece zoom y se realizó la transcripción en su totalidad. El diseño de esta se realizó en base a una revisión del video de las implementaciones y al informe presentado por los PMFI, invitándolos a reflexionar sobre su ETM idóneo potencial y efectivo.

La experimentación consistió en la implementación en dos oportunidades por parte de PF1 y PF2 de la propuesta de innovación. Los grupos de estudiantes en ambas implementaciones son diferentes: en la primera implementación participaron 9 estudiantes (de un total de 10) que cursaban 4º Medio electivo de Probabilidades y Estadística, pertenecientes a un colegio particular subvencionado de la región de Los Lagos, sur de Chile. Esta se realizó durante el horario habitual de clases en una sesión de una hora y cincuenta minutos, con la presencia de la profesora titular del curso, tal implementación estuvo a cargo de PF1. En la segunda implementación participaron 2 estudiantes (de un total de 13) que cursaban 4º Medio electivo de límites, derivadas e integrales pertenecientes a un colegio particular subvencionado de la región de Valparaíso, Chile. Esta implementación se realizó fuera del horario habitual de clases

durante una sesión de dos hora y cincuenta minutos, a cargo de PF2, el profesor titular del curso no estuvo presente en dicha implementación. En ambas implementaciones estuvieron los dos PMFI presentes, uno a cargo de la implementación propiamente tal y el otro a cargo de los aspectos técnicos, complementando el trabajo del PMFI a cargo.

En cuanto al proceso de análisis de los datos, para la fase uno realizamos un análisis de contenido al informe presentado por PF1 y PF2 para estudiar el contexto general de la investigación realizada por ellos. Este análisis es más bien descriptivo, considera la pregunta y objetivo general de dicha investigación, el objetivo de la propuesta de innovación, entre otros aspectos. Para la segunda fase, en cuanto al diseño e implementación de la propuesta de innovación, realizamos un análisis cualitativo de los datos, mediante el marco teórico ETM. Es decir, nos enfocamos en cuáles son las génesis o planos privilegiados por los PMFI, las herramientas semióticas, tecnológicas y teóricas que consideraron para su diseño y los paradigmas que guían su trabajo matemático idóneo potencial. En cuanto a la implementación, también nos interesa establecer la distancia (o acercamiento) entre el ETM idóneo potencial y efectivo, poniendo especial atención a las devoluciones realizadas por los PMFI.

ANÁLISIS Y RESULTADOS

Los PMFI crearon, analizaron e implementaron una propuesta de enseñanza, para luego analizar dicha implementación de acuerdo con los objetivos planteados y sustentada desde una perspectiva teórica en el campo de la Didáctica de la Matemática. La pregunta de investigación desarrollada por PF1 y PF2 es *¿Cómo se produce el tránsito entre los significados intuitivo, frecuencial y laplaciano de la probabilidad en un grupo de estudiantes de cuarto año de enseñanza media, al incorporar la simulación en Excel como estrategia para la resolución de un problema de probabilidad?* Por otra parte, el objetivo declarado de la propuesta de enseñanza es *resolver problemas de probabilidad poniendo en juego diversos enfoques de la probabilidad mediante la simulación de un experimento aleatorio.*

El marco conceptual que PF1 y PF2 han considerado para sustentar su investigación son los diferentes enfoques de la probabilidad. En particular, es de interés de ellos estudiar las relaciones existentes entre los diferentes enfoques de la probabilidad por parte de estudiantes escolares, con énfasis en la articulación o tránsito entre ellos.

Dicha propuesta de enseñanza consiste, a grandes rasgos en; presentar un problema en el dominio de la probabilidad, el cual trata de una apuesta al tirar dardos a un tablero de forma rectangular con una circunferencia en el centro de color blanco. En la apuesta hay dos participantes, cada uno de ellos debe lanzar un dardo con los ojos vendados al tablero, se gana si el dardo cae en la zona blanca, en caso contrario pierde y si el dardo cae fuera del tablero se repite el tiro. Se consideran cuatro momentos en el diseño, identificados como actividades por los PMFI, en cada una de ellas se presentan diferentes preguntas (19 en total), cuya intención es que emerjan diferentes enfoques de la probabilidad. Específicamente, en la actividad 1 se ha intencionado el enfoque intuitivo, en la actividad 2 el enfoque frecuentista y uso de material concreto. Mientras

que en la actividad 3 se realizó un trabajo con simulación computacional mediante el artefacto tecnológico hoja de cálculo Excel. Finalmente, en la actividad 4 se realizó un trabajo mediante el cálculo teórico de la probabilidad a través de una razón entre áreas.

Según nuestros análisis, en la figura 2 presentamos los paradigmas que se promueven y diferentes planos verticales del ETM que se activan en cada una de las actividades diseñadas por los PMFI. En relación con el diseño de la propuesta, podemos señalar que guarda estrecha relación con la situación didáctica "los cortes en la lana" diseñada e implementada por las investigadoras, y en cuya implementación participaron PF1 y PF2. Las similitudes reconocidas por los PMFI durante la entrevista son: el orden en que se han intencionado los enfoques de la probabilidad; intuitivo, frecuencial y laplaciano en un contexto continuo, uso de material concreto, simulación mediante hoja de cálculo Excel y asociación del enfoque laplaciano mediante una razón entre áreas.

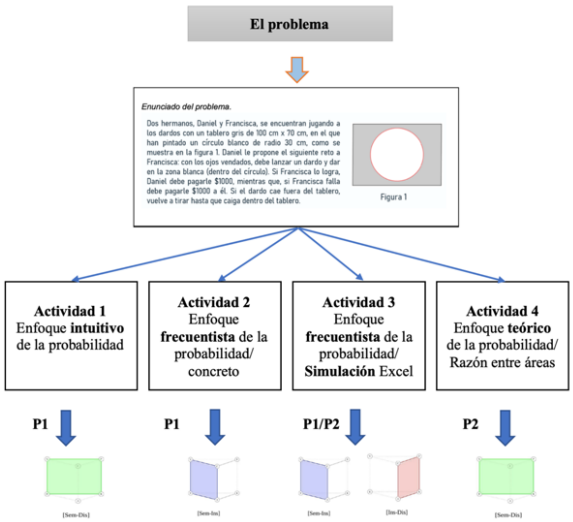


Figura 1: Esquema y análisis desde el ETM de la propuesta de innovación.

En la redacción de la tarea no se menciona que los dardos se lanzan al azar o aleatoriamente, se hace alusión a estas nociones con la expresión "los ojos vendados", cuestión que consideramos se debiese señalar explícitamente, ya que en probabilidad hay bastantes supuestos involucrados en la resolución de tareas, como para que además los tenga también la redacción de estas.

Durante la primera actividad se esperaba una respuesta acerca de la probabilidad desde el enfoque intuitivo, presentándose la siguiente interacción:

> ***PF2***: *¿No les ha pasado que a veces su intuición los engaña? ¿Podremos basarnos solo en nuestra intuición?...*
>
> ***Estudiante***: *Nunca generalmente me baso mucho con la intuición solamente, en* ***este caso igual el problema igual había que ver el área de ambas figuras para ver la probabilidad de que acierten*** *...*
>
> ***PF2***: *nunca se han planteado cuando ustedes no saben qué va a pasar...intentar hacerlo para ver qué pasa realmente…*

Como se evidencia en el fragmento de clase anterior, en la devolución realizada por PF2 no se considera la respuesta del estudiante, sobre el hecho de utilizar áreas para calcular la probabilidad. PF2 insiste en continuar con el trabajo en P1 para dar paso a la promoción del enfoque frecuentista mediante la realización del experimento aleatorio con material concreto, como estaba planificado en su ETM idóneo potencial. Cuestión que tensiona su ETM idóneo potencial y efectivo, pues si se hubiese considerado la respuesta del estudiante se pudo haber cambiado el orden de las actividades, y entonces haber realizado primero la actividad 4 (cálculo de la probabilidad mediante razón entre áreas) y luego realizar la simulación con material concreto y Excel para validar la respuesta obtenida teóricamente. Cuestión que se advertide durante la entrevista,

> ***I**: PF1 cuando un estudiante te dice que pudiese trabajar con área primero... ¿Ustedes se dieron cuenta que el estudiante dijo eso…?*
>
> ***PF1**: ...lo dijo y lo quisimos pasar de largo. . . no lo supimos manejar en el momento…no le dimos importancia al comentario…*
>
> ***PF2**: Después haciendo la reflexión o sea. . . era super importante…un estudiante se dio cuenta que se podía altiro solucionar teóricamente...*

En la segunda actividad, los estudiantes marcaron los puntos aleatoriamente con los ojos vendados en un tablero construido por ellos. Al respecto, podemos señalar que no se presentaron cuestionamientos por parte de los estudiantes acerca de qué significa marcar puntos aleatoriamente. Mientras ellos realizaban el conteo los PMFI preguntan los resultados de dichos conteos y los van anotando en la presentación para que todos los estudiantes puedan ver dichos resultados. En este momento se presenta una interacción, cuyo fragmento de clase señalamos a continuación:

> ***PF2** ¿Se fijan que ya vamos como viendo diferencias entre todos no? ¿A qué creen que se deben esas diferencias?*
>
> ***Estudiante**: pueden ser las mismas variables que estaban también en el problema…la distancia, no sé el tiempo…*
>
> ***PF2**: Claro cierto... ¿El cómo marcan los puntitos también? no creo que todos se hayan puesto de acuerdo... ahí hay como algo que está incluyendo el azar, lo impredecible…*

Según las devoluciones realizadas por PF2, no se considera el hecho que cada estudiante realizó cantidades diferentes de puntos, es decir, el número de ensayos del experimento aleatorio fue diferente para cada uno de ellos, tampoco se hizo alusión a las condiciones en la cual se llevó a cabo el experimento aleatorio, cuestiones que tensionan su ETM idóneo. En este sentido, podemos dar cuenta que los PMFI consideran que este aspecto es una debilidad en su propuesta, tal como señalan en la entrevista:

> ***I**: En el análisis a priori ¿consideraron algunas hipótesis del experimento aleatorio? ¿Algunos supuestos?*

> ***PF2***: *Explícitamente no, pero si yo creo que implícitamente sí...o sea se pone una venda en los ojos de Francisca…había una equiprobabilidad ahí metida…una distribución uniforme…*
>
> ***I***: *¿Por qué no lo incluyeron en el análisis a priori?*
>
> ***PF1***: *Yo creo que se nos pasó considerarlo, porque como que los discutimos para el diseño del problema y como que lo teníamos super en cuenta, pero después como que ya paso.*
>
> ***PF2***: *No le dimos énfasis a que el alumno hiciera sus supuestos.*

Posteriormente, PF2 pregunta a un estudiante ¿Y cómo calcularías la probabilidad de que tenga de ganar? Este responde, con áreas, PF2 le señala e insiste que entregue una respuesta con los datos que se obtuvieron. Nuevamente ocurre la cuestión advertida en la actividad uno, PF2 insiste en que el estudiante responda desde el enfoque frecuentista, mientras este considera una respuesta desde el enfoque teórico. En términos teóricos, el profesor orienta el trabajo en P1 y el estudiante insiste en trabajar en P2.

Durante la actividad tres se realizó una simulación mediante el artefacto tecnológico hoja de cálculo Excel, intencionado el enfoque frecuentista, cuya programación y simulación la realizó el PMFI a cargo. La génesis instrumental es la que coordina el trabajo desarrollado, mediante acciones sobre el artefacto tecnológico para construir la programación y simulación del experimento aleatorio. En relación con la actividad cuatro, se ha intencionado el enfoque Laplaciano de la probabilidad mediante razón entre áreas, en la cual se induce al estudiante a confrontar los enfoques intuitivo, frecuencial y teórico.

Sobre el ETM idóneo efectivo en la actividad tres y cuatro, nos referiremos a ellas según las reflexiones que surgieron en la entrevista, más que centrarnos en las devoluciones realizadas en las implementaciones. En cuanto al rol de la simulación y el orden de los diferentes enfoques de la probabilidad en la propuesta de innovación y su implementación, los PMFI reconocen no fue el más apropiado, debido a que el problema planteado era posible de resolver directamente mediante una razón entre áreas:

> ***PF2***: *después que defendimos en la tesis la profe X nos hizo un comentario…la simulación estuvo un poco forzada y yo igual concorde con ella…el problema era fácil de resolver sin simulación…*
>
> ***PF1***:*…recordando el problema de cortar lana… ¿cómo nos enfrentamos en ese momento al problema? yo no tenía idea, si no hubiéramos empezado a simular como que no se me ocurría como resolverlo teóricamente...*

De acuerdo con las reflexiones de PF1 y PF2, podemos dar cuenta de una concientización acerca del tipo de tarea que se pretende llevar al aula, el rol de la simulación y el orden más apropiado de los diferentes enfoques que se quiere proponer. Incluso, ambos PMFI recordaron el problema de cortar la lana, afirmando que la simulación les permitió resolver teóricamente la tarea planteada. Se observa una

relación entre su ETM personal y su ETM idóneo efectivo acerca del rol de la simulación y el orden más apropiado de los diferentes enfoques de la probabilidad en una situación didáctica.

En relación con la actividad cuatro, una de las principales dificultades que mencionaron los PMFI fue sobre los tiempos de enseñanza, incluso en una de las implementaciones los estudiantes no pudieron realizar la cuarta actividad, sino que el PMFI a cargo mostró como se realizaba el cálculo desde el enfoque Laplaciano en un contexto continuo. Esto se debe principalmente, a la poca experiencia en aula con la que contaban los PMFI, pues como recordaremos, ellos se encontraban en su formación inicial en ese entonces. También señalaron dificultades sobre los conocimientos previos de los estudiantes en geometría, específicamente señalan:

> ***PF2**: …observamos igual una deficiencia de conocimientos previos de probabilidad y de geometría…*
>
> ***PF1**: En el caso de nosotros no alcanzamos a hacer el cálculo teórico en nuestra implementación…*

CONCLUSIONES

En relación con el ETM idóneo potencial, haremos referencia a tres aspectos que involucran la planificación y el diseño de la clase por parte de los PMFI. Podemos dar cuenta que este contiene la misma estructura que la situación didáctica que ellos vivenciaron en una investigación realizada por las investigadoras sobre el ETM personal de los PMFI. Además, las hipótesis del experimento aleatorio no se consideraron en el diseño, por lo que no se observó la equivalencia entre el experimento real y el simulado, a pesar de que la intención de los PMFI era asegurar dicha equivalencia. Esto provocó que el modelo de experimento aleatorio simulado permaneciera oculto en el proceso de simulación a través de Excel, cuestión importante de considerar, pues sino se corre el riesgo que pensar que se está simulando el experimento real y no el experimento aleatorio. Finalmente, para el diseño de la clase se consideró el enfoque de modelización, sin embargo, este no se manifiesta explícito en la propuesta, lo cual es reconocido por los PMFI durante la entrevista, existiendo una brecha entre los sustentos teóricos o conceptuales del diseño y este propiamente tal. Al respecto, se plantea una oportunidad para incorporar asignaturas o talleres en la formación inicial de profesores que traten la modelización, modelización en probabilidad y los diferentes enfoques de la probabilidad.

A cerca del ETM idóneo efectivo, podemos señalar el apego al diseño de la propuesta de innovación, nos parece relevante resaltar que los PMFI no variaron su planificación de la clase (y por ende la secuencia didáctica) a pesar de que surgieron preguntas interesantes de los estudiantes que pudieron haber cambiado el diseño de la clase, de modo que la simulación hubiese sido una validación del resultado teórico, en vez de ser un tránsito entre un trabajo con material concreto y con herramientas teóricas. Esta cuestión es esperable que ocurra, pues los PMFI se encontraban en su formación inicial, por lo que cuentan con poca experiencia de práctica en el aula escolar.

Sobre nociones probabilísticas del referencial teórico tensionadas, nos parece importante destacar que no se hizo alusión a ellas de forma explícita durante las implementaciones, tales como, espacio muestral y variable aleatoria. Sin embargo, se institucionalizaron los enfoques intuitivos, frecuentista y laplaciano en un entorno continuo. A pesar de que en la planificación de la clase si se mencionan las variables aleatorias involucradas, no se explicitó el espacio muestral del experimento aleatorio, ni en el diseño, ni en la implementación. Otra noción importante, es la de experimento aleatorio, durante la implementación no se consideraron los supuestos del experimento, tampoco el protocolo experimental. Cuestión que es reconocida por los PMFI en espacio reflexivos posteriores.

Dichos espacios reflexivos hacen alusión sobre su propia práctica docente y también sobre su preparación de clase, esto es una confrontación entre el ETM idóneo potencial y el ETM idóneo efectivo, en un proceso de autoevaluación; como si se tratara de un ETM ***idóneo autoevaluativo.*** En la sesión de trabajo del tema 3, se discutió lo que el profesor reflexiona sobre su preparación de clase y la puesta en práctica de dicha clase. Cuestión que se podrá seguir profundizando para presentarlo en un próximo simposio.

BIBLIOGRAFÍA

Batanero, C. (2022). Training Teachers to Teach Probability: A Promising Research Area. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, 729-734.

Batanero, C., Henry, M., & Parzysz, B. (2005). The nature of chance and probability. In G. Jones (Ed.), *Exploring probablity in school: Challenges for teaching and learning* (pp. 15-37). Springer.

Bisquerra, R. (2019). *Metodología de la Investigación Educativa*. Editorial La Muralla, Madrid, España, sexta edición.

Chaput, B., Girard, J. C., & Henry, M. (2011). Frequentist Approach: Modelling and Simulation in Statistics and Probability Teaching. In C. Batanero, G. Burrill, & C. Reading (Eds.), *Teaching Statistics in school mathematics challenges for teaching and teacher education. A joint ICMI and IASE study* (Vol. 14, pp. 85-95). New York: Springer.

Dayal, H. C., & Sharma, S. (2020). Probability concepts of secondary pre-service teachers in a game context. *Australian Journal of Teacher Education*, *45*(5), 91-109.

Kuzniak, A. (2022). The Theory of Mathematical Working Spaces – Theoretical Characteristics. In *Mathematical Work in Educational Context* (pp. 3-31). Springer, Cham.

Kuzniak, A., Tanguay, D., & Elia, I. (2016). Mathematical Working Spaces in schooling: an introduction. *ZDM - International Journal on Mathematics Education*, *48*(6), 721-737.

Machuca, K., & Montoya, E. (2022). The Mathematical Work of Chilean Secondary Teachers in the Domain of Probability. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, *22*(3), 558-575.

Martin, V., & Thibault, M. (2016). Regards québécois sur sept décennies de recherche liée à l'apprentissage et à l'enseignement des probabilités. *Annales de Didactiques et de Sciences Cognitives*, *21*, 79-116.

Parzysz, B. (2011). Quelques questions didactiques de la statistique et des probabilités. *Annales de Didactique et Des Sciences Cognitives*, *16*, 127-147.

Rodríguez, F., Díaz, D., & Vásquez, C. (2018). Evaluación de la alfabetización probabilística del profesorado en formación y en activo. *Estudios Pedagógicos (Valdivia)*, *44*(1), 135-156.

Ruiz, J. I. (2012). *Teoría y práctica de la investigación cualitativa*. Universidad de Deusto.

Sanchez, E., & Chernoff, E. J. (2022). La Enseñanza y el Aprendizaje de la Probabilidad en el 14º Congreso Internacional de Educación Matemática: Continuación del Trabajo Continuo del Grupo de Estudio Temático 11. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, 513-520.

Stake, R. (2010). *Investigación con estudio de casos*. Editorial Morata, Madrid, quinta edición.

INTERPRETACIÓN DEL CONDICIONAL POR FUTUROS PROFESORES DE EDUCACIÓN PRIMARIA

Aránzazu Dolz[1, 2], Inés M. Gómez-Chacón[2]

[1] CUNEF Universidad [2] Universidad Complutense de Madrid, España;
ardolz@ucm.es , igomezchacon@mat.ucm.es

En esta última década se ha incrementado el interés en la investigación por el papel de la Lógica en la enseñanza, el aprendizaje y la producción de conocimientos. En los programas de estudios universitarios españoles del futuro profesor de Educación Primaria el contenido de lógica *se incluye en los temarios de las asignaturas de matemáticas y su didáctica a través ciertas áreas de estudio que abordan el pensamiento lógico-matemático en el desarrollo de habilidades matemáticas, si bien es cierto que estos contenidos no aparecen de forma explícita. En esta comunicación se explorará en futuros profesores de Educación Primaria cómo evalúan el condicional en una tarea contextualizada en la vida cotidiana, en concreto en la tarea del Laberinto utilizada en otros contextos de la Educación Matemática y se compararán los resultados con otros estudios realizados con la misma tarea.*

Lógica, Futuros Profesores, Educación Primaria, Condicional.

INTRODUCCIÓN

En esta última década se ha incrementado el interés en la investigación por el papel de los contenidos de lógica en la enseñanza, el aprendizaje y la producción de conocimientos (Durand-Guerrier, 2003 y Mesnil, 2014). La lógica se usa tanto en la vida cotidiana como dentro de los discursos científicos más formales, como puede ser en el aprendizaje de conceptos matemáticos donde es habitual que se usen expresiones como *"si… entonces…"*. En concreto y tal y como afirman estas autoras, los estudiantes presentan serias dificultades asociadas a la comprensión de los conectores lógicos de la implicación y condicional (Durand-Guerrier, 2003). No solo se pone el foco de investigación en la figura del estudiante sino, como afirman Durand-Guerrier *et al.* 2012, en muchos países los futuros profesores, tanto de enseñanza Primaria como Secundaria, llegan a la universidad con escasas habilidades referentes a la lógica del razonamiento matemático, es por ello que una de las preguntas que se hacen estos autores es si dichos futuros profesores sin haber recibido principios lógicos básicos, serán capaces de guiar el razonamiento de sus estudiantes.

El objetivo de la presente investigación es explorar en futuros profesores de Educación Primaria cómo evalúan el condicional en un enunciado contextualizado en la vida cotidiana en la tarea del Laberinto. El estudio se contextualiza dentro de la investigación de la tesis doctoral de la primera autora sobre *lógica e intuición como herramientas de razonamiento matemático para profesores*. En esta fase del desarrollo de la tesis se está precisando el diseño de tareas para el diagnóstico de los distintos conectores lógicos en la formación de profesores.

En la teoría ETM (Espacio de Trabajo Matemático) una de las herramientas metodológicas clave son las tareas para el análisis del trabajo matemático (Nechache & Gómez-Chacón, 2022). En este análisis se considera la perspectiva del contenido matemático subyacente a la tarea y los posibles procesos cognitivos en juego. Las tareas no se diseñan independientemente de las situaciones didácticas en las que se implementan y constituyen "una herramienta para identificar y analizar las rupturas y confinamientos del trabajo matemático en algunas de las génesis del trabajo, así como para identificar los bloqueos y malentendidos que pueden producirse durante la ejecución" (p. 54)

En esta comunicación se analiza la implementación en futuros profesores de Primaria de la tarea del laberinto que involucra el uso de condicional y conectores lógicos. El laberinto se ha utilizado en otras investigaciones internacionales con objeto de identificar el rol de la lógica en el razonamiento matemático condicional y en procesos de demostración. Consideramos que esta comparativa permite destacar invariantes que constituyen el trabajo matemático (completo, conforme, correcto) en relación con el uso del condicional.

FUNDAMENTOS TEÓRICOS

En esta sección se sitúa brevemente el contenido de lógica matemática en el currículo y plan de estudio en la formación de profesores, pasando seguidamente a exponer los aspectos teóricos en relación al contenido matemático subyacente a la tarea, las definiciones y aspectos relevantes sobre la interpretación del condicional.

Currículo y lógica Matemática

El currículum educativo español de Educación obligatoria en la etapa de Primaria, la lógica y la teoría de conjuntos fueron dos líneas de conocimiento que se impartían específicamente en los planes de estudio con la aprobación de la Ley General de Educación (LGE) en 1970 (BOE-A-1970-852 Ley 14/1970, de 4 de Agosto, General de Educación y Financiamiento de La Reforma Educativa, pp. 19966). Durante este periodo, los estudiantes para futuros maestros de E.G.B. (Educación General Básica) cursaban conocimientos específicos referentes a la lógica, lógica de circuitos y teoría de conjuntos. Estos contenidos se eliminaron de los currículos de Educación Primaria y Educación Secundaria con la entrada en vigor de la siguiente ley de educación, la LOGSE, aprobada en 1990 con la Ley Orgánica 1/1990, de 3 de octubre, de Ordenación General del Sistema Educativo. (BOE-A-1990-24172 Ley Orgánica 1/1990, de 3 de Octubre, de Ordenación General Del Sistema Educativo)

En relación con los planes de estudios del futuro profesor de Educación Primaria, se incluye en los temarios de las asignaturas referentes a las matemáticas y su didáctica ciertas áreas de estudio que abordan el pensamiento lógico-matemático en el desarrollo de habilidades matemáticas en la etapa de Infantil y Primaria. Autores como Alsina (2006), Ruiz Higueras (2005), Canals (2009) dan cuenta de ello. Sin embargo, no existe a penas en el contexto español, literatura asociada a la situación actual de la lógica y la

teoría de conjuntos como ramas independientes tanto en la formación de futuros profesores de Primaria como en las aulas de alumnos de Primaria. En cambio, sí existen en dichos planes de estudio contenidos que favorecen la adquisición del *Sentido Numérico y Algebraico*, pero no a lo referido a lo puramente lógico o conjuntista, aplicable a cualquier ámbito de uso común y con especial reseña al ya conocido Pensamiento Computacional, cuya aparición en los currículums es explícita y además se le ha dado bastante importancia. El currículo apela a la abstracción como área a trabajar explícitamente mediante actividades desenchufadas y la descomposición de una tarea en tareas más simples. Esto se puede asociar a la lógica proposicional, donde cualquier enunciado complejo se puede atomizar en proposiciones más simples unidas por conectores lógicos.

Enfoques referentes al condicional

De acuerdo con Durand-Guerrier, (2003) y Durand-Guerrier *et al.* (2012), definimos la lógica como la disciplina que trata tanto de los aspectos semánticos y sintácticos en la organización del discurso matemático que se presenta en la tarea, por lo que el concepto de lógica de primer orden es necesario.

El conector lógico del condicional en el que se centra el estudio forma parte de esta lógica de primer orden. Se entiende por evaluar una sentencia condicional o implicación el determinar el resultado de la sentencia *"si P, entonces Q"*, donde a *P* se le llama antecedente y a *Q* consecuente. Para evaluar dicha sentencia existen numerosas teorías en las cuales se tienen en cuenta tanto conceptos propiamente referentes a la lógica matemática, como factores psicológicos que afecten al individuo que evalúa dicha sentencia. Autores como Valiña *et al.* (2014) defienden la postura de que otros factores, tales como la evidencia empírica (como por ejemplo la evidencia de tener claro el camino que proporciona el resultado), reflejan una forma de razonar diferente a la que prescribe la lógica. Se precisa a continuación distintas aproximaciones o enfoques.

Enfoque del condicional de Durand-Guerrier (Quine)

Durand-Guerrier (2003) sostiene la idea de extender la noción clásica de implicación condicional para poder llegar a su comprensión. Idea que viene apoyada por los estudios realizados con profesores en el contexto francés, en el que ha constado que los profesores no diferencian el concepto de condicional entre las opciones de interpretarlo como un elemento referente al lenguaje cotidiano, como un conector proposicional, como el *"generalized conditional*" (el que involucra a la lógica de primer orden) o como una afirmación lógicamente válida. Durand-Guerrier, basándose en Quine (1950) (citado en Durand-Guerrier, 2003, p. 9) identifica distintas acepciones o tipos de condicional:

1. *Interpretación cotidiana*, en este caso la veracidad o falsedad del antecedente es irrelevante para el sujeto. Para Quine (1966) es la forma natural en la que las personas interpretan sentencias condicionales en el día a día. Existe entonces como resultado a

evaluar la afirmación la postura de que ésta pueda determinarse como indiferente o de que sea imposible determinar la verdad o falsedad de la misma.

2. El *condicional material*, basado en las reglas de la lógica proposicional expuestas en la tabla de verdad. La sentencia *"si P entonces Q"* sólo será verdadera siempre y cuando la consecuencia Q lo sea también.

3. *Validaciones lógicas*, entendidas como la relación entre sentencias proposicionales que a su vez expresan una validación lógica (Quine, 1950). Para Inglis (2006)esta categorización estaría enmarcada en el modo Modus Tollens del condicional material, el cual consiste en deducir $\neg P$ asumiendo $\neg Q$.

4. El *"generalized conditional"*. Enmarcado dentro de la lógica de primer orden tiene en cuenta el dominio de los predicados. Este condicional tiene la forma antes señalada y bajo esta lógica ni *P(x)* ni *Q(x)* son verdaderas o falsas sin contextualizar cuál es la variable *x*.

Enfoque del condicional de Inglis y Simpson (test de Ramsey, Toulmin)

Como se ha señalado, existen muchas clasificaciones distintas del condicional, pero la del *"condicional material"* parece ser la noción menos natural para su interpretación. Existen varias teorías que integran la dimensión psicológica del sujeto a la hora de juzgar en el día a día la veracidad o la falsedad de una sentencia condicional. Una de ellas es la que se conoce como Ramsey Test, esta se basa en asumir que cuando evaluamos una sentencia condicional, añadimos la información de que nos da el antecedente *P* en nuestro sistema de conocimiento, y evaluamos el consecuente *Q* en base al nivel de creencia de *P*, fijando así nuestro nivel de creencia de *Q* dada *P* (Ramsey, 1931).

Tal como reseña Inglis (2006), basado en los trabajos de Evans y Over (2004), el *"condicional suposicional"* que se acaba de describir sugiere que el individuo compara la probabilidad de $P \wedge Q$ y la de $P \wedge \neg Q$, si $\wp(P \wedge Q)$ es mayor comparada con $\wp(P \wedge \neg Q)$, entonces $\wp(Q|P)$ es mayor, con lo que $\wp(P \rightarrow Q)$ es juzgada de ser mayor. De la misma forma, si el individuo cree que la probabilidad $\wp(P \wedge \neg Q)$ es mayor, entonces $\wp(Q|P)$ será menor. Estos autores consideran de gran influencia el procesamiento dual y la influencia de los sistemas de creencias. Se estima que las creencias individuales, como parte del sistema metacognitivo están involucradas en la evaluación de la situación y sirven para modelar las metas en interacción con el contexto (Gómez-Chacón *et al.*, 2014).

Por último, se precisa la definición de lo denominado *"warranted conditional"*, basado en los trabajos de Weber y Alcock (2005) al seguir el modelo argumentativo de Toulmin (1958), y que está estrechamente ligado al condicional evaluado en el Test de Ramsey. Este tipo de evaluación del condicional nos dice que el sujeto juzga de verdadero o falso una implicación si éste tiene garantías de deducir la conclusión *Q* de los datos que nos proporciona *P*. Es decir, en relación con el Test de Ramsey encontramos que el sujeto juzga con una alta probabilidad la veracidad de la sentencia

$P \rightarrow Q$ si tiene una alta creencia en la garantía que proporcionan los datos del antecedente *P*. Utilizaremos esta teoría para intentar dar una explicación de los resultados obtenidos de verdadero.

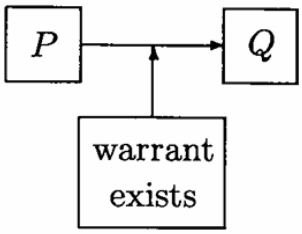


Figura 1: *"Warranted conditional"* en términos del esquema de argumentación de Toulmin.

Objetivo del estudio

Los objetivos de la presente investigación son:

1) Explorar en futuros profesores de Educación Primaria españoles cómo evalúan el condicional en una tarea contextualizada en la vida cotidiana, en concreto en la tarea del Laberinto utilizada en otros contextos culturales.

2) Comparar los resultados con otros estudios realizados con la misma tarea por Durand-Guerrier (2003) e Inglis y Simpson (2006).

MÉTODO

Contexto y participantes

El docente presentó a nivel general el Laberinto a un grupo de 36 futuros profesores de Educación Primaria (estudiantes de tercer curso del Grado de Educación Primaria) en el contexto de una clase de Matemáticas y su Didáctica. Su papel tras presentar la tarea y leer el enunciado fue meramente de espectador. El grupo de estudio no ha tenido ninguna formación previa en conceptos de lógica matemática. La tarea se resuelve de manera individual.

Tarea: El Laberinto.

La tarea denominada El Laberinto fue introducida por Durand-Guerrier (2003) en investigaciones de didáctica de la matemática. En nuestro estudio al enunciado inicial formulado mediante seis cuestiones se le añadió un ejemplo por considerarlo mejor para facilitar la comprensión de los futuros profesores de Primaria.

"Una persona llamada X logró pasar a través de un Laberinto sin usar la misma puerta dos veces. Para cada una de las siguientes frases, tienes que decidir si es verdadera (V), falsa (F), o si no hay suficientes pistas para saberlo (N). Por ejemplo, la frase 'X pasó por C' es una frase verdadera (V), pues C es la única entrada al Laberinto.

1.X pasó por P

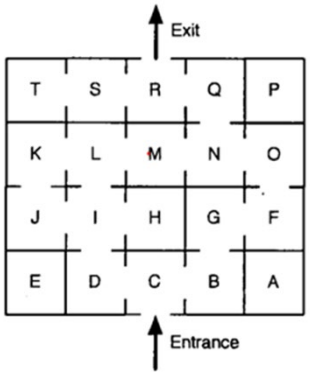
2.X pasó por N

3.X pasó por M

4.Si X pasó por O, entonces X pasó por F

5.Si X pasó por K, entonces X pasó por L

6.Si X pasó por L, entonces X pasó por K"



Tal como validan resultados previos las respuestas a las preguntas 1 a 5 no presentan una dificultad reseñable. Es en la pregunta 6 donde se presentan mayores dificultades y es ahí donde se comparan e interpretan los resultados del presente estudio, haciendo referencia a las teorías subyacentes de los enfoques anteriormente reseñados.

ANÁLISIS DE DATOS

El análisis de las producciones de los participantes al resolver la tarea se realiza de forma cualitativa. Se adscriben estimaciones cuantitativas para especificar porcentajes del razonamiento matemático empleado, se clasifican tipos de soluciones (Verdadero, Falso y No hay suficientes pistas) y se categorizan las diversas justificaciones de solución dada: contraejemplo, niega Q + contraejemplo y no es necesario.

Se utiliza la pregunta 5 para hacer una segunda revisión más refinada de los datos. Se comparan las respuestas de la pregunta 6 de aquellos que contestaron correctamente (Verdadero) a la pregunta 5. A todos los participantes se les pide que justifiquen todas sus respuestas.

Hacemos notar que de acuerdo con lo presentado en la sección del marco teórico se ha establecido para la realización del análisis cualitativo de los datos la tipología de condicional que actúa en sus respuestas. Siguiendo la aproximación de Durand-Guerrier (2003) se puede contextualizar la pregunta 6 del Laberinto como un *"generalized conditional"*, pues al dar su respuesta (Falso) tienen en cuenta el cuantificador *"para todo"*, que expresa una necesidad de que para que la sentencia sea verdadera, ésta tenga que serlo "*para todos los caminos posibles*". En cambio, la respuesta de "*No hay suficientes pistas*" está referida a la primera forma de evaluar el condicional. Esta autora considera esta última forma como la respuesta válida y correcta, afirmando que "no podemos decidir si la respuesta a 6 es verdadera o falsa sin saber más acerca de la ruta de X". El Test de Ramsey apoyaría esta tesis de Durand-Guerrier (2003), bajo la cual la respuesta más acertada debería de ser la de N.

Si seguimos el enfoque de Inglis y Simpson (2006), en la pregunta 6 los participantes hipotéticamente pueden añadir que "X pasó por L" a sus creencias y en base a ello

evalúan si "X pasó por K". Dada la disposición de los caminos del Laberinto, afirman que $\wp(X \text{ pasó por } K \mid X \text{ pasó por } L) = 0{,}5$

con lo que bajo la perspectiva del "*condicional suposicional*" parece ser la respuesta "No hay suficientes pistas" la más correcta dado que no se tiene una creencia más o menos fuerte a que sea verdadera o sea falsa, (ha podido o no pasar por K si ha pasado por L).

Desde el punto de vista matemático, descartamos la evaluación de la sentencia de la pregunta número 6 del Laberinto mediante el condicional material, el cual determina como verdadera la sentencia siempre y cuando el consecuente *Q* no sea falso, en cuyo caso la sentencia será evaluada como falsa. Sí tendremos en cuenta la llamada lógica de predicados o lógica de primer orden, en la cual la sentencia "*Si P, entonces Q*" se convierte en como $P(x) \rightarrow Q(x)$, donde la variable $x \in X$ es libre y se encuentra dentro de *X*, a lo que llamamos universo. Este tipo de enunciados condicionales vistos desde la lógica de primer orden permiten evaluarlos como verdaderos o falsos teniendo en cuenta que ambas condiciones se deben de satisfacer o no por sí mismas dentro de un contexto, al que llamaremos dominio de interpretación. Para ello, necesitamos hacer uso de los cuantificadores universales, y en nuestro caso, la sentencia a estudiar se podría formalizar como $\forall x \in X\ (P(x) \rightarrow Q(x))$, donde *P* y *Q* son las diferentes sentencias que nos propone el enunciado y el universo X serían todos los posibles caminos que se pueden realizar dentro del Laberinto, donde x sería de todos los posibles uno en concreto.

RESULTADOS

En primer lugar, se hace una perspectiva general de los resultados obtenidos a la pregunta 6 de manera comparativa entre las respuestas obtenidas por los futuros profesores de Educación Primaria (PT) y los trabajos de Inglis y Simpson (2006) y Durand-Guerrier (2003).

Respuestas	PT	I y S (2006)	D-G (2003)
F	40	44	-
N	24	54	60
V	36	2	-

Tabla 1: Resultados comparativos, en porcentajes, a la pregunta 6.

Nota: Durand-Guerrier (2003) nos da en su trabajo el resultado para la respuesta N, no para los de F y V.

A continuación, se muestran las respuestas y se clasifican éstas en base al tipo de soluciones y de la justificación asociada que aportan los sujetos. Las categorías se hicieron bajo un análisis de las respuestas textuales de los alumnos. Se clasificaron en primer lugar por la respuesta directa (V, N y F), y en segundo lugar por el tipo de justificación.

Futuros profesores de Educación Primaria		
Tipo	**Respuestas PT**	**Tipo de justificación:**
TIPO 1: FALSO	**PT5:** "Si X pasa por L no necesariamente como he comentado antes haya tenido que pasar por K porque puede acceder por L."	"no es necesario"
	PT6: "Falso porque para llegar a la puerta L no es necesario pasar por la puerta K ya que hay otro camino para llegar a L."	"no es necesario"
	PT12: "Falso, ya que K va antes que la L y si no se estaría retrocediendo."	justificación errónea
TIPO 2: N	**PT1**: "Depende del recorrido porque dependiendo de la dirección que tomes pasas por esas letras, pero puedes no pasar por ellas si vas de la L a la I directamente, te saltarías la K"	"depende"
	PT15:"No hay suficientes pistas para saberlo porque para llegar a L hay dos caminos, entonces dependiendo de lo que quiera hacer X podrá elegir un camino u otro, es decir, X puede pasar por K para llegar a L pero no es una condición obligatoria."	"depende"
	PT7: "He contestado N porque para poder salir no hace falta pasar por K ya que se sale por L".	"no es necesario"
	PT8: "N porque para poder salir no hace falta pasar por la puerta K, al salir por la L."	"no es necesario"
TIPO 3: VERDA-DERO	**PT4:** "Verdadero, debido a que la única forma de llegar a L desde la entrada y que a continuación se pueda continuar con el recorrido es por la letra K."	no ve otra opción
	PT10: "Verdadero, ya que si X pasó por L antes ha tenido que pasar por K, por tanto esta afirmación es correcta."	no ve otra opción
	PT11: "Verdadero, al pasar por L también pasó por K, ya que el camino seguido para pasar por K previamente, posteriormente pasa por K para llegar a la salida."	no ve otra opción
	PT13: "Verdadero por seguir el patrón C-D-I-J-K-L-M-N-Q-R."	no ve otra opción
	PT14: "Verdadero por seguir el patrón C-D-I-J-K-L-M-N-Q-R."	no ve otra opción
	PT16: "He conestado verdadero ya que K es la casilla anterior a L por lo que ha tenido que pasar anteriormente para llegar a L."	no ve otra opción

Tabla 2: Selección de 13 respuestas a la pregunta 6 del Laberinto del grupo de futuros profesores de Educación Primaria.

Respecto a los resultados, señalamos que en los trabajos de Inglis y Simpson (2006) las respuestas dadas como Falso se enmarcaban dentro de la versión de *"generalized conditional"*, debido a que los sujetos de estudio pueden encontrar dentro de todas las posibilidades un contraejemplo, con lo que juzgan de no verdadera la condición. Las respuestas de verdadero, véase por ejemplo la respuesta de **PT10** muestran un claro ejemplo de interpretación condicional que no corresponde al condicional material, sino que el estudiante en concreto no ve otra opción de camino posible.

DISCUSIÓN DE RESULTADOS Y CONCLUSIONES

Teniendo en cuenta la génesis discursiva de los sujetos, hemos obtenido un análisis más fino del trabajo matemático de los alumnos principalmente en cuanto a lo que la justificación de la tarea se refiere. Se considera que los resultados obtenidos son interesantes por dos motivos, el primero de ellos por el alto porcentaje obtenido en la respuesta asociada a "Verdadero" en el grupo, y el segundo de ellos por las diferencias

entre nuestros resultados y los obtenidos en los estudios de Durand-Guerrier (2003), Barrier *et al.* (2019) e Inglis y Simpson (2006).

Respecto a las posibles explicaciones de la respuesta "Verdadero", desde el punto de vista del *condicional material*, referente a las tablas de verdad, la sentencia será evaluada como falsa solo cuando el consecuente lo sea, en el resto de los casos la sentencia será verdadera. En nuestro caso, ésta podría ser una posible explicación para los resultados de "Verdadero" obtenidos por los futuros profesores de Educación Primaria, pero descartamos esta posibilidad porque no se ha evidenciado suficiente en su justificación que estén aplicando conceptos de lógica formal, además de que en su formación previa no constan conocimientos sobre las leyes del condicional material. Coincidimos pues con Weber y Alcock (2005), quienes adoptan el modelo argumentativo de Toulmin (1958), en la afirmación de que, si un condicional está resuelto de una manera matemáticamente correcta en el sentido del condicional material, pero éste no tiene un alto grado de garantía en las creencias de que la sentencia sea verdadera o falsa de quien lo evalúa (*"warranted conditional"*), entonces no puede saberse la conclusión. Estos autores señalan que sería importante completar con otras informaciones de los sujetos sobre los motivos de elección de dicha respuesta para identificar la y importancia de la influencia de la dimensión psicológica e intuitiva en estos motivos.

Los resultados, nos hacen poner en cuestión la idea sostenida por Inglis y Simpson (2006) de que en un contexto cotidiano los estudiantes de matemáticas razonan el condicional como cualquier persona. En el estudio nos encontramos bajo un contexto en el cual la diferencia de los resultados entre los obtenidos por Inglis y Simpson (2006) referentes a los sujetos de perfil matemático -con formación de Grado en Matemáticas- y los futuros profesores de Educación Primaria serían prácticamente similar, lo cual no ha sido así. Tal y como indican estos autores, basándose en la teoría del pensamiento dual (Evans y Over, 2004), la respuesta correcta sería la de "No hay suficientes pistas", puesto que los sujetos no tienen un grado ni alto ni bajo de creencia en la sentencia. Sin embargo, observamos que los futuros profesores de Educación Primaria sí tienen un alto grado de creencia en que es verdad, por lo que hay un gran porcentaje de respuestas Verdadero.

En el caso de las respuestas de los sujetos de perfil matemático de Inglis y Simpson (2006) cabe señalar que éstos no han tenido la suficiente garantía en los datos de que la premisa *P* sean correctos, por lo que han juzgado la sentencia de Falsa, en cambio, los futuros profesores de Educación Primaria sí han tenido un alto grado de creencia en que el camino indicado por la premisa *P* daba suficientes garantías para poder juzgar la sentencia completa de Verdadera. Además, analizando las respuestas de éstos, se puede llegar a la conclusión de que no han sido capaces de explorar más caminos posibles distintos a los que indica el enunciado, lo cual es a todas luces una comprensión limitada de la situación.

Desde el punto de vista del trabajo matemático, como posibles obstáculos didácticos podemos señalar la falta de costumbre en resolver problemas de este tipo, debido a la

ausencia en el currículo como se ha señalado al comienzo. La comprensión lectora del enunciado, el no tener en cuenta el citado universo del enunciado, es decir, todos los posibles caminos de los que la persona X puede servirse para salir del Laberinto, o el no recordar o terminar de comprender las instrucciones de este. De esta falta de costumbre ante problemas de este tipo, deriva por ejemplo la falta de estrategias de buscar contraejemplos, como sí hacen los estudiantes con formación matemática a la hora de dar sus respuestas. Durand-Guerrier (2003) señala que en los profesores el dar como solución la respuesta F puede ser indicador de una concepción del condicional que actuará como obstáculo didáctico y sus consecuentes influencias en la enseñanza. En esta línea nosotros consideramos que dar como V la respuesta también puede ser considerado un obstáculo didáctico importante.

Ante todo lo expuesto anteriormente, es natural hacerse la pregunta de cuánto sería de interesante, e incluso necesario, que los futuros profesores de Educación Primaria hubiesen sabido ver, al menos en su gran mayoría, otros posibles caminos por los cuales no haber elegido la respuesta de Verdadero. Se aboga por tanto por resaltar y poner esfuerzos en la necesidad de una formación en lógica en la formación del profesorado de Educación Primaria tal y como afirman, entre otros, autores como Barrier *et al.* (2019).

AGRADECIMIENTOS

Proyecto de Investigación Nacional PID2022-138325OB-I00, financiado por MICIU/AEI /10.13039/501100011033 y por FEDER, EU, y IMI (Instituto de Matemática Interdisciplinar).

REFERENCIAS

Alsina, A. (2006). *Cómo desarrollar el pensamiento matemático de 0 a 6 años*. Octaedro-EUMO.

Barrier, T., Durand-Guerrier, V., & Mesnil, Z. (2019). Logical analysis as a tool for didactic studies in mathematics. *Education et Didactique*, 13(1), 61-81. https://doi.org/10.4000/educationdidactique.3793

BOE-A-1970-852 Ley 14/1970, de 4 de agosto, General de Educación y Financiamiento de la Reforma Educativa. BOE. https://www.boe.es/buscar/doc.php?id=BOE-A-1970-852

BOE-A-1990-24172 Ley Orgánica 1/1990, de 3 de octubre, de Ordenación General del Sistema Educativo. *BOE.* https://www.boe.es/buscar/doc.php?id=BOE-A-1990-24172

Canals, M. A. (2009). *Lógica a todas las edades. Los dossiers de María Antonia Canals*. Octaedro.

Durand-Guerrier, V. (2003). Which notion of implication is the right one? From logical considerations to a didactic perspective. *Educational Studies in Mathematics, 53*(1), 5-34. https://doi.org/10.1023/A:1024661004375

Durand-Guerrier, V., Boero, P., Douek, N., Epp, S. S., & Tanguay, D. (2012). Examining the Role of Logic in Teaching Proof. New ICMI *Study Series* (Vol. 15, pp. 369-389). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-2129-6_16

Evans, J. St. B. T., & Over, D. E. (2004). *If*. Oxford University Press.

Evans, J. St. B. T., Over, D. E., & Handley, S. J. (2005). Suppositions, extensionality, and conditionals: A critique of the mental model theory of Johnson-Laird and Byrne (2002). *Psychological Review, 112*(4), 1040-1052. https://doi.org/10.1037/0033-295X.112.4.1040

Gómez-Chacón, I. M., García-Madruga, J. A., Vila, J. Ó., Elosúa, M. R., & Rodríguez, R. (2014). The dual processes hypothesis in mathematics performance: Beliefs, cognitive reflection, working memory and reasoning. *Learning and Individual Differences, 29*, 67-73. https://doi.org/10.1016/j.lindif.2013.10.001

Inglis, M. (2006). Dual processes in mathematics: Reasoning about conditionals. [Tesis doctoral, Universidad de Warwick]. http://go.warwick.ac.uk/wrap/2847

Mesnil, Z. (2014). La logique: d'un outil pour le langage et le raisonnement mathématique vers un objet d'enseignement. [Tesis doctoral, Universidad de París Diderot]. https://theses.fr/2014PA070095

Nechache, A., Gómez-Chacón, I.M. (2022). Methodological Aspects in the Theory of Mathematical Working Spaces. In: Kuzniak, A., Montoya-Delgadillo, E., Richard, P.R. (eds), Mathematical Work in Educational Context. *Mathematics Education in the Digital Era, vol 18* (pp.33-56). Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-030-90850-8_2

Quine, W.V.O. (1950). *Methods of Logic*. Holt, Rinehart & Winston.

Ramsey, F. P. (1990). General propositions and causality. En H. Mellor (Ed.) *Philosophical papers* (pp. 145-163). Cambridge University Press. (Trabajo original publicado en 1931).

Ruiz Higueras, L. (2005). La actividad lógica en Educación Infantil. En M. C. Chamorro (Ed.), *Didáctica de las Matemáticas para Educación Infantil*. Pearson.

Toulmin, S. E. (2003). *The Uses of Argument* (2nd ed.). Cambridge University Press.

Valiña, M. D., Martín, M., & Seoane, G. (2014). Importancia del conocimiento pragmático en inferencia condicional: una aproximación experimental. *Suma P sicológica. 21*(2), 81-88.

Weber, K., & Alcock, L. (2005). Using warranted implications to understand and validate proofs. *For the Learning of Mathematics, 25*(1), 34-38.

SELECCIÓN DE TAREAS QUE FOMENTAN DIFERENTES TIPOS DE SIGNIFICADOS Y TRABAJO MATEMÁTICO PARA LA FUNCIÓN

Gonzalo Espinoza-Vásquez[1], Paula Verdugo-Hernández[2], Carolina Henríquez-Rivas[3], Nuria Climent[4]

[1]Universidad Alberto Hurtado, [2]Universidad de Talca, [3]Universidad Católica del Maule, [4]Universidad de Huelva

Este escrito aborda la enseñanza de la función a través de la selección de tareas por parte de un profesor, observando el trabajo matemático que propone y el conocimiento que moviliza. Mediante una metodología cualitativa y un estudio de caso, se analiza un conjunto de tareas que estructuran la estrategia de enseñanza de este concepto. Se consideran elementos del modelo del MTSK y el ETM idóneo para este análisis. Los resultados muestran que las tareas matemáticas propuestas permiten caracterizar la enseñanza a través de los significados atribuidos a la función y las exigencias del trabajo matemático involucrado. Concluimos sobre cómo la comprensión del tema por parte del profesor y su conocimiento didáctico son elementos clave en el diseño del ETM idóneo.

INTRODUCCIÓN

El concepto de función ha motivado una gran cantidad de estudios, desde diferentes enfoques. Este tema es reconocido tanto por su importancia en el desarrollo de la matemática como por las complejidades que presenta su comprensión y enseñanza. En particular, el currículo escolar chileno lo propone como tema de estudio en el 8vo año de enseñanza básica (13-14 años) (Ministerio de Educación, MINEDUC, 2016). Allí, se busca que los estudiantes comprendan la función (lineal y afín) por medio de un cambio lineal, usando tablas, comparaciones con máquinas, estableciendo reglas entre variables y en diferentes representaciones. En este documento oficial, las funciones lineales y afín son los primeros ejemplos de función que se presentan como tal a los estudiantes, sin embargo, la identificación de patrones y la abstracción de la idea de número comienza mucho antes como parte del desarrollo del pensamiento funcional a través de los patrones, secuencias y desarrollo de la idea de número (e.g., Castro *et al.*, 2017; López, 2023).

Por su parte, los estándares chilenos para la formación docente (MINEDUC, 2021) plantean exigencias sobre el conocimiento disciplinar y didáctico-disciplinar del profesorado. Entre ellos están los referidos a las capacidades para conducir la enseñanza de este tema, así como comprender, particularmente, la red conceptual de la función. Estos requerimientos fomentan las investigaciones en torno al concepto de función y sobre lo que promueve el profesor en el aula para su comprensión.

Este estudio pone en el centro al profesor, los conocimientos que moviliza para conducir el proceso de enseñanza y el trabajo matemático que propone en torno a la función. Se resalta la necesidad de que el profesor cuente tanto con conocimientos disciplinares como didácticos para su labor (e.g., Alcalá-Tejada y Aké, 2024; Carrillo

et al., 2018; Scheiner *et al.*, 2019) y que estos conocimientos se manifiesten en sus propuestas de enseñanza. En este sentido, observamos que la propuesta de tareas matemáticas refleja dicho conocimiento y son promotoras de un trabajo matemático específico de acuerdo a los objetivos de enseñanza-aprendizaje que propone el docente.

Atendiendo al conocimiento especializado del profesor durante la enseñanza de la función, Espinoza (2020) plantea como un tema abierto el estudiar los diferentes significados de este concepto, identificados también en las propuestas oficiales (e.g. Pino-Fan *et al.*, 2019), y de los objetos matemáticos en general. La profundización en los significados como parte del conocimiento especializado difiere a los aportes de otros estudios (e.g. Pino-Fan *et al.*, 2019; Ribeiro y Cury, 2018), al considerar los usos que se le da a la función durante la enseñanza y la comprensión del tema por parte del profesor en contraste con sus representaciones o definiciones.

De este modo, para avanzar en la comprensión de la práctica del docente y los conocimientos que pone en juego, este escrito busca analizar el trabajo matemático y conocimiento especializado del profesor cuando propone tareas sobre funciones a sus estudiantes. Así, planteamos las preguntas: ¿cómo es el trabajo matemático que fomenta el docente a través de las tareas que propone? y ¿cuáles son los significados que le atribuye a la función en estas tareas?

MARCO TEÓRICO

Para atender estas interrogantes, consideramos las teorías de los Espacios de Trabajo Matemático (en adelante ThETM) y el Conocimiento Especializado del Profesor de Matemática (en adelante ThMTSK), junto a la complementariedad (Prediger *et al.*, 2008) entre ambas y sus potencialidades para refinar el análisis sobre la práctica del profesor. Esto continúa trabajos previos del equipo, en los que se avanza en la comprensión de la práctica del profesor mediante la combinación de ambas teorías (por ejemplo, Espinoza-Vásquez *et al.*, 2022).

La ThETM permite el estudio del quehacer matemático en torno a tareas matemáticas y, a partir de ellas, posibilita el estudio de su enseñanza y aprendizaje. La configuración del ETM se organiza mediante un plano epistemológico, que incluye las componentes de referencial, artefacto y representamen, y un plano cognitivo, que incluye las componentes de prueba, construcción y visualización. Estas componentes se relacionan dando origen a las génesis discursiva, instrumental y semiótica. La articulación de dos de estas génesis, a su vez, posibilita la definición de tres planos, a saber, los planos [Sem-Dis], [Sem-Ins] e [Ins-Dis].

Según Kuzniak *et al.* (2022), ThETM distingue tres tipos de ETM: personal, idóneo y de referencia. El ETM de referencia se refiere al trabajo organizado por los criterios y elementos disciplinares especificados en una organización de enseñanza. El ETM idóneo corresponde a un acondicionamiento del ETM de referencia con fines de enseñanza, para permitir el trabajo matemático de quien resuelva la tarea. Finalmente,

el ETM personal corresponde a la organización que hace un individuo según sus propias características cognitivas de cara al abordaje y resolución de la tarea.

Por otra parte, la teoría del Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (ThMTSK) permite el análisis del conocimiento del profesor de cara a la enseñanza a partir de su sistema de dominios, subdominios y categorías. La ThMTSK se presenta como una herramienta de análisis de las prácticas docentes en términos de los conocimientos que posee, manifiesta o debe poseer el profesor para atender la enseñanza de las matemáticas (Carrillo *et al.*, 2018). Este se organiza en tres dominios: 1) Conocimiento Matemático (MK), con los subdominios del conocimiento de los temas (KoT), de la estructura de las Matemáticas (KSM) y de las prácticas en Matemáticas (KPM); 2) Conocimiento Didáctico del Contenido (PCK), que incluye el conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KMT), el conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas (KFLM) y aquello que está estipulado que se aprenda en un determinado nivel o etapa escolar (KMLS); y 3) Creencias sobre las matemáticas, su aprendizaje y su enseñanza.

Dado que nuestro objetivo apunta a observar y comprender la propuesta de enseñanza del profesor, consideramos aquí el ETM idóneo, su estructuración para la enseñanza de la función junto con el subdominio de conocimientos de los temas y el PCK, cuya articulación plantea un tema abierto para estudiar en la relación entre los modelos.

Asimismo, consideramos una de las proyecciones del trabajo de Espinoza (2020) sobre la atribución de significados para la función, como parte del KoT, sustentado en que este subdominio abarca el *qué* y *cómo* conoce los temas el profesor, es decir, la forma de comprender los objetos matemáticos, traducidos en dicho trabajo como *significados*. Tales significados, de acuerdo con Espinoza (2020), se presentan a través de la definición del concepto, las formas de uso, las comparaciones y sus representaciones. Su presencia en la enseñanza, así como el resto de los conocimientos contenidos en el KoT y el MK en general, inciden en las propuestas de enseñanza del profesor.

METODOLOGÍA

Para el logro del objetivo, se propone una investigación de corte cualitativo, bajo un paradigma interpretativo. Se trata de un estudio de un único caso de tipo instrumental (Stake, 2007), correspondiente a un profesor (identificado como PM) de Educación Básica, con más de 15 años de experiencia docente. Al momento de recolectar los datos, PM se encontraba ejerciendo en el segundo ciclo de Educación Básica (9-13 años). Respecto de su biografía profesional, PM cuenta con cursos de profundización en la enseñanza de la Matemática, más de 15 años de experiencia docente y está categorizado como *experto II* según la asignación de tramos en la Carrera Docente. PM se desempeña en un establecimiento educacional público en la zona central de Chile y atiende el 8vo año básico (13-14 años), donde enseñó el concepto de función.

Los datos corresponden a las intervenciones del profesor y los diálogos con sus estudiantes en las clases que PM destinó al concepto de función. Para recolectar los

datos, se observaron (de forma no participante) y videograbaron las siete clases destinadas al tema. Además, se realizaron fotografías de la pizarra y de los documentos de trabajo de los estudiantes (guías o texto escolar) donde el docente presentó las tareas al curso. Las videograbaciones se transcribieron, llevándolas a una planilla electrónica para su tratamiento. Sobre las fotografías y transcripciones se realizó un análisis del contenido (Bardín, 1996) utilizando las categorías de ThMTSK y los componentes de ThETM.

Para este reporte se seleccionaron tres tareas (*t1, t2* y *t3*), presentadas en las clases 1, 2 y 3 respectivamente, en las cuales se identificaron diferentes significados de la función y permitían evidenciar elementos del MTSK y del ETM idóneo.

ANÁLISIS Y RESULTADOS

A continuación, se muestra la descripción de las tareas seleccionadas y su análisis desde los constructos ThETM y ThMTSK.

Análisis de la Tarea 1 (t1)

En la primera sesión, PM enuncia el objetivo de: *mostrar que* [los alumnos] *comprenden conceptos para el desarrollo y comprensión de las funciones*. Esto se ajusta al objetivo de aprendizaje para la función en este nivel escolar (MINEDUC, 2016). Para abrir la sesión, PM comienza con un recordatorio de conceptos como variables, constante y proporcionalidad.

> PM: La variable *X*, cuando yo compro un producto me cobran un precio *y,* si compro dos productos, ¿cuál va a ser mi precio? ¿Pago más? ¿Pago menos? Ojalá compre más y pague menos ¿En qué país pasa eso? Estas se llaman variables. ¿La *k* que era?, se llamaba constante aparecía cuando dividíamos letras, variables o multiplicábamos variables para la variación proporcional directa.

Estos conceptos serán utilizados para proponer la definición de función en términos de lo que los estudiantes conocen. Luego de esto, PM presenta la tarea (*t1*) que propone para introducir la idea de relación. Esta tarea incluye conceptos y situaciones cercanas para los estudiantes (figura 1), evocando sus experiencias en esos contextos. PM no especifica el tipo de relación buscada, solo pide que se explicite la relación entre las magnitudes que representan estos conceptos. Para responder, los alumnos se apoyan en situaciones de proporcionalidad, estudiadas desde el año anterior junto a PM, como lo expresó durante el desarrollo de la sesión.

> PM: Yo voy a escribir una serie de palabras y ustedes me van a decir cuál de ellas se relacionan como variables entre sí. ¿Por qué pongo independiente y por qué pongo dependiente? Podría que al final de esta actividad ustedes dijeran por qué independiente y por qué dependiente. No antes.
> La actividad es la siguiente: Observa la lista de conceptos o palabras y une las que puedan tener alguna relación.

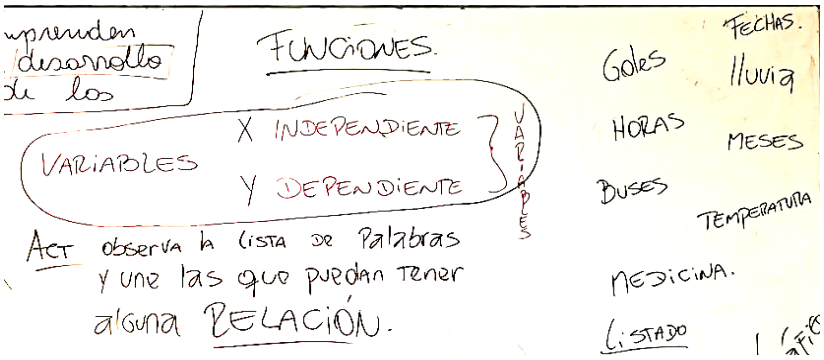


Figura 1. Tarea inicial (*t1*) para el concepto de función.

Al final de esta tarea, PM define la función como "*una relación entre dos variables. X e Y, de manera que a cada valor de X, le corresponde un único valor de Y. Como el valor de Y depende del valor de X, se dice que Y es la variable dependiente y X la variable independiente*".

Desde la perspectiva del MTSK, la propuesta de esta tarea revela que el profesor conoce los conocimientos previos de los estudiantes (KMLS) y atiende a una forma de acercarse a la función, vista como una relación entre magnitudes, identificable en distintos contextos. Las magnitudes involucradas corresponden a contextos cercanos para las estudiantes (KFLM) en los que pueden identificar relaciones proporcionales que potencian el estudio de la función. Esto último también da cuenta de la estrategia de enseñanza (en su KMT) que PM propone para la función. Esta estrategia se caracteriza por recordar conceptos como variable, variable dependiente e independiente, utilizados en el contexto del estudio de la proporcionalidad, y su notación (x e y), reflejando su conocimiento de la secuenciación de los temas (KMLS) y notaciones usuales (KoT).

La definición de función deja ver el KoT de PM, el cual es coherente con el significado para la función como relación que busca en *t1*. Tal definición incluye la idea de función como correspondencia, mostrando otro significado o acercamiento para el concepto. La idea de correspondencia le permite definir las variables dependiente e independiente. Esto completa su estrategia para introducir y definir la función (en su KMT).

Respecto del ETM, PM usa los conocimientos previos de los estudiantes para estructurar el ETM idóneo. Los conceptos involucrados en *t1* (magnitudes y variables) evocan mediciones y relaciones entre sus valores. Así, el trabajo en *t1* inicia en la génesis semiótica, visualizando las letras X e Y y activando el referencial teórico con las palabras evocando magnitudes medibles y las relaciones numéricas entre ellas. Esta componente del referencial se robustece en el ETM idóneo cuando PM presenta la definición. La tarea *t1* se vuelve central en este diseño, ya que establece la primera forma en que se comprenderá la función y los conceptos (tipos de variables) involucrados.

Análisis de la Tarea 2 (t2)

En la segunda clase, PM establece el objetivo de "*comprender la representación de una función y su significado*". Al inicio de esta sesión, el profesor recuerda la definición de la función y los conceptos de variable dependiente e independiente. Luego, propone la tarea *t2*, seleccionada de un texto escolar (Torres y Caroca, 2019). Esta tarea presenta a la función como una máquina, alineándose con el currículo chileno. La instrucción de *t2* señala que, a partir de la observación del diagrama, se complete una tabla de valores (Figura 2). La máquina propone una entrada y una salida vinculadas a las variables *x* e *y*.

En una máquina se ingresa un número y sale otro según la indicación dada. Observa la imagen y completa la tabla.

Figura 2. Tarea *t2*, seleccionada del texto escolar. Fuente: Torres y Caroca (2019, p. 91).

La selección de esta tarea la ubicamos como parte del KMT. Ella incluye la representación tabular para la función (KoT), donde también se encuentra el conocimiento de las notaciones (*x, y* para las variables), la representación en tablas y el procedimiento para evaluar la función. El uso de la máquina en comparación con la función, también se reporta como parte de su KMT (Espinoza-Vásquez *et al.*, 2018), respecto del diseño de la estrategia de enseñanza del concepto. El uso de la máquina corresponde a otro significado atribuido a la función. Aquí, la función se muestra como un proceso de entrada-salida (KoT).

> PM: El fondo, lo que estamos descubriendo es qué pasa con el 1 para que de 4; con el 2 para que me de 7; con el 8 para que de 25. Hagan el planteamiento en el cuadro. Después les voy a mostrar cómo se escribe la función y todo lo que es el proceso.

La tabla de valores solicitada refuerza este significado y conduce a un trabajo operacional con la función.

> PM: ¿Preguntas, dudas, consultas? ¿entienden el concepto? Traten de entender el concepto, como que ingresa algo, pasa algo y sale otra cosa [señalando el ejemplo del texto escolar (máquina)]. Como en el ejemplo [apunta al ejercicio anterior en la pizarra], si yo el primer número lo multiplicaba por 4, me salía un número distinto. Entonces, cada vez que yo tomaba un número de la *X*, lo multiplicaba por 4, me salía un número abajo, eso es lo que estamos tratando de ver.

Desde el ETM idóneo, la evaluación de la función es un artefacto simbólico para el cálculo de imágenes. La *t2* propone un trabajo entre lo semiótico y lo instrumental. A partir de la identificación de la función como una máquina (génesis semiótica), y usando la tabla como representación de la función, se activa la génesis instrumental para completar la tabla mediante las evaluaciones de la función.

El objetivo de la clase da contexto al ETM idóneo, que busca representar la función. Además, este justifica la decisión de PM por incorporar la *t2* en su diseño. En esta sesión, la principal activación corresponde a la génesis semiótica ("*comprender la representación*"), pues articula lo icónico de la máquina con la representación tabular. La definición de función (como referencial) apoya el uso de la evaluación para identificar la función y determinar imágenes. Se observa la presencia de un referencial adecuado que conduce a activar la génesis instrumental y a comprender la función por medio de la máquina ("*su significado*"). De este modo, el trabajo en *t2* va entre lo semiótico e instrumental, mediante la representación y evaluación de la función.

Análisis de la Tarea 3 (t3)

La tarea *t3* se propone como un desafío para los estudiantes (figura 3). En esta sesión, PM propone el objetivo de "*mostrar que* [los estudiantes] *comprenden la función afín, generalizándola como la suma de una constante con una función lineal*". La pregunta que anuncia a *t3* se plantea como "¿qué hace la función para que *X* pase a *Y*?" (Figura 3). A través de una tabla de valores, PM busca que los estudiantes calculen imágenes y expresen algebraicamente la función.

> PM: Como lo decían antes, vamos a partir con un desafío van a descubrir cuál es la regla para que hagan para que cuando se comienza con la letra *X* aparezca la letra *Y*. Voy a hacer una tabla simple. Una vez empezada, ustedes van a ver una tabla. Ahí les deje el desafío 3 minutos. ¿se acuerdan que ayer hablamos de la caja registradora? de la máquina en el libro de la máquina, ¿Cuál es la función para que la letra *X* me pase a *Y*? ¿cuál es?

La *t3* se apoya en el trabajo realizado en t1 y t2, pues permite ver la relación entre *X* e *Y* como magnitudes mediante la representación tabular. Además, utiliza la idea de función como proceso, trabajada en la sesión anterior.

Por un lado, PM muestra conocer la representación tabular de la función y la relación entre variable dependiente e independiente en su KoT. La tabla y la pregunta de *t3* (figura 3) permiten a PM hablar de la función ahora como una regla. PM selecciona los valores de la tabla de modo que el patrón en los valores permita la generalización y responder a la tarea. La función como patrón, modelo o regularidad puede, en este caso, expresarse algebraicamente, lo que conduce a identificar otro significado: la función como expresión algebraica.

> PM: Se multiplican por 4 y se le sube a 1 ¿veamos si es cierto? ¿Veamos si es cierto? Aquí nos dice que la función de la letra *X* es multiplicar esto por 4 y sumarlo a 1 ¿vale? [escribe en la pizarra $f(x)=4x+1$]

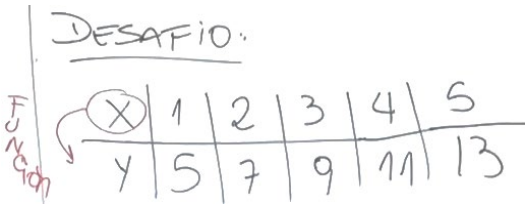


Figura 3. Tarea t3: ¿cuál es la función para que *X* pase a *Y*?

PM estimula a sus estudiantes para generar fórmulas que determinen la regla y da espacio para comprobarlas mediante la evaluación de las mismas. Esta evaluación también fue trabajada en la sesión anterior. A nivel del conocimiento especializado, esta tarea forma parte de su estrategia de enseñanza (KMT) para conseguir el objetivo de la clase y hace uso del conocimiento de características del pensamiento algebraico de los estudiantes (KFLM) y la potencialidad del estudio de regularidades numéricas (KMLS) para comprender la función.

Esta tarea muestra la construcción de una representación de la función, activando la génesis semiótica y expresando su KoT. PM propone iniciar el trabajo desde el referencial, es decir, desde la definición de función como correspondencia, y se apoya en lo semiótico (representación tabular) para determinar el patrón. Esta búsqueda apunta a retornar a la génesis discursiva al generar validaciones de la fórmula (algebraica de la función) que los estudiantes proponen.

La *t3* incorpora preguntas como: *¿Puede calcularse para x = 6; 10; 200?* con lo que incentiva la necesidad de establecer una regla general de asignación y argumentar sobre la posibilidad de encontrar esas imágenes con la regla obtenida. Estas preguntas buscan activar la génesis discursiva a partir de la observación de la tabla. La relación entre la *t3* y el significado de la función como regla general o patrón están en adecuación con el ETM de referencia a través de la búsqueda de estas generalizaciones.

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

El análisis de las tareas nos permite observar cómo PM busca concretar los objetivos de cada clase. La selección y organización de las tareas por parte del docente evidencia tanto la estrategia de enseñanza del profesor como el diseño del ETM idóneo. En esta estrategia/diseño, PM moviliza distintos conocimientos incluyendo sobre lo que espera que aprendan los estudiantes. Esto permite comprender la práctica de PM, el conocimiento puesto en juego y el tipo de trabajo que espera que sus estudiantes realicen. En esta línea, vemos que PM organiza las tareas apuntando a que emerja la función en su expresión algebraica a través del establecimiento de relaciones (en *t1*), la evaluación de la función y el proceso de entrada/salida (en *t2*) y la identificación de un patrón de formación (en *t3*).

En nuestro análisis se observó que el trabajo matemático en torno a estas tres tareas promueve principalmente la génesis semiótica (con la visualización de las relaciones, la máquina y la tabla), la génesis instrumental (con la evaluación de la función) y la componente del referencial (con la definición de la función). Pese a que los aspectos instrumentales quedan acotados a la determinación de imágenes en *t2* y *t3*, son claves

en esta articulación de significados. Esta limitación puede deberse a la acotada selección de tareas para este reporte.

Las tareas analizadas muestran a la función como una relación, una correspondencia, un proceso de entrada-salida, una expresión algebraica y como una regla de formación. Estos acercamientos se identifican en otras investigaciones (e.g., Espinoza, 2020; Espinoza-Vásquez *et al.*, 2018; Pino-Fan *et al.*, 2019), pero hasta ahora no han sido articulados con el trabajo que el profesor propone para sus estudiantes (Espinoza-Vásquez *et al.*, 2022).

La propuesta general de enseñanza de PM destaca la articulación estos los acercamientos a la función, que aquí hemos llamado *significados*. Estos permiten identificar lo que el profesor comprende por función, motivan determinada forma de trabajar con el tema y, con ello, permiten caracterizar el trabajo matemático que propone el docente en las sesiones. Todos los significados que identificamos se ajustan a los objetivos de aprendizaje contemplado en el currículo (MINEDUC, 2016), por tanto, deben ser conocidos por los profesores y promovidos durante la enseñanza de la función.

El uso de la función como una máquina enfatiza en la función como un proceso, lo que puede llevar a mecanizar el trabajo con funciones (Espinoza-Vásquez *et al.*, 2018). En este caso, este conocimiento se asocia a una tarea que propicia la activación de la génesis instrumental. Por su lado, mostrar la función como una regla, requiere de la observación de las variaciones entre las variables y la generalización (Castro *et al.*, 2017). Con ello, el profesor puede atender el pensamiento algebraico y el pensamiento funcional en los estudiantes en pro de la comprensión de la función mediante la identificación de la variación lineal (López, 2023).

En términos de la complementariedad ETM-MTSK, observamos que el uso de ambos constructos permite avanzar en la comprensión de la práctica docente de acuerdo al conocimiento que moviliza para proponer un determinado trabajo en la clase. En nuestro caso, el uso del KoT (como definiciones, procedimientos y significados) y KMT (sobre la selección de tareas) predominan en la caracterización del tipo de trabajo matemático que a sus estudiantes, como también se muestra en (Espinoza-Vásquez *et al.*, 2022).

Finalmente, ponemos el énfasis en que estudiar los significados de los objetos matemáticos que se proponen durante la enseñanza permite el doble acercamiento ETM-MTSK a la práctica del profesor. En ese sentido, surgen interrogantes respecto de si distintos significados pueden relacionarse de manera más natural con tareas que potencian diferentes génesis (como un ETM idóneo más completo) y movilicen un conocimiento especializado más amplio del profesor. Esto es algo que debe continuar investigandose.

AGRADECIMIENTOS

Paula Verdugo-Hernández, agradece a ANID Fondo Nacional de Desarrollo Científico y Tecnológico de iniciación 2023, Folio 1123024. Carolina Henríquez-Rivas agradece a ANID, Fondo Nacional de Desarrollo Científico y Tecnológico de iniciación 2023, Folio 11230523. Gonzalo Espinoza-Vásquez agradece a ANID, Fondo Nacional de Desarrollo Científico y Tecnológico de Iniciación 2023, Folio 11231088. Nuria Climent agradece a PID2021-122180OB-100, financiado por MICIU/AEI/10.13039/501100011033, y ProyExcel_00297 de la Junta de Andalucía (España).

Este trabajo está vinculado a la Red MTSK de la Asociación Universitaria Iberoamericana de Posgrado (AUIP).

REFERENCIAS

Alcalá-Tejada, L. y Aké, L. (2024). Cuestionario sobre el conocimiento matemático para la enseñanza del profesor de matemáticas: una propuesta para la enseñanza de la función. *PädiUAQ, 7*(13), 1-21.

Carrillo, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L.C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, A., Ribeiro, M., y Muñoz-Catalán, M.C. (2018). The Mathematics Teacher's Specialised Knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education*, *20*(3), 236-253. doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981

Castro, E., Cañadas, M. y Molina, M. (2017). Pensamiento funcional mostrado por estudiantes de educación infantil. *Educación Matemática en la Infancia, 6*(2), 1-13. http://www.edma0-6.es/index.php/edma0-6

Bardín, L. (1996). *El análisis de contenido*. Akal Ediciones.

Espinoza-Vásquez, G., Verdugo-Hernández, P., Henríquez-Rivas, C. y Ponce, R. (2022). Avances en la relación entre MTSK y espacios de trabajo matemático. En J. Carrillo, M. A. Montes y N. Climent (Eds.). *Investigación sobre conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK): 10 años de camino* (pp. 265-276).

Espinoza-Vásquez, G., Zakaryan, D. y Carrillo, J. (2018). El conocimiento especializado del profesor de matemáticas en el uso de la analogía en la enseñanza del concepto de función. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 21*(3), 301-324. https://doi.org/10.12802/relime.18.2133

Espinoza, G. (2020). Caracterización del conocimiento especializado del profesor de matemáticas de educación media sobre el concepto de función (Tesis doctoral). Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Valparaíso. http://opac.pucv.cl/pucv_txt/txt-0000/UCB0313_01.pdf

Espinoza-Vásquez, G., Verdugo-Hernández, P., Henríquez-Rivas, C. y Ponce, R. (2022). Avances en la relación entre MTSK y espacios de trabajo matemático. En J. Carrillo, M. A. Montes y N. Climent (Eds.). *Investigación sobre conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK): 10 años de camino* (pp. 265-276). Dykinson. https://doi.org/10.2307/j.ctv2zp4vp1.24

Kuzniak, A., Montoya Delgadillo, E., & Richard, P. (2022). *Mathematical work in educational context: The perspective of the theory of mathematical working spaces*. Springer.

López, E. (2023). Pensamiento funcional de estudiantes de tercero de primaria: un estudio bajo el enfoque del early algebra. *Bolema, 37*(77), 1277-1298.

Ministerio de Educación de Chile [MINEDUC]. (2016). *Matemática: Programa de estudio de matemática - octavo básico*. Autor. Obtenido de http://www.curriculumenlineamineduc.cl/605/articles-18983programa.pdf

Ministerio de Educación [MINEDUC]. (2021). *Estándares Pedagógicos y Disciplinarios para Carreras de Pedagogía en Matemática.* Ministerio de Educación.

Pino-Fan, L. R., Parra-Urrea, Y. E., y Castro, W. F. (2019). Significados de la función pretendidos por el currículo de matemáticas chileno. *Magis, Revista Internacional de Investigación en Educación, 11*(23), 201-220. http://doi:10.11144/Javeriana.m11-23.sfpc

Prediger, S., Arzarello, F., Bosch, M., & Lenfant, A. (2008). (Eds.), Comparing, Combining, Coordinating - Networking strategies for connecting theoretical approaches. *ZDM*, *40*(2), 163-327. https://doi.org/10.1007/s11858-008-0093-0

Ribeiro, A., y Cury, H. (2018). *Álgebra para a formaçao do profesor: Explorando os conceitos de equaçao e de funçao*. Autêntica.

Scheiner, T., Montes, M. A., Godino, J. D., Carrillo, J., & Pino-Fan, L. (2019). What makes mathematics teacher knowledge specialised? Offering alternative views. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *17*, 153-172. https://doi:10.1007/s10763-017-9859-6

Stake, R. E. (2007). *Investigación con estudio de casos*. Ediciones Morata.

Torres, C. y Caroca, M. (2019). *Matemática texto del estudiante*. Ediciones SM S.A.

INVESTIGATING GAI'S ROLE IN SHAPING MATHEMATICS WORK AND IDENTITY WITHIN A UNIVERSITY DIDACTIC SYSTEM

Annamaria Miranda

Dipartimento di Matematica, Università degli Studi di Salerno

This paper explores the role of artificial intelligence (AI) in university education, particularly in shaping students' mathematics identities and mathematics teacher identities. The research suggests that integrating AI into the traditional educational system can enhance both teaching and learning, but teachers must address practical interventions. Well-designed tasks can facilitate the effective use of AI in this sense.

INTRODUCTION AND RATIONALE

Educators and researchers are focusing on generative artificial intelligence (GAI) applications like ChatGPT, which can generate real-time information about all subjects. However, misuse of GAI raises concerns. While many researchers and teachers discuss integrating GAI into teaching strategies, few studies on GAI issues in school and university mathematics education have been published (Pepin *et al.*, 2025; Richard *et al.*, 2022). Our research examines the role of GAI in mathematics education, focusing on its influence on teaching and learning dynamics and highlighting the importance to be added to the traditional didactic system that sees the learner, knowledge, and teacher as protagonists. Two issues arise: the first is theoretical, involving the integration of known constructs,and the second is practical, involving how to intervene with effective teaching practices. When thinking about the relationships between student-teacher-knowledge in the dynamic of teaching and learning, the Chevallard triangle, one of the most studied relational schematizations (Chevallard, 1985), should be integrated. A new presence should necessitate the addition of another vertex. Inappropriate use of AI would risk undermining the school's moral integrity, both by the student and by the teacher. The teacher may like to be replaced, and, from her/his side, the student may prefer the non-human approach to knowledge (some college students have explicitly stated that they feel less judged). But *to what extent would teachers and students be able to manage, avoiding falling into the trap of being managed?* It would risk creating imbalances in the rights and duties to be respected within the educational system. So, *what do we do? What can be done? What can a teacher do? What should I do when faced with a potential competitor?* To counter misuse of ChatGPT, teachers should consider designing activities that incorporate ChatGPT participation while maintaining didactic effectiveness. In this perspective, we examine a teacher learning intervention supportive of student engagement in mathematics with ChatGPT based on the design of a task thought to encourage interpretative positioning in solving the mathematics problem,positioning their students to learn mathematics, and shifting their position from teachers to learners and co-constructors of knowledge in the new interaction dynamical system. Communicative and relational approaches within the group change

in the presence of AI, and there is a need to adapt them to the new reality that emerges. J. Austin's "Speech Act" theory (Austin, 1962) emphasize the importance of interaction in communication. Our design prioritizes students' engagement with mathematics through AI interaction, utilizing collective speech acts and storylines to express identity, life, and relationships. AI joins small groups working on mathematical problems, acting as an interlocutor, influencing behavior, discourse position states, and identities through group conversations. Studies on identity development have highlighted the link between identity and discourse-based positioning processes (Andreouli, 2010; Darragh, 2016; Van Langenhove & Harreé, 1999). Positioning theory is the study of the discursive process in which individuals assign themselves and others a position within discourse (Andreouli, 2010; Van Langenhove & Harreé, 1999) contributes to the understanding of the relation between social representations and identity using the concept of position. She says:

> Positioning theory takes a discursive approach to 'thinking' and 'acting' and focuses on sense-making in interaction with others, in local contexts. Given its focus on the here-and-now,"positioning can be seen as a conceptualization of 'doing identities in talk' ".

Positioning is thus a sequence of acts (speech acts) that are performed by positioning themselves within a discourse and contribute to providing a person's identity (Van Langenhove & Harreé, 1999). Our study aims to analyse, through the lens of positioning theory, how undergraduate students, and their teacher position themselves in an educational path involving AI to shed light on the role of AI in learners' and their teacher's identity development.

THEORETICAL FRAMING

Our goal was to use ChatGPT participation and didactic scenario creation to develop assignments that would stimulate students' interest in advanced mathematics through AI interaction. Learners' agency and interaction with AI can improve their exploratory attitude, critical thinking, creativity, reflective thinking, expertise, and social carefulness; thus, AI's incursion can change their identities.

Framing for the designing.

The design foresees AI's involvement in teacher-student interactions, task resolution, logbook re-elaboration, and students' perception of their knowledge positioning. The task was designed notonly to think of the epistemological-cognitive potential but also to interpret the students' cognitive positions in the interaction with AI, including those involving an instrumental rather than relational approach to AI.

Epistemological-Cognitive plane. Recent research in mathematics education emphasises topology's importance in developing advanced mathematical thinking (Kontorovich & Greenwood, 2023; Gallagher & Infante, 2022; Miranda, 2023a, 2023b). The epistemological analysis aligns with the theoretical conceptof 'example space' (Watson & Mason, 2005), integrated with the construct of 'concept understanding' in the form introduced by Dahlberg and Housman (1997). Comparing examples allows you to reason and abstract the general characteristics of the property

to find the most representative example from the space of all examples related to a topological property. In a study on the initial approach to new concepts, Dahlberg and Housman (1997, p. 297) observed that 'it may be beneficial to introduce students to new concepts by requiring them to generate their own examples or have them verify and work with instances of a concept before providing them with examples'. They assign students some exploration "pages," starting from a concept definition, to develop their own related concept: to define the concept (*definition page*); to generate two examples of objects, one satisfying that definition and the other not (*generation page*); to verify whether some given objects do or do not satisfy the definition (*verification page*); and to explore some statements linking that concept to others (*conjecture page*). We extended the model by adding the *bridge page* (Miranda, 2023b), asking for the production of examples to promote conjecturing.

Methodological-cognitive plane. With the advent of ChatGPT, the risk is to take passive positions (Pp) over the resolution of a mathematical problem. So *why not interpret the wrong positions*? The idea of defining interpretative positioning is born from that of interpretative knowledge (IK, Ribeiro *et al.*, 2016). IK refers to a deep and wide mathematical knowledge that enables teachers to support students in building their mathematical knowledge starting from their own reasoning and productions, no matter how standard or incorrect they might be.

Interpretative positioning. Interpretative Positioning (IP) enables teachers to interpret students' cognitive and metacognitive positionings in mathematical problems, even if they're considered incorrect. IP allows for the prediction of unexpected student positioning approaches, such as instrumental AI use, and involves discussions to understand students' behaviors. Positionings mainly involved in the discursive conversational phase are: Argumentative positioning (Ap); Explorative positioning (Ep1); Critical positioning (Cp1); Creative positioning (Cp2); Specialist positioning (Sp); Passive positioning (Pp); Emotional positioning (Ep2); Reflective positioning (Rp1); Mature positioning (Mp). In the writing discursive phase, we identify: Descriptive positioning (Dp); Narrative positioning (Np); Reviewing positioning (Rp2). These are positioning indicators attributable to the various types of positioning that are refinements of those introduced by Van Langenhove and Harré (1999).

Framework for the analyses.

The study deals with a teaching-learning experience lived by the author in a university-classcommunity context in the double role of teacher and researcher, in line with the autoethnographic approach (Heider, 1973; Pinner, 2018). She moved both as a designer of the interventions and as an analyst to reflect, with the aim of relearning from the experience. Self-other-AI observations of the discursive storylines and speech acts during the designing and implementation of the activities up to the feedback interviews at the end of the educational path generated fruitful reflections for qualitative analyses through positioning theory.

Autoethnography. Autoethnography (Heider, 1973; Pinner, 2018) is an academic writing style that analyses an author's lived experiences, connecting insights to self-identity, cultural norms, communication practices, traditions, and social issues. We use autoethnography as a reflective method to investigate the new relationship occurring between AI and the university teacher and her growth in terms of instructional design and teaching practices. The exploration of self in relation to AI allowed the researcher (in her teaching role) to reflect on how to design a kind of co-teaching and co-constructing knowledge with AI. Autoethnography enables a transformative direction in the academic identity of a university mathematics teacher.

Positioning Theory. The theory (Van Langenhove and Harré, 1999) suggests that rights and social episodes are determined by three aspects of joint interaction: the interlocutors' lived storyline, the social force of a speech act, and the participants' positions in relation to these elements, as per Van Langenhove and Harré's positioning triad. Self-positioning and other positioning can change the ongoing storyline. Positioning is oriented in different directions; *how do I position myself? And how do others position me? But also, how would I position others who work in this social context?* In a conversation, participants position each other while simultaneously positioning themselves. This discursive act signifies the person to whom it is addressed, and vice versa. Positioning can be tacit, deliberate, moral, personal, performing, or accountive. Deliberate positioning explicitly presents oneself as an agent, while moral positioning requires adhering to social expectations. Personal positioning involves making a personal account of failure to meet social expectations. We are mainly interested in intentional positioning, whether performative or accountive (Harré & van Langenhove, 1999, p. 24). Among the performative positions, we identify various forms of *deliberate self-positioning* or *deliberate positioning of others*. Deliberate self-positioning occurs in every conversation when one wants to express his or her personal identity. Among the accountive positioning, there are *forced other positioning* (self- positioning forced by others) and *forced positioning of others* (positioning you make of others). Clearly, students are constantly engaged in positioning themselves and others. As an example, when a student says, '*Do you realise what he/she said*?' addressing his/her group's fellow members and referring to a wrong statement, it is clearly a phrase that forces others to reflect. It is a critical self-positioning (Cp1) and, at the same time, a *specialist self-positioning* (Sp) because the student strongly expresses doubt with the conviction that the statement is wrong. It is the forced positioning of others (Van Langenhove & Harré, 1999). The integration of AI into mathematics education creates a positioning system where students, teacher, and AI mutually position each other through speech acts. Students position AI, while AI's responses position students in relation to mathematical knowledge. This creates dynamic positioning chains: student question, AI response, student evaluation, group negotiation, where each interaction reshapes participants' mathematical and social positions.

Research questions. *How does the participation of GAI in a problem-solving activity affect university mathematics students and teacher's positioning processes in their work and in their teaching and learning? Howdoes GAI contribute to shaping their mathematics identity or mathematics teacher identity?*

METHODOLOGY

The experience involved thirty students in their second year of a bachelor's degree in mathematics taking an introductory topology course at a university in the south-west of Italy during the academicyears 2022-2023 and 2023-24. Students were involved in a path organised into four activities, each dealing with the learning of fundamental general topology concepts (closure, continuity, compactness, and connectedness). Any activity's core involves a task designed to help students understand a specific definition through their own example generation, including AI's one, in accordance with the pertinent research (Watson and Mason, 2005; Dahlberg & Housman, 1997). Along the activities the class was divided into free thinking groups. A *free-thinking group (FTG)* is a thinking group (Miranda, 2023a) in which each student is free to perform a cognitive or metacognitive positioning as a problem solver.

Experimental design. *An intervention to understand a definition in topology through an example-construction task foreseeing the participation of ChatGPT.* The task (Figure 1)starts with a reflection on the definition to be interiorised (Page 1) and, after requiring examples or nonexamples related to the defining property (Page 2) and verifying whether given spaces satisfy that property (Page 3), focuses on the exploration of that property's relationships with other properties (Page 4), a critical phase that helps bridge the gap between constructing examples and conjecturing phases. Page 4 (Miranda, 2023b) requires any working group to "give an example, if possible, of a topological space satisfying or not satisfying Constraint 1 (c1), Constraint 2 (c2) and Constraint 3 (c3) and then asking AI the same questions." Each constraint is assigned a value of 1 if it must be satisfied and 0 otherwise.

The working group generates examples, compares them, chooses the most representative, and then generates conjectures about relationships between properties. The experiment focusing on compactness produced or to be proven or disproved statements, such as: *there are countably compact sets that are not compact*; *every compact set is countably compact*. The task requires constant final AI-interaction, a group logbook detailing each activity, and at the path end a feedback questionnaire.

Page 1- definition page

Instructions. You will have a few minutes to study the following definition. You can write on this board, and you willalways have access to this document during the activity.

Definition A topological space (S, τ) is called compact if ∀R τfor which {A : A ∈ R} = S exists F R finite such that {A: A ≠ F}= S.

In your words and/or images, explain what a compact set is.

Page 2 - generation page

Instructions. Consider a fixed topological space (S, τ), where τ `is the topology of your board, and answer the following questions.

1. Give an example of a compact set and explain why it is
2. Give an example of a non-compact set and explain why it is not right
3. Make the same requests to ChatGPT.

Do you think ChatGPT's answers are correct? If so, would they be preferable to yours? Explainwhy.

Page 3 - verification page

Instructions. Determine which of the following spaces iscompact in (R, τ), where τ is the topology of your board.Explain why.

1. R
2. Z
3. [a, b]
4. {x}
5. {1/n: n ∈ N}
6. Q

What does ChatGPT say? Do you agree?

How does ChatGPT respond in the next page? Do you agree? If it is right compare and choose the better answers.

Page 4 - bridge page

Instructions. Consider conditions c1, c2, c3. To each condition is associated the value 1 if it mustbe met and the value 0 if it does not have to be. Build examples, if any, according to the requirements

c_1: X is compact	*c_2: X has compact closure*	*c_3: X is countably compact.*	*Example, if it exists*	*ChatGPT answers*
1	1	1		
1	1	0		
0	1	1		
1	0	1		
…	…	…		

Figure 1: A sample of AI-integrated task to learn the concept of compactness.

Data Collection and Data Analyses

The data, including teacher intervention, group discussions, and student feedback, was qualitatively analysed to identify characteristics of positioning, including deliberate and forced positioning, focusing on both teacher and student storylines. Twelve identity indicators related to teacher and student engagement in an AI-augmented community, attributed to performative positioning acts, provide empirical evidenceof the development of professional and mathematical identities. The teacher's storyline foresees three episodes: task design, knowledge construction, and reflection. The autoethnographic approach is used to analyse the teacher's positioning, focusing on the personal narrative.Students' storyline consists of three episodes: discussion, writing, and self-perception of AI's position in mathematics. Interactions were coded using a positioning theory framework with six core positioning types (Cp1-Critical, Sp-Specialist, Cp2-Creative, Mp-Mature, Rp1-Reflective, Ep1-Explorative), identified through specific linguistic markers and behavioural indicators. Speech acts were classified into three categories: Mathematical Acts (assertions, corrections, constructions), Social Acts (coordination, assessment), and AI Interaction Acts (question-response-evaluation sequences). Each positioning claim required evidence from at least two data sources (discourse transcripts, student logbooks, feedback questionnaires). A three-level validation structure was employed: (1) Data triangulation across spoken discourse, written logbooks, and feedback questionnaires to ensure consistency; (2) Position theory validation checking storyline coherence, identity development progression, and speech act intentionality; (3) Autoethnographic validation through member checking with student participants, and peer debriefing with mathematics education colleagues.

FINDINGS AND DISCUSSION

The study explores students' and teachers' interactions with ChatGPT to explore the concept of compactness and their self-other relations in solving topology problems.

Storyline 1 **Agent: Teacher.** *Positioning teachers' mathematics work in relation to the participation of ChatGPT in the storyline: reflecting on integrating a task model for teaching.* The integration of AI in the dynamic teaching-learning system increases its complexity, prompting teachers to reflect and take actions, as detailed below:

Episode 1 **- The intrusion of AI and the positioning of the teacher in relation to AI: designing activities.** The teacher, aware of AI's role as a knowledge promoter (Sp), initially adopts a self-forced teaching positioning by creating tasks enhancing the intrusion of AI. It is an act of teaching positioning (Sp) which manifests itself in the act of creating a task of a certain type (see example in Figure 1) revealing the positioning of AI, and with it, intentionally inducing certain positionings in students (Cp, Ap,...) through the instructions of the task (forced positioning of others). This act wants to induce, for example, phrases of the type '*I'm not clear, explain me why?'* which is acritical positioning (Cp1), which falls into a form of forced positioning of others, which induces an argumentative positioning (Ap). The task stimulates cognitive processes for solving, using subject epistemological potential, and repositions the teacher in relation to methodology design and teaching methods. The teacher uses AI in teaching by designing tasks and strategies that incorporate both personal and AI-based mathematics, allowing for a more engaging learning experience. Her idea of how to teach mathematics changes, and with it, her identity.

Episode 2 **- Peer Positioning of the teacher relative to the students in comparison with AI**. Teacher shifts from teacher to learner becoming a peer co-constructorof knowledge, to better assess AI's impact on learners and remodulate interventions.

Episode 3 **- The repositioning of the teacher: reflecting on developing an AI-extended workshop model in teaching.** The teacher analyses (Cp2) students' experiences with AI, focusing on ChatGPT participation, to understand its impact on their positions and perceptions. She asks herself: *Do you think that the presence of ChatGPT could be useful for learning mathematics? What about teaching?*

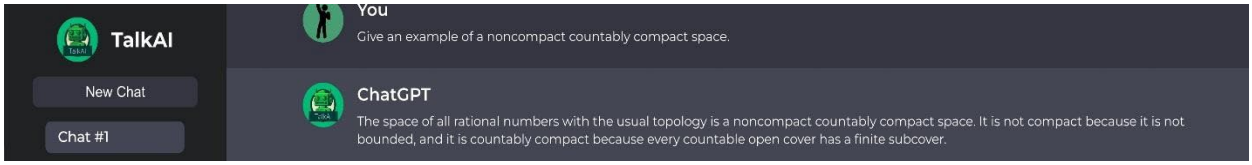
> T: ChatGPT moving away from standard theoretical context increases the risk of incorrect answers. It struggles with reasoning that sets compact with one topology cannot be compact with another, sometimes resulting in contradictory arguments. But these limitations fostered constructive discussions, enhancing students' understanding by allowing comparisons between correct and incorrect answers. As a teacher, I don't see ChatGPT as a substitute; *It's not just what you teach; it's how you do it. A teacher is like a tailor sewing a dress to his classroom* and can customize their teaching methods to meet their students' specific needs. Rather, I perceived AI as an augmented teaching since it helped me to preserve the activation of mathematical thought and creativity and at the same time reflect and make students reflect on its conscious and respectful learning use.

AI is positioned in such a way as to improve teaching knowledge, about what to doand how to do it (Rp2), re-thinking to the experience and re-learning from it.

<u>Storyline 2</u> Agents: students, teacher, AI The second storyline explores the impact of personal-social positioning in group work, in the activity on compactness (Fig. 1).

***Episode 1* - FTG's discussions about the resolution.** The first episode features a discussion on the relationships between properties (Page 4). We focus on students' discussion about c*1: X compact space*, and *c3: X countably compact space*. The first speech acts that piqued our interest were always accompanied by shared intentions, a *task positioning* regarding how FTG's group work should proceed (social speech act):

S3: It seems difficult to build countably compact, not compact space. Whenever we take a countably compact one, it is also compact!!! Let's try to ask ChatGPT and then decide for the more generic (*shared decision-making*).



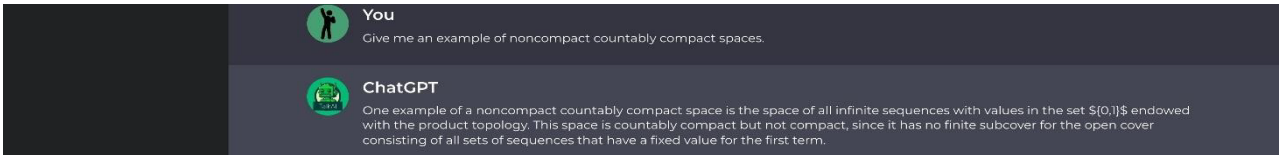
S2: I 'm not convinced!! (*Cp1-Deliberate positioning*)

S1: You're right. On reflection, this example is not good because it is a compact and countably compact space (*Rp1*). Let us answer.

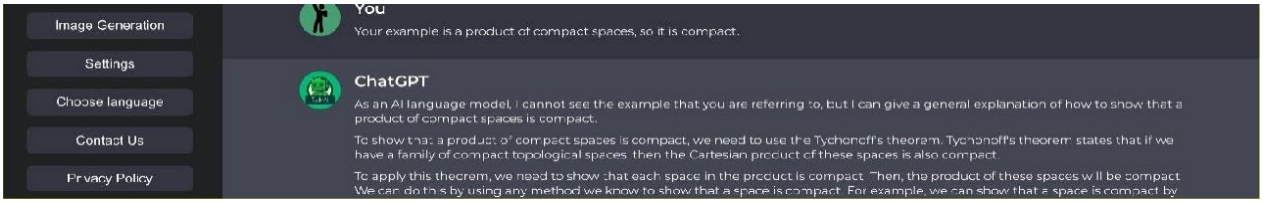
The working group provides a speech act of formative assessment to AI (Mp):

S2: Any countably compact metric space will be compact, so if you are looking for a countably compact, non-compact space, you must go beyond metric.

S1: The AI's proof appears correct (Pp). Let's try asking the question again.



S1: Again, you are wrong! (Sp)



Teacher's supporting positioning in relation to her students takes shape (Rp2).

T: ChatGPT explains how to prove that a compact space product is compact. It discovered that Tychonoff's theorem can be used to achieve this (Sp).

Students reflect (Rp1) and begin to shift towards the awareness that while AI is a good promoter of information (Ep), its approach may be limited to the procedural, and an original and creative construction (Cp2) can only be created by human minds:

S2: [...] we need a topology that make a space from one hand compact in a weakly way and from another hand noncompact. Let me think […]. We could

construct a product of spaces all compacts except one factor, and then modify it in such a way to construct a countably compact space.

Again, the teacher makes a technical suggestion, encouraging students to think about the structure. A speech act that establishes how to proceed (*social positioning*):

S3: Let's take $\{0\} \times]1.2[$! The second is not compact. Is it countably compact?

T: What about topologies? […] It could be compact. Think about the opens.

Student S4 reflect on the difficulties of AI and understands its limitations: in this case, the difficultyis the transition from instrumental to relational:

S4: I figured out what our friend Chat's difficulty might be. That of building!

S2: We can do it!!.... […] We must therefore find two topologies to join [...]

S1: Could be useful to take (R, T1) non compact while (R, T2) compact and to join them to construct, taking the sum or the product […]. Perhaps...(Rp1)

S2: As an example, consider the discrete and trivial topologies. No, the meet is not good because you obtain a finer topology (Ap).

S3: Let us consider the *cofinite* and the open left half-lines topologies […](Ep)

The group compares to find a good example by reasoning about the general characteristics constituting a topological space:

S1: If we take the set of the real numbers R equipped by the topology obtained by adding the singletons of R to the *cofinite* topology, we obtain a topology. Mhhh […] We must reason extra metric…

S3: Consider $\omega 1$, the countable ordinals, and the order topology. Yeahh!!

Students use their specialised knowledge (Sp) and AI (Ep) to create new ideas (Cp2). Understanding the challenges of AI helps understand its limitations. This episode highlights AI's role in helping them grow as mathematicians and model their identity.

***Episode 2* - Students' logbooks.** The excerpt from FTG1 logbook (Dp, Np, Rp2) shows that students approached the interaction with ChatGPT while solving the task with determination,disassembling any beliefs about the reliability of ChatGPT (Cp1; Rp1) and building their autonomy in relation to the responses of ChatGPT. In the excerpts from the Pages 1 and 3, they say: *ChatGPT provides examples of non-compact sets in (*$\mathbb{R}$, *COF) which, in our opinion, are wrong for the previous proof* referring to a proof they had made (Ap) and, discussing the verification page, they highlight that AI *does not provide consistent answers, contradicting itself* (Ep) and this act denotes maturity (Mp) (Miranda, 2023b) and the shaping of math identity:

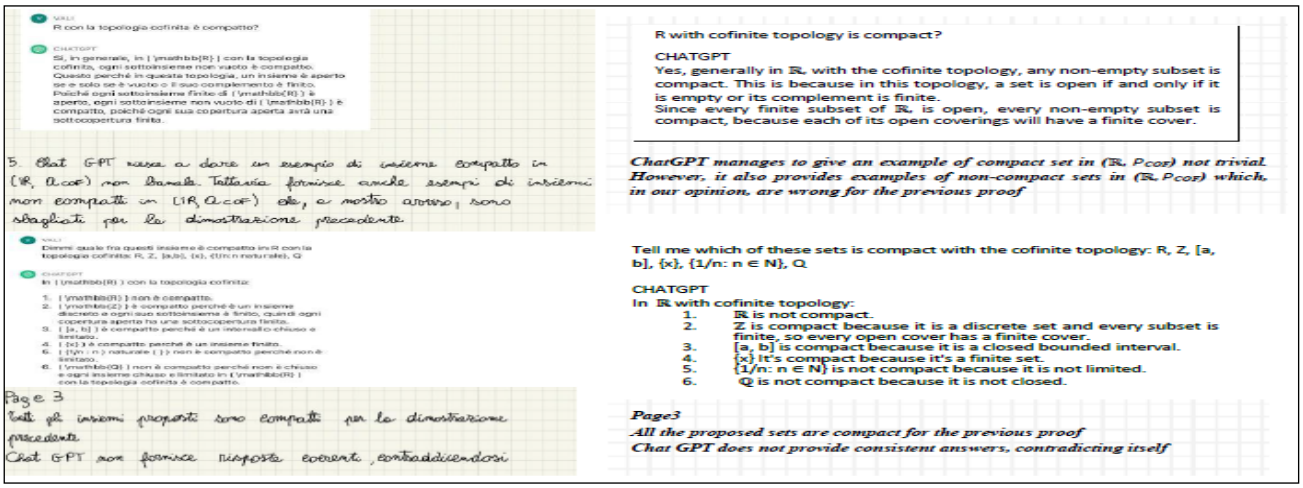


Figure 2: From FTG1' logbook: AI-students' positioning in the *cofinite* topology.

FTG1: We chose the *cofinite topology* as a topology to work on […] Regarding Page 2, we immediately observed that R and each of its subsets with the *cofinite* topology are compact; this caused great satisfaction in us [...]. ChatGPT gave contradictory answers to the questions on Page 3. At first, it seemed strange to us, but by reasoning together (*FTG social positioning*), we convinced ourselves of our observation by not giving it weight and acknowledging its mistakes.

FTG2 group interprets AI knowledge, improving both understanding and early teaching skills, thus strengthening identity and beginning to shape teacher identity.

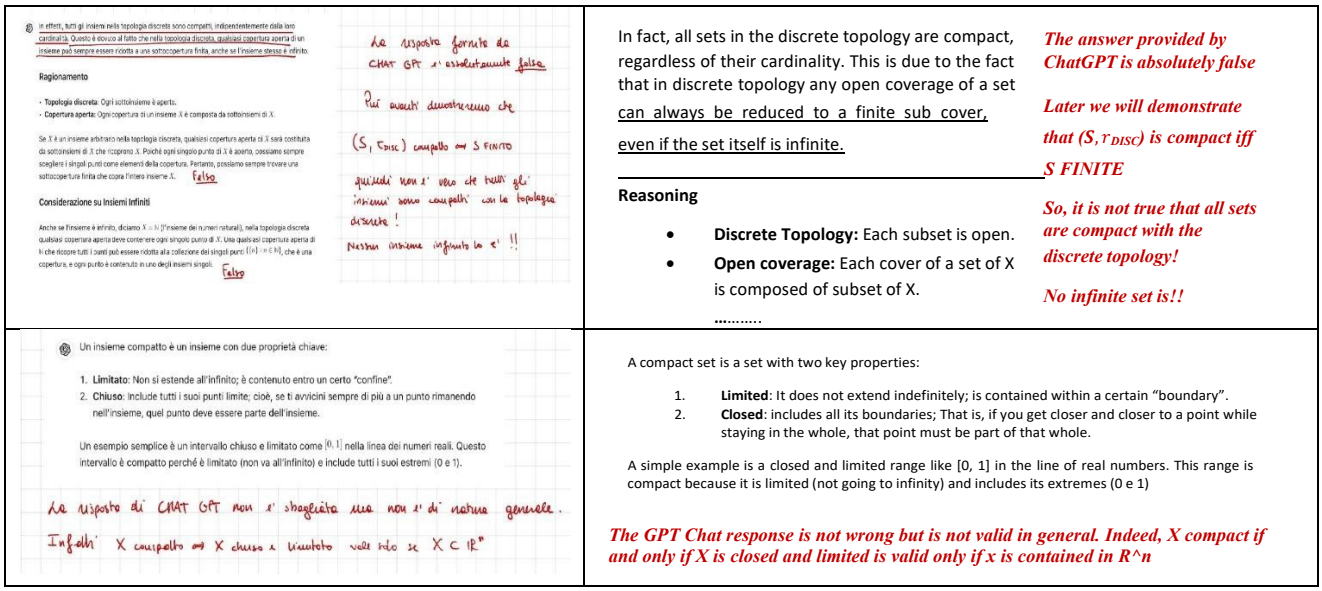


Figure 3 - From FTG2 logbook: AI- students' positionings in the discrete topology.

FTG2: In this logbook, we will share our experiences by trying to critically describe (Cp1, Dp) the difficulties encountered, the organisational choices, and the strategic decisions for carrying out this work. We choose working on a topological space equipped with discrete topology. [...] [Page 1] [Page 2] Examples have been an opportunity to explore and understand notions more deeply. Furthermore, the comparison with the ChatGPT responses helped us to clarify the concepts[Page 3] We noticed that ChatGPT provides

inaccurate or misleading information, which could lead to misunderstandings or misinterpretations. This activity has given us the opportunity to deeply explore topology, to compare our insights, and to improve our rigorous reasoning, by discussing our ideas with AI's one.

***Episode 3* - Students' personal self-perceptions of student-AI relations.** The feedback questionnaire reveals students' perceptions of AI's limitations and of how their mathematics identity is transforming. Students' positioning in answering: *What do you take away from your interactions with ChatGPT?* influence their identity:

S4: Being in a group helps you learn more about yourself than being alone. The presence of ChatGPT heightened this feeling for me. I believe it gave us the motivation to build like real mathematicians. And to recognise its limits has given us a strong motivation to grow by expanding our knowledge.

AI has called into question the role of the teacher, the motivations of a future teacher, and the mathematical identity of mathematics teachers and mathematics students:

S1: When we asked ChatGPT to explain the definition of topological space, I was impressed by its clarity. I felt very small, thinking that, by asking AI, I could find the correct answer to any mathematical problem. I felt useless in my future because I was going to teach math. Then, when we asked to build a counterexample, I relaxed. However, its weakness motivated us to build it.

AI helps students recognise their role as problem solvers, thus shaping their identity:

S2: Just as we were wondering what the point of a teacher's explanation of a concept could be, the challenge arrived! We had a lot of fun and satisfaction, especially when we constructed counterexamples. Our conversation with AI was productive and elicited emotional answers (Ep).

In the dynamic of the new didactic system, AI has a significant role. ChatGPT is useful for recalling useful definitions and theorems, as well as assisting students with their application, but it appears to fail in the absence of a procedure. AI helps students recall previous knowledge, while students can use it to construct new knowledge.

CONCLUSION AND FUTURE RESEARCH DIRECTIONS

Results highlight that AI integration doesn't simply add a tool to mathematics education, but fundamentally alters the positioning landscape through which mathematical and teacher identities are constructed and negotiated. The AI acts as both positioning agent (through its responses that influence how students see themselves mathematically) and positioned object (as students critically evaluate, correct, or build upon AI contributions). This dual role generates new positioning possibilities: students can adopt specialist positioning by correcting AI, mature positioning by recognizing AI limitations, or creative positioning by constructing examples AI cannot generate. The teacher's agency shapes the discourse with AI through designing a task remodulating knowledge and teaching methods. This involves transforming both personal mathematics and the mathematics to be taught. The presence of AI thus amplifies traditional positioning dynamics, creating opportunities for identity

development that emerge specifically from human-AI discursive negotiations rather than purely human-human interactions. However, the specific topic could limit generalizability, while the short intervention period might not capture long-term identity development patterns. Future research, also moving in the perspective of the theory of the Mathematical Working Space (Kuzniak *et al.*, 2022), should examine longitudinal identity development across different mathematical domains, and investigate how AI evolution will transform human-AI positioning dynamics and pedagogical design principles for identity formation.

REFERENCES

Andreouli, E. (2010). Identity, positioning and self-other relations. *Social Representations*.19, 14.1-14.13.

Austin, J. L. (1962). How to do things with words. Cambridge, Harvard University Press.

Chevallard Y. (1985), *La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné*. Grénoble, La Pensée Sauvage.

Dahlberg, R. P., & Housman, D. L. (1997). Facilitating learning events through example generation. *Educational Studies in Mathematics*, *33*, 283-299.

Darragh, L. (2016). Identity research in mathematics education. *Educ Studies in Mathematics, 93,* 19-33.

Gallagher, K., & Infante, E. N. (2022). A Case Study of Undergraduates' Proving Behaviors and Uses of Visual Representations in Identification of Key Ideas in Topology. *IJRUM E 8*, 176-210.

Heider, K. (1975). What do people do? dani auto-ethnography? J. *Anthropol. Res*. 31, 3-17.

Van Langenhove , L. & Harré, R. (Eds.). (1999). *Positioning theory: Moral contexts of intentional action*. Oxford, UK: Blackwell.

Kontorovich, I., & Greenwood, S. (2023). From collaborative construction, through whole-class presentation, to a posteriori reflection: Proof progression in a topology classroom. *IJRUME*

Kuzniak, A., Montoya-Delgadillo, E., & Richard, P.R. (2022). *Mathematical Work in Educational Context: The Perspective of the Theory of Mathematical Working Spaces*. Springer Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-030-90850-8

Miranda, A. (2023a). Thinking Groups and the Development of Affective Problem-Solving Competencies in Online Learning Environments at the University Level. In: Fulantelli *et al.* (eds) HELMeTO 2022. *CCIS*, vol 1779. Springer.

Miranda A. (2023b). Building mathematical maturity through algebraic topology challenging paths. InLowrie, T., Gutiérrez, A., & Emprin, F. (Eds.), *Proceedings of*

the 26th ICMI Study Conference (Advances in Geometry Education) (pp. 101-108). ICMI.

Pepin, B., Buchholtz, N. & Salinas-Hernández, U. A Scoping Survey of ChatGPT in Mathematics Education. *Digital Exp Math Educ* 11, 9-41 (2025).

Pinner, R.S. (2018). Re-learning from experience: using autoethnography for teacher development. *Educational Action Research* 26(1), 91-105

Ribeiro, M., Mellone, M., & Jakobsen, A. (2016). Interpreting students' non-standard reasoning: Insights formathematics teacher education practices. *For the Learning of Mathematics*, *36*(2), 8-13.

Richard, P. R. Pilar Vélez, M. & Van Vaerenbergh S. (2022). Mathematics education in the age of artificial intelligence: How artificial intelligence can serve mathematical human learning. Vol.17 MEDE. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-86909-0

Watson, A. & Mason, J. (2005). *Mathematics as a constructive activity: Learners generating examples*. Lawrence Erlbaum Associate.

DESIGNING SITUATIONS TO DEVELOP MATHEMATICAL FLEXIBILITY AND IDENTIFY STUDENTS' EMOTIONS

Mónica Arnal-Palacián[1], Nuria Begué[1], Mónica Marbán[2]

[1]University of Zaragoza, [2]King Juan Carlos University

INTRODUCTION

A teacher must be able to design enriching situations that help students to have an adequate and complete understanding of different mathematical concepts, as well as to be able to approach problem-solving in different ways. However, on numerous occasions, a single solution is proposed, attempting to replicate the same procedure repeatedly, in the absence of flexible mathematical reasoning.

Flexibility has been studied from both psychological and mathematical education perspectives (Callejo & Zapatera, 2014). This has led to the existence of different meanings of the term: the amount of variation that a person can introduce in notions and mental operations (Demetriou, 2004), the ability of a person to modify the resolution of a problem by modifying the task (Krems, 1995), and the ability to solve problems by breaking with stereotypical methods of resolution (Krutetskii, 1976). In this research, flexibility is considered to be the ability to produce multiple strategies to solve the same problem (Heinze *et al.*, 2009). Star and Rittle-Johnson (2008) further distinguish between knowledge of different strategies and the choice of the most appropriate strategy for a particular circumstance.

Our research is based on the idea that affective processes cannot be separated from cognitive processes. Likewise, we understand affect in the teaching and learning of mathematics as a system of variables (Andrà *et al.*, 2023); although we position ourselves in its study from the point of view of emotions. Emotions play an important role in making decisions (conscious or unconscious) about the uses of mathematical knowledge (Quintanilla & Gallardo, 2020). In addition, positive emotions are related to greater creativity and variety of thinking (Greensfeld & Deutsch, 2022). Finally, it is alarming how many negative emotions we find among future mathematics teachers (Coppola *et al.*, 2012), which makes it necessary to study them and the possible modification of these emotions before becoming mathematics teachers.

This paper aims: 1) to analyse the flexible thinking in preservice teachers when they are given a problem, 2) to identify the emotions experienced while trying to solve a problem flexibly.

The interest of this study focuses on analysing the type of strategies that trainee teachers propose when they are asked to solve the same problem in different ways. As reported in the literature, the relationship between cognition and affectivity leads us to question whether students are able to identify the emotions they experience after the process of solving the task.

STUDY DESIGN FOR DATA COLLECTION

The preservice teachers are asked to do two very different activities; the first one is to solve a mathematical task and the second one is related to the emotions felt with mathematical work.

To address the first objective, the research team proposed problems the Mathematical Olympiad (5th-6th year of Primary Education) to 53 preservice teachers from a Spanish public university, for which the following task was requested: "solve the following task and show the whole solving process in as many ways as possible. Also present the resolutions that led you to both a correct and an incorrect solution". These problems were raised at different points during the course. The first problem posed (Figure 1) serves as an example.

The study included the responses of 53 pre-service teachers in Primary Education at a Spanish public university.

Durante una comida familiar hay un abuelo, una abuela, dos padres, dos madres, una tía, cinco hijos e hijas (dos hijos y tres hijas), tres nietos y nietas (dos nietas y un nieto), dos hermanos, tres hermanas,un suegro, una suegra y una nuera. ¿Cuántas personas han asistido a la comida familiar?

Translation: During a family meal there is a grandfather, a grandmother, two fathers, two mothers, an aunt, five sons and daughters (two sons and three daughters), three grandsons and granddaughters (two granddaughters and a grandson), two brothers, three sisters, a father-in-law, a mother-in-law and a daughter-in-law. How many people have attended the family meal?

Figure 1. Problem 1 posed to preservice teachers.

In addition, they were asked to fill in a questionnaire indicating the level of agreement or disagreement (1-totally disagree, 2, 3, 4 and 5-totally agree) on some statements related to their attachment to mathematics in their educational stage.

The latter could make it possible to check whether the emotions experienced in solving a problem in a flexible way are exclusively linked to the course of the solving itself or whether previous experience with mathematics is significantly interfering.

Finally, after solving each problem, they were asked to select four emotions that had arisen during the resolution of each problem. The emotions considered by the research team were: happy, bored, angry, confident, proud, frustrated, satisfied, worried, motivated and distrustful.

ANALYSIS OF THE RESPONSES

In relation to the mathematical task, it is observed that 90% of the preservice teachers identify a single resolution. This analysis focused on identifying the type of strategy: addition of quantities given in the statement (6), diagram (23), trial and error (14), list of attributes (9) and no answer (1).

In the affective part we focus on the emotions chosen by the future teachers when solving the mathematical task. The frequencies we have obtained for the given emotions are: satisfied (39), motivated (34), distrustful (29), frustrated (28), happy (21), proud (17), worried (16), confident (13), angry (5) and bored (4). So, a complementary analysis would be to identify whether there are differences in flexibility according to the kind of problem.

STUDY RESULTS

The results show a difficulty in developing different resolutions, which has implications for the decisions made during the teaching and learning process. In this regard, tasks that promote flexibility allows preservice teachers to identify the existence of different resolutions, which encourages them to value and expect different processes. Therefore, these situations are essential in teacher training because they improve understanding of math content and provide a broader perspective on the expected procedures.

On the other hand, students report feeling more positive than negative emotions when solving the mathematical problem. However, it is still necessary to obtain more information on these emotional processes and the relationship with the mathematical task requested.

ACKNOWLEDGEMENTS

This text is carried out thanks to the institutional support of the University of Zaragoza (PI_DTOST) in 2023 (ID_4755) and 2024 (ID_5185) with the title “Mathematical flexibility: a learning opportunity of arithmetic for teachers in training”. In addition, it has been developed in the research group S60_23R-Research in Mathematics Education funded by the Government of Aragon for the period 2023-2025.

REFERENCES

Andrà, C., Erens, R., Hatisaru, V., & Rott, B. (2023). MAVI 2021 special issue: The growing recognition of affect in mathematics education. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 54*(8), 1373-1379. https://doi.org/10.1080/0020739X.2023.2231322

Callejo, M. L., & Zapatera, A. (2014). Flexibilidad en la resolución de problemas de identificación de patrones lineales en estudiantes de educación secundaria. *Bolema: Boletim de Educação Matemática, 2*8(48), 64-88. https://doi.org/10.1590/1980-4415v28n48a04

Coppola, C., Di Martino, P., Pacelli, T., & Sabena, C. (2012). Primary teachers’ affect: A crucial variable in the teaching of mathematics. *Nordic Studies in Mathematics Education, 17*(3-4), 101-118.

Demetriou, A. (2004). Mind, intelligence and development: a cognitive, differential and developmental theory of intelligence. In A. Demetriou & A. Raftopoulos (Eds.),

Cognitive developmental change: Theories, models and measurement (pp. 21-73). Cambridge University Press.

Heinze, A., Star, J. R., & Verschaffel, L. (2009). Flexible and adaptive use of strategies and representations in mathematics education. *ZDM, 41*(5), 535-540. https://doi.org/10.1007/s11858-009-0214-4

Star, J. R., & Rittle-Johnson, B. (2008). Flexibility in problem solving: The case of equation solving. *Learning and Instruction, 18*, 565-579.

Greensfeld, H., & Deutsch, Z. (2022). Mathematical challenges and the positive emotions they engender. *Mathematics Education Research Journal, 34*(1), 15-36. https://doi.org/10.1007/s13394-020-00330-1

Krems, J. F. (1995). *Cognitive flexibility and complex problem solving. Complex problem solving: The European perspective* (pp. 201-218). Psychology Press.

Krutetskii, V. A. (1976). *The Psychology of Mathematical Abilities in Schoolchildren*. University of Chicago Press.

Quintanilla, V. A., & Gallardo, J. (2020). Identificar experiencias emocionales para mejorar la comprensión en matemáticas. *Uno,* (88), 24-33.

ENRICHIR COLLECTIVEMENT LES ETM IDOINES, UNE EXPÉRIMENTATION DE TYPE LESSON STUDY SUR 3 ANS

Nicolas Grenier-Boley, Blandine Masselin, Laurent Vivier, Jordan Martin, Caroline Beaudet

LDAR, Université Paris Cité, CY Cergy Paris Université, Univ. Paris Est Créteil, Univ. Lille, Univ. Artois, Univ. Rouen Normandie

L'analyse de trois Lesson Studies développées sur 3 ans avec un même collectif d'enseignants permet d'envisager l'évolution du collectif dans cette formation.

INTRODUCTION : LES LESSONS STUDIES ADAPTES

Inspirées des Lesson Study japonaises (Lewis *et al.*, 2009), les Lessons Studies adaptées (Masselin, 2020), notées LSa, sont un dispositif complexe impliquant plusieurs communautés de pratiques (Wenger, 1998), des enseignants, des formateurs et des chercheurs. Elles visent le développement professionnel des enseignants de mathématiques. Leurs caractéristiques, avec un collectif d'enseignants (Masselin *et al.*, 2022) permettent de considérer les LSa comme une formation collaborative.

Une caractéristique des LSa est de partir de germes de situation développés en amont de la formation. Un germe de situation (Masselin et al, 2023 ; Masselin & Artigue, 2024) est le texte d'un problème ouvert qui est proposé aux enseignants et travaillé collectivement pour en faire une situation d'enseignement en classe. Son énoncé peut être adapté en fonction du contexte et de certains choix du collectif. Une LSa se déploie sur trois jours de formation en présence, autour d'un même germe.

Le premier jour, J1, est consacré à l'analyse du germe puis à la préparation collective d'une séance de classe. Le second jour, J2, la séance est mise en œuvre dans une classe par l'un des enseignants du collectif, elle est observée en direct par le reste du collectif, puis analysée. Différé dans le temps, le troisième jour, J3, permet aux enseignants du collectif de partager le bilan de l'expérimentation basée sur la séance mise en œuvre dans chacune de leur classe.

CADRE THEORIQUE DES ETM

On s'appuie sur la notion d'Espace de Travail Mathématique (Kuzniak, 2011) et notamment sur les ETM idoines, modélisant le travail mathématique proposé par l'enseignant à ses élèves, et les ETM personnels des enseignants.

Une LSa permet l'élaboration d'un ETM idoine par le collectif, avec une mise en pratique au sein d'une classe. Un objectif de ces LSa, appuyé par la demande d'expérimentation à conduire entre J2 et J3, est ainsi d'enrichir les ETM idoines de chaque enseignant ainsi que leurs ETM personnels.

Sans aller jusqu'à identifier les ETM idoines et personnels, les données recueillies pendant la formation permettent de relever des éléments de ces différents ETM et de comprendre certaines caractéristiques influençant la réalisation des objectifs des LSa.

UNE ETUDE SUR TROIS ANS

Nos questions de recherche portent sur les relations entre les ETM idoines produits collectivement, les ETM idoines de chaque enseignant, par leurs pratiques déclarées, les ETM personnels de chacun des membres du collectif, et le germe.

Pour cela, nous nous sommes appuyés sur des LSa qui ont été mises en place dans un lycée de Normandie (France) sur trois ans, de 2021 à 2024, avec un même collectif d'enseignants de collège et de lycée, à quelques variations près. Chaque année a été l'objet d'une LSa avec un germe de situation différent. Les données recueillies (vidéos, documents produits par les enseignants, productions d'élèves) permettent d'illustrer l'ensemble du dispositif et les premiers résultats.

Année 1 : « Casseroles »

Le premier germe travaillé et exposé dans notre poster est un problème de modélisation et d'optimisation dans un contexte de fabrication de casseroles[38] :

> Une entreprise doit fabriquer un grand nombre de casseroles ayant un volume de 1 L. Un premier modèle est envisagé avec les caractéristiques suivantes : le rayon du fond de la casserole est de 7 cm ; la hauteur de la casserole est de 6,5 cm. Un des employés prétend qu'en modifiant les dimensions, il est possible de conserver le volume de 1 L en utilisant moins de matière. A-t-il raison ?

Lors du travail en J1, les enseignants ont tendance à favoriser une approche utilisant les fonctions ce qui écrase le jeu entre les différentes variables didactiques de la situation. Ils partagent un ETM des fonctions ce qui leur permet d'arriver rapidement à un consensus. Ils ont également du mal à percevoir les difficultés possibles des élèves en lien avec la modélisation. En particulier, ils considèrent sans discussion le fait que la casserole peut être modélisée par un cylindre avec pour principale grandeur sa surface. L'ETM sur les fonctions occulte possiblement les aspects propres à la modélisation.

On peut penser que la formation a été bénéfique sur ces deux aspects : être sensibilisés aux difficultés spécifiques de la modélisation et prendre du recul avec leur ETM sur les fonctions. Ils ont également apprécié le format « Lesson Study » malgré des réticences ou des incompréhensions en J1. Les analyses permettent de conclure que cette LSa a engendré un travail mathématique relativement éloigné des ETM personnels de certains enseignants, tout en maintenant une certaine proximité ce qui a permis à la formation d'atteindre ses objectifs.

Année 2 : « Lièvre et tortue »

Le second germe s'inscrit dans le domaine des probabilités et statistique :

---

[38] Ce germe a fait l'objet d'un cahier de lesson study publié par le Groupe Activités-Lesson Study sur le site de l'IREM de Rouen. L'énoncé était accompagné d'une photo d'une casserole.

> Une course se passe entre un lièvre et une tortue. La tortue se place devant 6 cases à parcourir en ligne. On lance un dé équilibré à 6 faces. Si le 6 sort, le lièvre gagne la partie, sinon la tortue avance d'une case. La tortue gagne si elle arrive sur la 6ème case. Qui a le plus de chances de gagner ?

Ce germe a mis les enseignants davantage en difficulté, certains disant qu'ils n'étaient pas à l'aise avec le domaine des probabilités. Le travail collectif mené en J1 montre une diversité des approches avec, entre autres choses, la simulation informatique comme levier possible, ou l'importance des approches fréquentiste et laplacienne. Néanmoins, le retour en J3 montre que les ETM idoines des enseignants se focalisent surtout sur le calcul de fractions (telles que $(5/6)^6$) dans une approche presque exclusivement laplacienne ne laissant que peu de place aux technologies et à l'approche fréquentiste – excepté pour un enseignant : ses élèves étaient dans une filière professionnelle avec des difficultés pour l'utilisation du formalisme laplacien.

Cette 2ème LSa a proposé un travail que nous jugeons trop éloigné des ETM personnels des enseignants sur les probabilités, presque exclusivement laplacien. Même si des éléments importants émergent du collectif, ceux-ci ne sont pas considérés au sein de leurs classes. On peut penser que les ETM personnels des enseignants ont constitué un obstacle pour cette LSa, et notamment pour les aspects fréquentistes.

Année 3 : au choix du collectif

Le dernier germe était au choix du collectif, dans la perspective des années suivantes où ils auront à gérer eux-mêmes la LSa. Le germe proposé est en arithmétique :

> On divise un nombre entier naturel par 5, par 7, par 10 et par 15 et il reste toujours 1. Est-ce que les nombres 5000 et 5111 conviennent ? Quels sont les nombres qui conviennent, compris entre 5000 et 6000 ?

Le fait que le collectif se déploie pour la troisième année, couplé au fait que ce germe a été choisi par le collectif permet de repérer une tendance à un consensus et à une stabilisation plus rapide pour l'ETM idoine du collectif, lors de J1 ainsi que pour le bilan fait en J2. Ce bilan met toutefois en valeur la grande variété de formulations des propriétés arithmétiques qui a parfois été un obstacle au travail de certains groupes d'élèves, d'autres groupes ayant pris des initiatives qui n'avaient pas été envisagées *a priori*. Le bilan en J3 montre que ces enseignants ont pu adapter ce germe à leurs classes, ce qui est pour nous une marque d'adéquation des décisions du collectif avec l'ETM personnel de la majorité des enseignants.

CONCLUSION

Dans une LSa, les enseignants doivent, à partir d'un germe, s'engager dans l'élaboration d'un ETM idoine collectif puis à réinvestir cet ETM idoine pour leur classe. L'adéquation entre le germe et les ETM personnels des enseignants est décisif pour les objectifs de la formation. Toutefois, même dans le cas d'une bonne adéquation, il est possible que celle-ci ne fasse que peu évoluer les ETM personnels. La LSa permet plutôt aux enseignants d'envisager des ETM idoines peu visibles à partir de leurs ETM

personnels mais malgré tout réalisables dans leurs classes. Dans cette perspective, le rôle des formateurs animant la LSa est primordial afin de pouvoir saisir des opportunités et orienter la formation.

REFERENCES

Lewis, C. C., Perry, R., & Hurd, J. (2009). Improving mathematic instruction through lesson study: A theoretical model and North American case. *Journal of Mathematics Teacher Education, 12*, 285-304.

Kuzniak, A. (2011). L'espace de Travail Mathématique et ses genèses. *Annales de didactique et de sciences cognitives, 16*, 9-24.

Kuzniak, A., & Richard, P. R. (2014). Spaces for mathematicalMasselin, B. (2020). *Ingénierie de formation en Mathématiques de l'école au lycée: des réalisations inspirées des Lesson Studies*. PURH.

Masselin, B., & Artigue, M. (2024). How the situation seeds used in LSa support the collaborative work of facilitators and future facilitators. In P. Drijvers, C. Csapodi, H. Palmér, K. Gosztonyi & E. Kónya (Eds.), *Proceedings of CERME13*, 4996-5003.

Masselin, B., Hartmann, F., & Artigue, M. (2023). Étude du rôle des facilitateurs dans un dispositif de Lesson Study adapté, *Annales de Didactique et de Sciences cognitives,* numéro thématique 1, 213-260. https://doi.org/10.4000/adsc.1816

Wenger, E. (1998). Communities of practice: Learning as a social system. *Systems thinker*, *9*(5), 2-3.

GENÈSE D'UN ETM IDOINE DE FORMATION ORIGINAL SUR LE NOMBRE POUR DE FUTURS PROFESSEURS D'ÉCOLES

Konstantinos Nikolantonakis, Florence Peteers, Laurent Vivier

Université de Macédoine Ouest, Grèce ; LDAR, université Paris Cité, CYU Paris-université, UPEC, Ulille, URouen-Normandie

Nous revenons sur 15 ans de recherche sur le nombre en base quelconque avec des enseignants du 1er degré en formation initiale. Nous identifions en particulier les évolutions importantes du travail demandé aux étudiants en formation que nous interprétons avec le cadre des ETM.

INTRODUCTION

Dans la formation initiale des futurs enseignants du 1er degré, il est très souvent proposé un travail sur les nombres dans des bases autres que dix. L'objectif est de faire prendre conscience du caractère artificiel en mathématique de la base dix, de distinguer le nombre de sa représentation chiffrée usuelle. Nous reprenons ici un travail de 15 années sur ce thème qui a abouti à l'élaboration d'une formation ambitieuse et robuste que nous interprétons comme un ETM idoine de formation.

Un ETM idoine de formation est un espace apprêté par un formateur pour effectuer un certain travail mathématique menant au développement d'un ETM spécifique chez les enseignants en formation. La théorie des ETM se propose d'étudier le travail mathématique en mettant en avant les dimensions sémiotique, instrumentale et discursive que l'on retrouve, entre autres, dans les ETM idoines.

EPOQUE 1 (2009-2010) : DES TACHES PROBLEMATIQUES

A cette époque, il était question de produire une recherche sur le thème pour identifier les connaissances des étudiants, leurs difficultés, sans intervenir sur la formation. Celle-ci se contentait, sur quelques heures de formation[39], de travailler le codage, l'aspect ordinal, la conversion entre deux bases dont l'une est très souvent la base dix ainsi que quelques opérations simples.

La recherche s'est ainsi focalisée sur cinq tâches reprenant les thèmes abordés, comme la demande d'un successeur ou de parité dans une base donnée. Les analyses ont été produites avec les théories de Duval (2006) et de Chevallard (1999). Pour plus de précision, voir Nikolantonakis et Vivier (2009, 2010, 2016).

En réinterprétant avec la théorie des Espaces de Travail Mathématique (Kuzniak *et al.*, 2022), force était de constater que les étudiants fournissaient un travail essentiellement dans le plan [Sem-Ins] avec souvent une conversion en base dix pour un traitement (non problématique), puis une reconversion dans la base initiale. Faute de développement des ETM en base autres que dix, les algorithmes de conversion et de reconversion s'appuient

[39] Entre 5h et 9h selon l'institution de l'étude (Nikolantonakis & Vivier, 2009, 2010).

uniquement sur des calculs en base dix ce qui renforce le poids de cette dernière. Le discursif peinait à émerger, malgré les tentatives via l'écriture polynomiale. Finalement, ces nouvelles écritures chiffrées étaient-elles des nombres ? Ce travail ne renforçait-il pas l'identification entre un nombre et son écriture en base dix ?

Un travail avec le logiciel CHIC sur 195 étudiants français et 139 grecs (Nikolantonakis & Vivier, 2010) a permis de justifier que les systèmes de représentation de base pouvaient être considérés comme différents (répondant ainsi à une question posée à l'*ETM1*) et de hiérarchiser les types de tâches. Il est aussi mis en évidence une difficulté cognitive majeure pour les bases supérieures à dix et des difficultés quand les techniques en base *a* sont trop différentes de celle en base dix.

En conclusion, ces recherches se sont intéressées à des tâches isolées, proposées dans des bases différentes, en adéquation avec la formation proposée aux futurs enseignants. Il ressort que l'ETM idoine pour la numération en base quelconque alors proposé aux étudiants ne permettait pas d'atteindre les objectifs de formation.

EPOQUE 2 (2013-2017) : A L'OREE D'UN ETM DU NOMBRE EN BASE SIX

Les constats précédents et l'introduction des idées de Tempier (2013) et de Chambris (2010) ont permis un développement qui se focalisait, à l'échelle d'une séance (3h), sur une base unique (sept puis six) en interdisant le recours à la base dix (Nikolantonakis & Vivier, 2016). On partait du sémiotique avec les aspects ordinaux pour relier ensuite aux aspects cardinaux et aux unités de numération. Les sommes étaient également introduites par la réunion de deux collections, ce qui débouchait naturellement sur une technique posée. La volonté était clairement de construire un ETM des nombres mais, limité à une séance, l'ETM idoine ne pouvait atteindre l'objectif de formation. C'était un moyen d'enrichir la formation en ajoutant dans le travail mathématique la nécessité de la dimension discursive tout en montrant le caractère autonome des traitements dans une base de numération, sans nécessité de conversion en base dix.

Néanmoins, il a été montré, notamment par un travail sur l'analogie (Vivier, 2015), l'importance de reposer sur le fonctionnement de la base dix (on avançait la notion d'hybridation), même si les ETM sont différents. Il est en effet très difficile de demander à ce public, largement non scientifique, de tout redéfinir partant de rien. Cela est attesté par l'essai, en 2013, d'une séance sur la numération de Zeckendorf (1972) qui s'appuie sur la suite de Fibonacci et non plus sur les puissances d'une base : c'était beaucoup trop loin des étudiants et le projet a été abandonné au bout d'une heure. De même, il s'avère beaucoup plus productif de travailler en base six que sept car le fonctionnement des deux ETM (dix et six) sont plus proches, tout en étant suffisamment différents.

Les questions sur la numération orale ont bien émergé à la fin de la séance, mais n'ont pas traitées car la formation se limitait à une séance. A cette époque, la notion d'ETM est apparu pour étudier ce thème, et cela n'est sans doute pas un hasard.

Le travail reste malgré tout très sémiotique, avec quelques artefacts symboliques comme le tableau de la suite des nombres qui initiait le travail. Le milieu proposé aux étudiants reste pauvre avec uniquement des questions portant sur le dénombrement, des sommes ou des changements de représentations, uniquement sur papier.

EPOQUE 3 (2018-2024) : UN ETM IDOINE COMPLET DES NOMBRES ET DES MESURES DE GRANDEURS GEOMETRIQUES

L'année 2018 marque un tournant avec une tentative d'explorer d'autres parties des mathématiques comme l'arithmétique, les nombres rationnels (fractions et nombres à virgule) et réels (racines carrées et pi) notamment par un travail de mesures de grandeurs et l'usage du théorème de Pythagore. Le résultat dépasse nos espérances et montre qu'un travail beaucoup plus ambitieux, embrassant la majeure partie des connaissances mathématiques demandées aux Professeurs des Ecoles, est possible (Braconne-Michoux, Nikolantonakis & Vivier, 2019). Cette expérimentation peut être vue comme une élaboration *sauvage* d'un ETM idoine prenant en compte l'ETM des nombres en base six et l'ETM de la géométrie : les séances n'étaient pas anticipées mais conçues au fur et à mesure de la progression des étudiants.

En 2019, repris ensuite en 2022, 2024 et 2025, c'est un ETM idoine plus pensé dans le sens où nous avons davantage réfléchi aux tâches proposées, à leur progression et aux variables qui est alors proposé aux étudiants (Peteers & Vivier, 2022, 2023).

Des tâches de dénombrement sont proposées avec des objets matériels (séance 1) et la transition à la géométrie s'effectue à l'aide d'un hexagone de 1 m de périmètre avec le tracé d'un triangle équilatéral et d'un carré de même périmètre (séance 2). On demande les longueurs des côtés ainsi que les aires de ces figures géométriques. Le développement s'opère dans deux directions : les nombres à virgule et les sous-unités de mesure de longueur. Le travail sur les nombres est relancé, s'accompagnant de la réalisation d'une règle graduée, avec notamment la recherche d'une valeur approchée de $\sqrt{3}$ (pour l'aire du triangle équilatéral) puis le nombre π pour le cercle.

CONCLUSION

Le milieu de la période 3, plus riche que dans la période 2, permet un développement conjoint des ETM du nombre et de la géométrie avec un travail orienté pour la construction des ETM dont les étudiants s'emparent avec intérêt, parfois avec surprise et bonheur de comprendre le système de base dix, qu'ils pensaient connaître.

Il nous semble que l'ETM idoine réalisé après 15 ans atteint l'objectif de formation initial. Du point de vue méthodologique, on améliore notamment la prise de données pour pouvoir montrer les effets de cette formation en base six sur les connaissances et les compétences des étudiants en base dix.

REFERENCES

Braconne-Michoux, A., Nikolantonakis, K. & Vivier, L. (2019). La numération sécimale en formation initiale des enseignants du premier degré, *Actes du 45ème colloque COPIRELEM*, 12-14/06/2018, Blois, France, 649-654.

Chambris, C. (2010). Relations entre grandeurs, nombres et opérations dans les mathématiques de l'école primaire au 20e siècle : théories et écologie. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 30(3), 317-366.

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19.2, 222-265.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics, *Educational Studies in Mathematics*, 61, 103-131.

Kuzniak, A., Montoya Delgadillo, E. & Richard, P. eds (2022). *Mathematical Work in Educational Context – The Mathematical Working Space Theory Perspective*, Mathematics Education in the Digital Era, 18, Springer.

Nikolantonakis, K. & Vivier, L. (2016). El ETM de Futuros Profesores de Primaria en un Trabajo sobre los Números Naturales en Cualquier Base, *Boletim de Educação Matemática – BOLEMA,* volume 30, número 54, 23-44.

Nikolantonakis, K. & Vivier, L. (2010). Registres et praxis pour la numération de position en base quelconque – une étude statistique en France et en Grèce, in *Actes du 5^{e} colloque A.S.I.*, Palermo.

Nikolantonakis, K. & Vivier, L. (2009). La numération en base quelconque pour la formation des enseignants du premier degré en France et en Grèce. Une étude articulant registres et praxéologies, in *Actes de « ETM1 »*, Lefkosia, Chypre.

Peteers, F. & Vivier, L. (2023). Petit détour par le système sécimal. Dans *Actes de ETM7*, 431-442, IREM de Strasbourg, 27 juin-2 juillet 2022, Strasbourg, France.

Peteers, F. & Vivier, L. (2022). Les mathématiques pour la formation des enseignants du premier degré revisitées par le système *sécimal, Grand N*, 109, 33-54.

Tempier, F. (2013). *La numération décimale à l'école primaire. Une ingénierie didactique pour le développement d'une ressource*. Thèse de l'Université Paris Diderot, Paris.

Vivier, L. (2015). Les analogies dans la découverte d'une autre base de numération - la base sept pour de futurs professeurs des écoles, Dans *Les Analogies*, Cahier du LDAR (15) 2015, 118-130.

Zeckendorf, E. (1972). Représentation des nombres naturels par une somme de nombres de Fibonacci ou de nombres de Lucas, *Bull. Soc. R. Sci. Liège,* Vol. 41, 179-182.

THÈME 4 : LE RÔLE DES TÂCHES ET DES SITUATIONS DIDACTIQUES DANS LA FORMATION DU TRAVAIL MATHÉMATIQUE

Alain Kuzniak[1], Kostas Nikolantonakis[2], Elizabeth Montoya Delgadillo[3], Jesús Victoria Flores Salazar[4]

[1]Université Paris Cité, France ; [2]Université de Macédoine Ouest, Grèce ; [3]Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chili ; [4]Pontificia Universidad Católica del Perú

Le thème 4 est centré sur l'usage des tâches et des situations didactiques dans la formation du travail mathématique tout au long du curriculum. Il s'intéresse au type des tâches développées par les professeurs en relation avec les savoirs mathématiques mis en jeu. Il s'appuie sur une réflexion sur la conception, la mise œuvre et l'observation des situations didactiques élaborées pour façonner le travail mathématique des élèves. En reformulant ce thème dans les termes de la théorie des ETM, on peut dire qu'il s''intéresse à la constitution des ETM idoines à partir de l'étude de la conception et de la mise en œuvre de tâches et situations didactiques. Ces dernières permettent d'assurer un jeu dynamique entre le travail de référence et le travail personnel.

SUJET DES CONTRIBUTIONS

Lors d'ETM8, onze communications ont été retenues à laquelle il faut ajouter un poster. Voici la liste des communications avec l'ordre et la date de leur présentation.

Date	Titre	
Lundi 21 octobre 17h30-19h	**Autour des tâches en probabilités**	
	Machuca Katherine et Elizabeth Montoya	Intervención al ETM personal en probabilidad de futuros profesores de matemáticas: situación didáctica o diseño de tareas
	Trunkenwald Jannick	Description d'issues équiprobables et introduction en classe de la loi binomiale.
Mardi 22 octobre 8h30-10h30	**Autour des tâches en analyse**	
	Kostas Nikolantonakis et Elisavet Gemenetzi	The inverse function under the prism of the mathematics working space
	Carrillo -LaraFlor	La derivada y sus conexiones en contextos económicos, desde el espacio de trabajo matemático

	Bezama-Palacios Gaona Jorge	Análisis del espacio de trabajo matemático bajo una situación de aprendizaje para construir el concepto de función afín y lineal en un entorno tecnológico
Mardi 22 octobre 15h - 16h30	**Autour des tâches en géométrie**	
	Michot Sandrine	Conception et mise en œuvre de tâches géométriques pour développer le raisonnement déductif d'élèves de 6e année du primaire au Québec : analyse d'un ETM idoine potentiel
	Darlis- Panqueban, Carolina Henriquez	Tareas emblemáticas adecuadas: estudio de las características para su diseño
Mercredi 23 octobre 8h30 - 10h30	Kostas Nikolantonakis, Polymnia Andreadou	Similarity, History of Mathematics and Personal MWS Geometry of Lower Secondary School students
	Avilés-Henn Denisse, Henríquez-Rivas Carolina	Tareas geométricas en libros de texto con uso de tecnología: ¿qué trabajo matemático propician?
	Hoppenot Philippe	Résolutions d'Équations du premier degré en IUT GEII – Enrichir l'ETM personnel des étudiants
Mercredi 23 octobre 11h - 13h15	**Discussion sur le lien entre l'enseignement et la réalité du travail mathématique produit par les élèves**	
	Masselin Blandine, Kuzniak Alain	Sur les variations de contrats fortement didactiques dans des ETM idoines lors de la mise en œuvre d'une tâche de modélisation géométrique
Jeudi 24 octobre	**Discussion générale et synthèse**	

La présentation des communications a été organisée selon les domaines mathématiques abordés dans les tâches proposées : probabilités, analyse, géométrie et algèbre. La majorité des communications porte sur la formation des enseignants ou celle des étudiants avancés en mathématiques. Deux communications concernent spécifiquement des étudiants universitaires dans des disciplines autres que les mathématiques : l'économie et l'ingénierie électrique.

De nombreuses questions, tant théoriques que méthodologiques, ont été soulevées lors de ces échanges. Voici une liste non exhaustive des thèmes abordés :

- **La nature de l'ETM idoine** : son étude et sa définition. Il est apparu que la distinction entre ETM idoine potentiel et ETM idoine effectif est essentielle pour rendre compte de la différence entre la conception et la mise en œuvre prévue des tâches (ETM potentiel) et leur implémentation finale en classe (ETM effectif).

- **L'importance des tâches pour l'étude du travail mathématique.** L'ensemble des contributions a mis en lumière le fait que la théorie des ETM s'appuie désormais sur un socle théorique et méthodologique particulièrement solide. Les tâches mathématiques apparaissent comme l'un des éléments les plus riches pour progresser vers une meilleure compréhension du travail mathématique. Les études présentées offrent une analyse de plus en plus fine du rôle fondamental des tâches dans l'activation et la formation d'un ETM.

- **Une approche méthodologique mature.** La méthodologie basée sur les ETM s'impose comme une méthode bien établie pour analyser le travail mathématique. Elle repose sur une double analyse, descendante puis ascendante, des actions prévues et réalisées par les élèves. L'identification des plans et des genèses mobilisées s'appuie sur des grilles d'analyse qui précisent et classent les différents objets mobilisés pour résoudre les tâches proposées.

Cette méthodologie est naturellement complétée par des approches permettant de comparer le travail potentiel et le travail effectif, en observant notamment les modifications apportées à l'énoncé de la tâche et leur impact sur l'enseignement (ingénierie didactique, cycle de modélisation, etc.).

L'INFLUENCE DES MODALITÉS DE TRAVAIL

L'idée d'introduire de nouvelles formes d'ETM (en complément des ETM idoines, de référence et personnels) a été évoquée. L'objectif est de prendre en compte des modalités de travail variées, telles que le travail individuel, en binôme ou collectif. Certains auteurs proposent de parler d'**ETM collectifs**, tandis que d'autres soulignent qu'il s'agit plutôt d'organisations locales et différenciées de l'ETM idoine, privilégiant tantôt le travail en groupe, tantôt le travail individuel.

SUR LA RÉALITÉ DU TRAVAIL MATHÉMATIQUE PRODUIT

La question de la réalité du travail mathématique développé et de sa formalisation pendant les séances de classe a également été abordée. Grâce à différents codages et analyses du travail mathématique observé, il est possible de décrire et de caractériser les interactions entre les acteurs pendant les sessions de classe.

Cette interprétation en termes de réalité du travail mathématique produit en classe touche à des enjeux sensibles liés à l'évaluation : évaluation de l'enseignement, évaluation des élèves, évaluation de la qualité du travail. Il est crucial de distinguer les points de vue selon les différents acteurs du système éducatif. Dans le cadre des recherches en didactique, c'est généralement celui du chercheur qui prédomine, sans pour autant exclure d'autres perspectives, notamment institutionnelles ou sociales.

TOPIC 4. ROLE OF TASKS AND DIDACTIC SITUATIONS IN THE CONSTRUCTION OF MATHEMATICAL WORK

Alain Kuzniak[1], Kostas Nikolantonakis[2], Elizabeth Montoya Delgadillo[3], Jesús Victoria Flores Salazar[4]

[1]Université Paris Cité, France ; [2]Université de Macédoine Ouest, Grèce ; [3]Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chili ; [4]Pontificia Universidad Católica del Perú

Theme 4 focuses on the use of tasks and teaching situations in mathematical work throughout the curriculum. It examines the types of tasks developed by teachers in relation to the mathematical knowledge involved. It is based on a reflection on the design, implementation and observation of teaching situations developed to shape pupils' mathematical work. Reformulating this theme in terms of ETM theory, we can say that it focuses on the creation of appropriate ETMs based on the study of the design and implementation of tasks and teaching situations. These enable a dynamic interplay between reference work and personal work.

SUBJECT OF CONTRIBUTIONS

Eleven papers were selected for ETM8, in addition to one poster. Below is a list of the papers, in order of presentation and date.

Date	Title	
Monday, 21 October 17h30-19h	**About probability tasks**	
	Machuca Katherine Elizabeth Montoya	Intervention in the personal MWS in probability for future mathematics teachers: didactical situation or task design
	Trunkenwald Jannick	Description d'issues équiprobables et introduction en classe de la loi binomiale.
Tuesday, 22 October 8h30-10h30	**About tasks in analysis**	
	Kostas Nikolantonakis Elisavet Gemenetzi	The inverse function under the prism of the mathematics working space
	Flor Carrillo Lara	The derivative and its connections in economic contexts, from the mathematical workspace
	Bezama-Palacios	Analysis of the mathematical workspace in a learning situation to

	Bezama-Palacios Gaona Jorge	Analysis of the mathematical workspace in a learning situation to construct the concept of affine and linear functions in a technological environment
Tuesday, 22 October 15h - 16h30	**About geometry tasks**	
	Michot Sandrine	Design and implementation of geometric tasks to develop deductive reasoning in Year 6 primary school pupils in Quebec: analysis of a potential suitable MWS
	Darlis- Panqueban, Carolina Henriquez	Appropriate emblematic tasks: study of characteristics for their design
Wednesday, 23 October 8h30 - 10h30	Kostas Nikolantonakis, Polymnia Andreadou	Similarity, History of Mathematics and Personal MWS Geometry of Lower Secondary School students
	Avilés-Henn Denisse, Henríquez-Rivas Carolina	Geometric tasks in textbooks using technology: what mathematical work do they foster?
	Hoppenot Philippe	Solving first-degree equations in IUT GEII – Enriching students' personal MWS
Wednesday, 23 October 11h - 13h15	**Discussion on the link between teaching and the reality of mathematical work produced by pupils**	
	Masselin Blandine, Kuzniak Alain	On variations in highly didactic contracts in suitable MWS when implementing a geometric modelling task
Thursday, 24 October	**General discussion and summary**	

The presentations were organized according to the mathematical domains addressed in the proposed tasks: probability, analysis, geometry, and algebra. Most of the presentations focus on the training of teachers or advanced mathematics students. Two presentations specifically address university students in disciplines other than mathematics: economics and electrical engineering.

Numerous theoretical and methodological questions were raised during these discussions. Below is a non-exhaustive list of the topics addressed:

- **The nature of the ideal MWS (Mathematical Working Space):** Its study and definition. It became clear that the distinction between potential and effective ideal MWS is essential to account for the difference between the design and planned implementation of tasks (potential MWS) and their final implementation in the classroom (effective MWS).

- **The importance of tasks for studying mathematical work.** The contributions highlighted that the theory of MWS now relies on a particularly robust theoretical and methodological foundation. Mathematical tasks appear as one of the richest elements for advancing our understanding of mathematical work. The presented studies offer an increasingly refined analysis of the fundamental role of tasks in activating and shaping an MWS.

- **A mature methodological approach.** The MWS-based methodology is now well-established for analyzing mathematical work. It relies on a dual analysis —top-down and bottom-up— of the planned and actual actions of students. The identification of the plans and geneses mobilized is supported by analytical frameworks that specify and classify the various objects used to solve the proposed tasks.

This methodology is naturally complemented by approaches that compare potential and effective work, particularly by observing the modifications made to the task statement and their impact on teaching (didactic engineering, modeling cycles, etc.).

THE INFLUENCE OF WORK MODALITIES

The idea of introducing new forms of MWS (in addition to suitable, reference, and personal MWS) was discussed. The goal is to account for different work modalities, such as individual, pair, or collective work. Some authors propose the term **collective MWS**, while others emphasize that these are local and differentiated organizations of the ideal MWS, favoring either group or individual work.

ON THE REALITY OF MATHEMATICAL WORK PRODUCED

The question of the reality of the mathematical work developed and its formalization during class sessions was also addressed. Through various codings and analyses of observed mathematical work, it is possible to describe and characterize the interactions between actors during class sessions.

This interpretation, in terms of the reality of mathematical work produced in class, touches on sensitive issues related to evaluation: evaluation of teaching, evaluation of students, and evaluation of the quality of work. It is crucial to distinguish perspectives

according to the different actors in the educational system. In didactic research, the researcher's perspective generally predominates, without excluding other viewpoints, particularly institutional or social ones.

TEMA 4. EL PAPEL DE LAS TAREAS Y SITUACIONES DIDÁCTICAS EN LA FORMACIÓN DEL TRABAJO MATEMÁTICO

Alain Kuzniak[1], Kostas Nikolantonakis[2], Elizabeth Montoya Delgadillo[3], Jesús Victoria Flores Salazar[4]

[1]Université Paris Cité, France ; [2]Université de Macédoine Ouest, Grèce ; [3]Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chili ; [4]Pontificia Universidad Católica del Perú

El tema 4 se centra en el uso de tareas y situaciones didácticas en la formación del trabajo matemático a lo largo del currículo. Se interesa por el tipo de tareas desarrolladas por los profesores en relación con los conocimientos matemáticos que se ponen en juego. Se basa en una reflexión sobre el diseño, la implementación y la observación de situaciones didácticas elaboradas para moldear el trabajo matemático de los alumnos. Reformulando este tema en términos de la teoría de las ETM, podemos decir que se centra en la constitución de las ETM adecuadas a partir del estudio del diseño y la implementación de tareas y situaciones didácticas. Estas últimas permiten garantizar una interacción dinámica entre el trabajo de referencia y el trabajo personal.

TEMA DE LAS CONTRIBUCIONES

En ETM8 se seleccionaron once comunicaciones, a las que hay que añadir un póster. A continuación, se incluye la lista de comunicaciones con el orden y la fecha de su presentación.

Fecha	Título	
Lunes 21 de octubre 17h30–19h	**En torno a las tareas en probabilidades**	
	Machuca Katherine y Elizabeth Montoya	Intervención al ETM personal en probabilidad de futuros profesores de matemáticas: situación didáctica o diseño de tareas
	Trunkenwald Jannick	Descripción de resultados equiprobables e introducción en clase de la ley binomial.
Martes 22 de octubre 8h30-10h30	**En torno a las tareas en análisis**	
	Kostas Nikolantonakis Elisavet Gemenetzi	La función inversa bajo el prisma del espacio de trabajo matemático

	Carrillo-Lara Flor	La derivada y sus conexiones en contextos económicos, desde el espacio de trabajo matemático
	Bezama-Palacios / Gaona Jorge	Análisis del espacio de trabajo matemático bajo una situación de aprendizaje para construir el concepto de función afín y lineal en un entorno tecnológico
Martes 22 de octubre 15h-16h30	**En torno a las tareas en geometría**	
	Michot Sandrine	Concepción y puesta en práctica de tareas geométricas para desarrollar el razonamiento deductivo de estudiantes de 6.º año de primaria en Quebec: análisis de un ETM idóneo potencial
	Darlis-Panqueban / Carolina Henríquez	Tareas emblemáticas adecuadas: estudio de las características para su diseño
Miércoles 23 de octubre 8h30-10h30	Kostas Nikolantonakis, Polymnia Andreadou	Similitud, historia de la matemática y ETM personal en geometría de estudiantes de educación secundaria inferior
	Avilés-Henn Denisse, Henríquez-Rivas Carolina	Tareas geométricas en libros de texto con uso de tecnología: ¿qué trabajo matemático propician?
	Hoppenot Philippe	Resolución de ecuaciones de primer grado en IUT GEII – Enriquecer el ETM personal de los estudiantes

Miércoles 23 de octubre 11h-13h15	**Debate sobre la relación entre la enseñanza y la realidad del trabajo matemático realizado por los alumnos**	
	Kostas Nikolantonakis, Polymnia Andreadou	Discusión sobre el vínculo entre la enseñanza y la realidad del trabajo matemático producido por los alumnos
	Masselin Blandine, Kuzniak Alain	Sobre las variaciones de contratos fuertemente didácticos en ETM idóneos durante la implementación de una tarea de modelización geométrica
Jueves 24 de octubre	**Discusión general y síntesis**	

Las presentaciones se organizaron según los dominios matemáticos abordados en las tareas propuestas: probabilidad, análisis, geometría y álgebra. La mayoría de las comunicaciones se centran en la formación de profesores o de estudiantes de matemáticas de nivel superior. Dos comunicaciones tratan específicamente sobre estudiantes universitarios en disciplinas distintas a las matemáticas: economía e ingeniería eléctrica.

Numerosas cuestiones, tanto teóricas como metodológicas, fueron abordadas durante estas discusiones. A continuación, se presenta una lista no exhaustiva de los temas tratados:

- **La naturaleza del ETM idóneo (Espacio de Trabajo Matemático):** Su estudio y definición. Se evidenció que la distinción entre ETM idóneo potencial y ETM idóneo efectivo es esencial para dar cuenta de la diferencia entre la concepción y la implementación prevista de las tareas (ETM potencial) y su implementación final en el aula (ETM efectivo).

- **La importancia de las tareas para el estudio del trabajo matemático.** Las contribuciones pusieron de manifiesto que la teoría del ETM se basa ahora en un marco teórico y metodológico particularmente sólido. Las tareas matemáticas aparecen como uno de los elementos más ricos para avanzar en la comprensión del trabajo matemático. Los estudios presentados ofrecen un análisis cada vez más detallado del papel fundamental de las tareas en la activación y formación de un ETM.
- **Un enfoque metodológico maduro.** La metodología basada en el ETM está consolidada para analizar el trabajo matemático. Se fundamenta en un análisis dual, descendente y ascendente, de las acciones previstas y realizadas por los estudiantes. La identificación de los planos y génesis movilizados se apoya en

cuadros de análisis que precisan y clasifican los diferentes objetos utilizados para resolver las tareas propuestas.

Esta metodología se complementa de manera natural con enfoques que permiten comparar el trabajo potencial y el trabajo efectivo, observando especialmente las modificaciones realizadas en el enunciado de la tarea y su impacto en la enseñanza (ingeniería didáctica, ciclos de modelización, etc.).

LA INFLUENCIA DE LAS MODALIDADES DE TRABAJO

Se planteó la idea de introducir nuevas formas de ETM (además de los ETM idóneo, de referencia y personal). El objetivo es tomar en cuenta diferentes modalidades de trabajo, como el trabajo individual, en pareja o colectivo. Algunos autores proponen utilizar el término de **ETM colectivos**, mientras que otros hacen hincapié en que se trata de organizaciones locales y diferenciadas del ETM idóneo, que privilegian ya sea el trabajo en grupo o el trabajo individual.

SOBRE LA REALIDAD DEL TRABAJO MATEMÁTICO PRODUCIDO

También se abordó la cuestión de la realidad del trabajo matemático desarrollado y su formalización durante las sesiones de clase. A través de diferentes codificaciones y análisis del trabajo matemático observado es posible describir y caracterizar las interacciones entre los diferentes actores durante las sesiones de clase.

Esta interpretación, en términos de la realidad del trabajo matemático desarrollado en clase, aborda temas sensibles relacionados con la evaluación: evaluación de la enseñanza, evaluación de los estudiantes y evaluación de la calidad del trabajo. Es crucial distinguir los puntos de vista según los diferentes actores del sistema educativo. En el marco de la investigación en didáctica, generalmente predomina la perspectiva del investigador, sin excluir otras perspectivas, especialmente las institucionales o sociales.

DISEÑO DE SITUACIONES DIDÁCTICAS: UNA REFLEXIÓN EN EL DOMINIO DE LA PROBABILIDAD

Katherine Machuca Pérez, Elizabeth Montoya Delgadillo

Universidad Viña del Mar, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile

Katherine.machuca@uvm.cl, Elizabeth.montoya@pucv.cl

En esta presentación se expone una reflexión sobre dos situaciones didácticas (SD). En una de ellas es posible generar dos respuestas diferentes y correctas dependiendo del experimento aleatorio que se considera, mientras que en la otra se integran progresivamente diferentes enfoques de la Probabilidad, uso de material concreto y simulación computacional mediante el artefacto tecnológico hoja de cálculo Excel. Las adaptaciones de tareas basadas en estudios epistemológicos como didácticos nos permiten discutir sobre el rol de tareas que promuevan un trabajo matemático completo. Los datos que se muestran corresponden a una investigación cualitativa cuyo método es un estudio de caso, compuesto por profesores en formación inicial (PMFI) en una universidad de Chile.

INTRODUCCIÓN

Diversas adaptaciones son necesarias a tareas para poder generar una SD que contribuya a un ETM idóneo potencial, o bien, para contribuir en el aprendizaje de un estudiante, ETM personal. El desafío es grande y existe una reflexión sobre el diseño de estas tareas, que sean coherente a (los) paradigmas en juego en un dominio específico y a la comunidad escolar. Por otro lado, la implementación y la observación de las SD desarrolladas para formar y estudiar el trabajo matemático de los PMFI son cuestiones centrales para las investigaciones que se desarrollan, en particular, con la teoría de los ETM (Kuzniak, 2022).

En los últimos simposios de los ETM diversas contribuciones hablan de tareas que permitan un ETM completo, pero ¿cómo diseñarlas? ¿cómo los investigadores pueden asegurar que un conjunto de tareas o situaciones didácticas permitió que se generara un ETM completo?; en términos teóricos, ¿es suficiente la activación de las génesis o planos? Esta comunicación, tiene por objetivo generar una reflexión sobre el rol de las tareas en la configuración de una situación didáctica.

El concepto de probabilidad es de naturaleza dual (Hacking, 1975/1995). Por un lado, es objetiva relacionada con frecuencias relativas estables, y por otro, es subjetiva vinculada con grados de creencias garantizados por la evidencia. A partir de estas corrientes primarias, se han desarrollado diferentes interpretaciones a lo largo de la historia; intuitivas, clásicas, frecuentista, subjetivas, lógicas, propensas y axiomáticas, son las que coexisten en la actualidad (Batanero *et al.*, 2005).

En el campo de la educación matemática las interpretaciones sobre la probabilidad señaladas anteriormente no se presentan de la misma manera. Se reconocen tres enfoques dominantes; clásico o teórico, frecuentista y subjetivo. Desde el *enfoque clásico*, el cálculo de la probabilidad es posible de realizar cuando el conjunto de todos los casos igualmente posibles es finito. Una de las críticas de este enfoque es el carácter subjetivo relacionado con la necesidad de juzgar los diferentes resultados como igualmente probables (Batanero *et al.*, 2005). A través del *enfoque frecuentista* se puede estimar probabilidades de sucesos aleatorios a partir de la frecuencia relativa estabilizada y observada en un gran número de ensayos idénticos e independientes del experimento aleatorio (Batanero *et al.*, 2016; Vásquez y Alsina, 2016). En el *enfoque subjetivo* de la probabilidad, el supuesto básico es que las personas poseen sus propias probabilidades ante ciertos acontecimientos, las cuales provienen de un esquema predispuesto de manera implícita entre las decisiones (Borovcnik y Kapadia, 2014). Desde este enfoque, en su reciente estudio, Rifo *et al.* (2022) consideran que la probabilidad es una medida que se asigna a la incertidumbre de un cierto suceso en estrecha dependencia del estado actual del conocimiento del sujeto que observa y modela, la cual es posible de actualizar o ajustar cuando se adquiere nueva información.

Diferentes investigadores han señalado que la probabilidad se trata de modelar sistemas del mundo real para comprenderlos (Chaput *et al.*, 2011). Desde una perspectiva teórica, Nechache (2016) propone un ciclo de modelización en probabilidad considerando tres etapas fundamentales, al cual nosotros nos acogemos en este trabajo. Sin lugar a duda, la probabilidad nos ofrece una forma diferente de razonar en matemáticas, el cálculo de probabilidad aplicado a una situación que involucra el azar, conlleva a realizar hipótesis que sustentan el modelo de experimento aleatorio para abordar la situación.

Devlin (2014) se aventura a conjeturar sobre un error común y generalizado sobre la probabilidad, esta es que “mucha gente cree que los eventos, es decir, las cosas que suceden en el mundo tienen una probabilidad única” (Devlin, 2014, p. 10). Por otro lado, el gran desarrollo tecnológico ha permitido hoy en día que en la enseñanza de la probabilidad se utilice la simulación por computadora de experimentos, la cual se ha convertido en una herramienta esencial, ofreciendo una gran cantidad de datos en un corto período de tiempo (Nechache y Parzysz, 2022).

De esta manera nos propusimos diseñar e implementar, en la formación inicial de profesores, situaciones didácticas que integran diferentes enfoques probabilísticos, uso de material concreto y simulación computacional.

ESPACIO DE TRABAJO MATEMÁTICO (ETM)

Nuestra investigación se sustenta en los Espacio de Trabajo Matemático (ETM), permite comprender cómo se construye conceptual y progresivamente el significado de los objetos matemáticos involucrados, desde la coordinación entre las dimensiones epistemológicas y cognitivas, relativos a las instituciones y personas involucradas en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática.

La noción de trabajo matemático es el núcleo de la teoría, el cual es concebido como una actividad intelectual de producción, en constante evolución y construcción, cuyo objetivo y desarrollo está centrado en las matemáticas. Los propósitos, procesos y resultados son aspectos relacionados con la ejecución y desarrollo del trabajo matemático (Kuzniak, 2022). Diremos que un *trabajo matemático es completo* cuando existe una circulación fluida a través de las diferentes génesis y planos verticales (Kuzniak, 2022), cuya hipótesis en relación con el aprendizaje es que "sólo el trabajo completo tiene sentido y engendra aprendizaje" (Menares y Vivier, 2022, p. 92). Un ETM completo no es la simple activación de planos verticales, sino que una activación articulada de estos y en concordancia con los paradigmas para generar las condiciones de un aprendizaje. Así, desde una perspectiva teórica, nos propusimos que las situaciones didácticas promuevan un trabajo matemático completo

También consideramos la noción de paradigma en el dominio de la probabilidad (Nechache, 2016; Parzysz, 2011, 2014), y del cual, nosotros hemos complementado y profundizado en ellos (Machuca, 2023).

Paradigma 1: la probabilidad está asociada a fenómenos del mundo real considerando un experimento aleatorio concreto caracterizado por un protocolo experimental preciso asociado al conjunto de resultados posibles que se quiere considerar originando un experimento pseudo-concreto. Podemos situarnos desde tres formas de determinar la probabilidad de un suceso: basándose en la intuición o percepción inmediata del suceso de una manera generalmente poco consciente, en una estimación en relación con la frecuencia relativa o regularidad que se presenta al repetir en "condiciones similares" un experimento aleatorio concreto. O también basándose en un conteo mediante alguna representación pictórica utilizando la equiprobabilidad generalmente de forma implícita.

Paradigma 2: se comienza a dejar de lado los fenómenos del mundo real, considerando un experimento aleatorio genérico y diferentes reglas de cálculo para asignar probabilidad. Podemos situarnos desde tres formas de considerar la probabilidad cuantitativa de que un suceso: mediante álgebra de eventos, con modelos clásicos (Laplace) y distribuciones de probabilidad, o través de una estimación en relación con la frecuencia relativa que se presenta en una simulación por computadora mediante la programación del experimento aleatorio considerado como modelo.

Paradigma 3: desde este paradigma ya no se considera un experimento aleatorio genérico ni concreto, sino más bien la probabilidad está asociada la estructura puramente matemática. Tampoco se requiere tanto de técnicas de cálculos, sino que se basa en un trabajo basado en demostraciones matemáticas considerando la probabilidad en su concepción axiomática.

De esta manera, podemos decir que el trabajo matemático en los paradigmas uno, dos y tres, considera modelos intuitivos, analíticos y estructurales respectivamente.

EL DISEÑO DE LA INVESTIGACIÓN

Los datos que presentamos en esta comunicación corresponden a una metodología cualitativa, estudio de *caso instrumental* (Stake, 2010) compuesto por cinco PMFI próximos a terminar su formación, identificados en adelante como TE1, TE2, TE3, TE4 y TE5, todos pertenecientes a una universidad en la región de Valparaíso, Chile. Uno de los PMFI se encontraba en el décimo semestre de la carrera (de un total de nueve) mientras que los otros estaban en su octavo semestre. Todos ellos tenían aprobado dos cursos de estadística, y un curso de didáctica de la estadística. Utilizamos *observación participante* (Ruiz, 2012) como técnica de recogida de datos, la investigadora se integra al grupo de PMFI cuyo rol es la profesora que realiza la implementación de las situaciones didácticas, el registro fue escrito y oral (producciones y videos). También utilizamos la técnica de entrevista individual enfocada (Ruiz, 2012) cuyo foco de interés era confirmar (o no) las interpretaciones sobre el trabajo matemático personal de los PMFI. Esta se realizó de forma online individual (un total de cinco entrevistas), en diciembre del 2020 y de carácter semiabierta.

Las situaciones didácticas

Diseñamos e implementamos dos SD para estudiar los ETM personales de los PMFI, en un contexto de taller online noviembre del 2020 desarrollado en tres sesiones de 1h30 las dos primeras y de 2h30 la tercera sesión. La *primera SD* con la tarea de los bancos y llamada "los bancos del cerro barón" contempló seis momentos. La SD pone en evidencia que la probabilidad de los eventos no es única, y que esta depende de los supuestos o hipótesis que el sujeto considere, la noción de experimento aleatorio y protocolo experimental son importantes en nuestra situación desde el enfoque de modelización en probabilidad.

La con la tarea de la lana, y llamada "los cortes en la lana" constó de tres momentos. En esta SD se hizo transitar intencionadamente al profesor en formación inicial en tareas con diferentes enfoques de la probabilidad: intuitivo, frecuentista asociado a un trabajo con material concreto y simulación computacional, laplaciano mediante una razón entre áreas, para terminar con variables aleatorias continuas uniformemente distribuidas y con el cálculo de la probabilidad mediante la integración de funciones

de densidad. Además, utilizamos el ciclo de modelización en probabilidad como una herramienta metodológica para el diseño de esta SD.

A continuación, presentamos un esquema general de cada una de las SD (ver figura 1 y figura 2), indicamos la tarea que se aborda en cada una de ellas, así como también lo que se realizó en cada uno de los momentos. Cabe señalar que, en cada uno de ellos se presentaron diferentes preguntas, y también realizamos puestas en común. Las principales nociones matemáticas del referencial teórico tratadas fueron experimento aleatorio, protocolo experimental, espacio muestral, variables aleatorias, función de densidad, independencia, enfoques intuitivo, frecuentista y teórico de la probabilidad, un detalle más completo de cada uno de ellas lo puede encontrar en Machuca (2023).

Figura 1: Análisis a priori de la SD con la tarea de los bancos.

Nosotros identificamos cinco modelos analíticos diferentes para tratar en la SD 1 (con la tarea de los bancos), en el cual se activan diferentes planos verticales y el trabajo se guía a priori por los paradigmas P1 y P2. Si bien es cierto que un solo modelo no activa todos los planos verticales, al considerarlos en conjunto podemos señalar que, si se activan todos ellos, por consiguiente, podemos hablar de un diseño que activa trabajo matemático completo.

En cuanto a la SD 2 (con la tarea de la lana), en la figura 2 se muestra cada enfoque probabilístico y modelo intencionado, dando cuenta de los diferente planos activados y paradigmas orientadores del trabajo matemático.

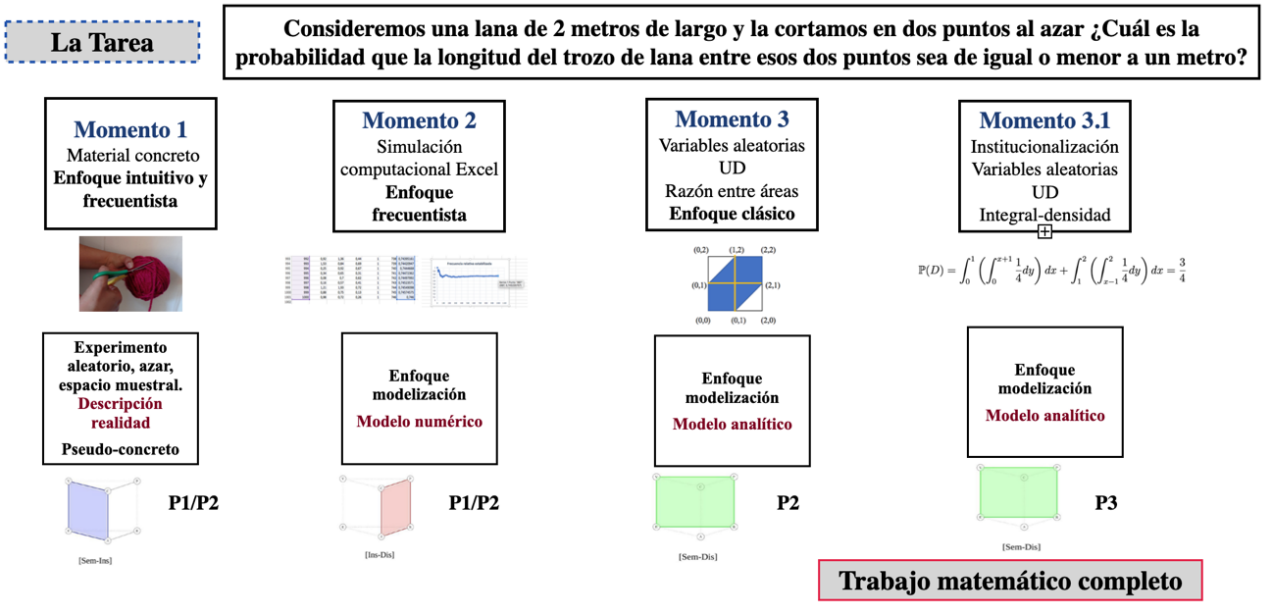


Figura 2: Análisis *a priori* de la SD con la tarea de la lana.

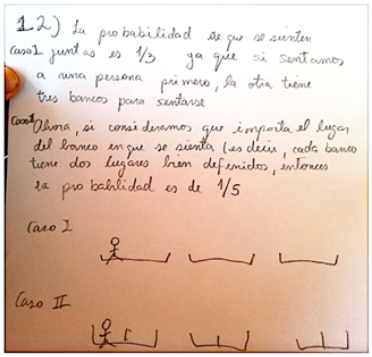
En consecuencia, el trabajo de los PMFI se orientará por diferentes paradigmas del ETM en el domino de la probabilidad y se utilizarán conjuntamente herramientas semióticas, tecnológicas y teóricas del ETM a medida que se desarrolla la implementación de la SD. Con todo lo anterior, podemos señalar que esta situación didáctica genera, a priori, un trabajo matemático potencialmente completo.

Debemos señalar que la SD 2 "los cortes en la lana" se piloteó con varios profesores en formación continua (alrededor de 25 profesores) lo que nos permitió mejorar el diseño para generar un trabajo matemático completo.

ANÁLISIS Y RESULTADOS.

En primer lugar, presentaremos los análisis en relación con la situación didáctica con la tarea de los bancos. Al respecto, podemos referirnos sobre un conocimiento en probabilidad poco acabado, ya que cuando se pregunta en el momento cero ¿Qué entiendes sobre la noción de probabilidad? en las respuestas obtenidas, observamos que ningún PMFI hace referencia a una noción más robusta de la probabilidad que implique diferentes enfoques o haga alusión al experimento aleatorio.

En cuanto a la resolución de la tarea planteada, de las cinco producciones analizadas, en ninguna de ellas se describe o señala de manera explícita el experimento aleatorio en cuestión, sin embargo, es posible deducir implícitamente de sus producciones y entrevistas, que dos producciones consideran el experimento aleatorio considerando los seis asientos, dos los tres bancos y sólo una de ellas considera ambas interpretaciones como se muestra en la figura 2.



Transcripción:

1.2) La probabilidad de que se sienten **Caso 1** juntas es 1/3 ya que **si sentamos a una persona primero**, la otra tiene tres bancos para sentarse **Caso 2** Ahora, si consideramos que **importa el lugar** del en que se sienta (es decir, cada banco tiene dos lugares bien definidos, entonces la probabilidad es de 1/5

Figura 3: Producción de TE2 que considera ambos experimentos aleatorios.

En la producción de la figura 3, podemos señalar que, al igual que en otras dos producciones, el cálculo de la probabilidad se realiza en base a la segunda persona que se sienta, la primera se considera sentada de ante mano, es decir, la primera persona no se sienta al azar, sino que en una posición fija y sólo se considera la probabilidad para la segunda persona que se sienta en un banco o asiento, cuestión que corroboramos durante la entrevista. También podemos señalar que una de las dificultades mencionadas por TE2 es que pensaba que una de las interpretaciones era incorrecta:

> *TP2: dado que el problema me daba la posibilidad de realizar suposiciones que conducían a distintas resoluciones, me dificultó escoger una estrategia, ya que no tenía claro cuál era "la correcta"…La unicidad de las respuestas de los problemas a los que tradicionalmente me enfrento, me llevó a pensar equivocadamente que una de las estrategias era incorrecta.*

También podemos dar cuenta que en todas las producciones hay supuestos implícitos, como los asientos o bancos vacíos, la equiprobabilidad, y no se explicita el experimento aleatorio en ninguna de ellas. En algunas producciones se utilizó una representación pictórica como modelo probabilístico cuyo cálculo de la probabilidad es mediante un conteo, en las cuales no se explicita ni justifica el uso de la equiprobabilidad, por tanto, consideramos que el trabajo efectivo de los PMFI es guiado por el paradigma P1. Se observa un predominio de la génesis semiótica y una ausencia de la génesis discursiva, ya que no se justifica la equiprobabilidad ni el uso de la regla de Laplace, activando en consecuencia el plano [Sem-Ins].

Finalmente, en cuanto a las reflexiones surgidas durante el último momento, destacamos aquella que en probabilidad es posible considerar respuestas diferentes y correctas dependiendo del experimento aleatorio que se considera, resultando un cambio en su forma de pensar en probabilidad.

> *TP2: …esta actividad resultó totalmente revolucionaria para mi formación, ya que por primera vez me veo enfrentado a un problema de probabilidad que admite dos respuestas diferentes correctas…*

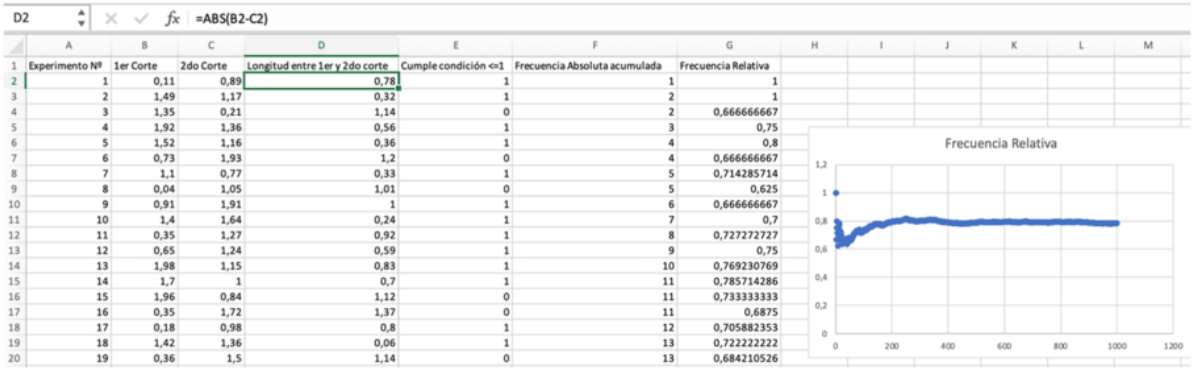
En cuanto a las dificultades presentadas, además de la señala anteriormente, destacamos aquella que tiene relación con el experimento aleatorio en cuestión y los supuestos involucrados, como se menciona en la siguiente reflexión:

> *TP1: ...no tenía claro si considerar las posibles posiciones en una banca o si las bancas estaban vacías o no. En otras palabras, me costó definir cuál sería en sí el experimento aleatorio considerado.*

En cuanto la SD 2 con la tarea de la lana, en relación con la experimentación con material concreto, podemos dar cuenta que algunos PMFI trataban de hacer los cortes intencionadamente, así como otros, se tapaban los ojos para que fuese un corte cualquiera (¡y azaroso!). Durante este momento el trabajo de los profesores se privilegió la génesis instrumental, utilizando una lana y tijeras como artefactos materiales y realizando acciones sobre estos, de modo de obtener los cortes en la lana al azar, cuyo trabajo se enmarca en el paradigma P1, pues se trata de un experimento aleatorio concreto. Producto que los razonamientos de los profesores no se apoyaron en nociones pertenecientes al referencial teórico tales como el "azar" involucrado y la independencia (o no) en la realización de los cortes, el plano [Ins-Dis] no se activó como nosotros esperábamos. Sin embargo, debido a las diferentes interacciones en esta etapa, permitió a los profesores una concientización sobre lo problemático de entender el azar involucrado y de nociones que se presentan de forma implícita, como la dependencia, independencia o equiprobabilidad. En relación con el espacio muestral, destacamos el contraste entre el trabajo previsto por nosotros, es decir, $\Omega = [0, 2] \times [0, 2]$, y el trabajo realizado por los profesores, ya que en una sólo producción (TP2) se presentó un espacio muestral similar al que nosotros esperábamos.

Debido a que el modelo real del experimento aleatorio es fundamental para la realización de la simulación computacional, se decidió socializar todas las respuestas de los profesores durante el cierre del primer momento con el fin de problematizar dicha noción, haciendo la distinción entre aquellos profesores que consideraron ya sea espacios muestrales en entornos discretos o continuos, y a su vez, enfatizando en la producción TP2 señalada anteriormente. Esto nos permitió consensuar finalmente sobre las hipótesis que consideraríamos y sobre el espacio muestral considerado, ya que este era fundamental para la realización de la simulación computacional en el momento siguiente.

Durante el segundo momento los PMFI realizaron una simulación computacional con el artefacto tecnológico, hoja de cálculo Excel, para abordar la tarea entregando una aproximación mediante el enfoque frecuentista de la probabilidad. Durante este momento la investigadora oriento a los PMFI pudieron realizar la programación y simulación del experimento involucrado en la tarea, pues se había evidenciado en el piloto una débil instrumentalización de esta herramienta digital. Así, los PMFI pudieron entregar una aproximación de la probabilidad buscada, como se evidencia en la figura 4.



	A	B	C	D	E	F	G
1	Experimento Nº	1er Corte	2do Corte	Longitud entre 1er y 2do corte	Cumple condición <=1	Frecuencia Absoluta acumulada	Frecuencia Relativa
2	1	0,11	0,89	0,78	1	1	1
3	2	1,49	1,17	0,32	1	2	1
4	3	1,35	0,21	1,14	0	2	0,666666667
5	4	1,92	1,36	0,56	1	3	0,75
6	5	1,52	1,16	0,36	1	4	0,8
7	6	0,73	1,93	1,2	0	4	0,666666667
8	7	1,1	0,77	0,33	1	5	0,714285714
9	8	0,04	1,05	1,01	0	5	0,625
10	9	0,91	1,91	1	1	6	0,666666667
11	10	1,4	1,64	0,24	1	7	0,7
12	11	0,35	1,27	0,92	1	8	0,727272727
13	12	0,65	1,24	0,59	1	9	0,75
14	13	1,98	1,15	0,83	1	10	0,769230769
15	14	1,7	1	0,7	1	11	0,785714286
16	15	1,96	0,84	1,12	0	11	0,733333333
17	16	0,35	1,72	1,37	0	11	0,6875
18	17	0,18	0,98	0,8	1	12	0,705882353
19	18	1,42	1,36	0,06	1	13	0,722222222
20	19	0,36	1,5	1,14	0	13	0,684210526

Figura 4: Producción de TE5, simulación computacional.

Durante la simulación computacional el trabajo se orientó por el paradigma P1, pues se iteró el modelo de experimento aleatorio introducido en la hoja de cálculo. Posteriormente, para estimar el valor de la probabilidad, los PMFI utilizaron la ley de los grandes números y por lo tanto se activa la génesis discursiva cuyo trabajo se orienta por el paradigma P2. El proceso de visualización señalado anteriormente, en conjunto con la ley de los grandes números tuvieron un rol preponderante, ya que permitió a gran parte a los PMFI entregar una aproximación de la probabilidad teórica.

Finalmente, durante el tercer momento los PMFI realizaron el cálculo teórico de la probabilidad mediante una razón entre áreas. Podemos dar cuenta que tres PMFI pudieron realizar dicho cálculo de manera correcta, como se evidencia en la producción de la figura 5. La dificultad de los otros dos participantes consistió en la resolución de inecuaciones y su análisis al comportamiento gráfico de las áreas involucradas en consecuencia, un obstáculo de conversión entre registros (figura l al simbólico)

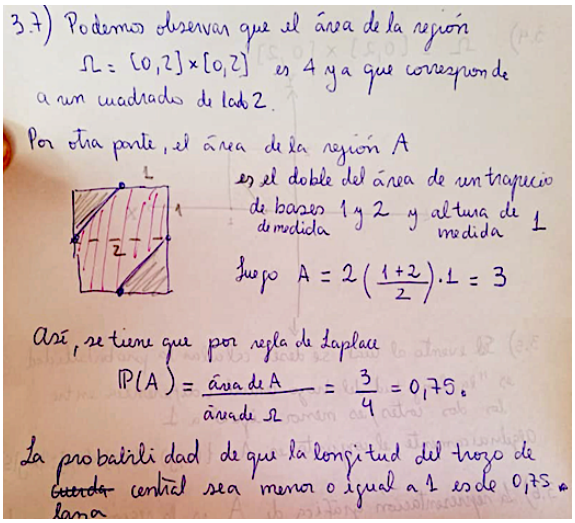


Figura 5: Producción de TE2, resolución teórica de la tarea con la lana.

En consecuencia, los PMFI transitaron por diferentes enfoques de probabilidad y activaron diferentes planos verticales. Podemos evidenciar que la implementación de

las situaciones didácticas fortaleció su ETM personal con esta triada sistémica que ofrece el ETM, con nociones matemáticas que la literatura evidencia como complejas para el aprendizaje, tales como espacio muestral, experimento aleatorio, protocolo experimental, variable aleatoria, el cálculo de la probabilidad en un entorno continuo, los diferentes enfoques de la probabilidad, la ley de los grandes números y la noción de la probabilidad. Nuestros datos nos permiten afirmar que hemos evidenciando una evolución en sus ETM personales, específicamente con la noción de probabilidad, y destacamos la afirmación en la entrevista de un PMFI "la probabilidad depende de los supuestos de quien se aproxima a calcularla y de los razonamientos de este".

CONCLUSIONES

Los resultados no indican que, una SD que permite dos respuestas diferentes y correctas dependiendo del experimento aleatorio en cuestión, permitió a los PMFI un cambio importante sobre la idea común y generalizada de que los eventos tienen probabilidad única. Mientras que la otra SD que integra progresivamente diferentes enfoques de la probabilidad tuvo un papel positivo en el desarrollo de la comprensión de la probabilidad por parte de los PMFI. En términos teóricos, la implementación de la SD permitió una circulación por los diferentes planos verticales de ETM, cobrando sentido en el ETM personal de los PMFI.

El estudio histórico epistemológico y las diversas investigaciones consideradas, nos permitió estudiar el ETM de referencia para tratar dinámicamente las dimensiones y fundamentos de esta teoría hasta generar un aprendizaje de la Probabilidad gracias al diseño intencionado de un ETM completo en los PMFI.

Entregamos elementos y cuestionamientos que nos permitan dar una reflexión crítica al rol de las tareas que generen un trabajo matemático completo, en una comunidad que se interesa en generar situaciones didácticas que aseguren una interacción dinámica entre el trabajo de referencia y el trabajo personal para transponer saberes (ETM idóneo potencial) y generar conocimiento (ETM personal). La simple activación de las génesis no genera un ETM completo, y, por último, nos acogemos a lo discutido en el panel del ETM7, un conjunto de tareas tampoco es sinónimo de una situación didáctica.

BIBLIOGRAFÍA

Batanero, C., Chernoff, E., Engel, J., Lee, H., & Sánchez, E. (2016). *Research on Teaching and Learning Probability*. Springer, Cham.

Batanero, C., Henry, M., & Parzysz, B. (2005). The nature of chance and probability. In G. Jones (Ed.), *Exploring probablity in school: Challenges for teaching and learning* (pp. 15-37). Springer.

Borovcnik, M., & Kapadia, R. (2014). A historical and philosophical perspective on probability. In E. Chernoff & B. Sriraman (Eds.), *Probabilistic thinking: presenting plural perspectives* (pp. 7-34). Springer.

Chaput, B., Girard, J. C., & Henry, M. (2011). Frequentist Approach: Modelling and Simulation in Statistics and Probability Teaching. In C. Batanero, G. Burrill, & C. Reading (Eds.), *Teaching Statistics in school mathematics challenges for teaching and teacher education. A joint ICMI and IASE study* (Vol. 14, pp. 85-95).Springer.

Chernoff, E., & Russell, G. L. (2014). Preface to Perspective I: Mathematics and Philosophy. In E. Chernoff & B. Sriraman (Eds.), *Probablistic Thinking* (pp. 3-5). Springer.

Devlin, K. (2014). The most common misconception about probability. In E. J. Chernoff & B. Sriraman (Eds.), *Probabilistic thinking: presenting plural perspectives*. Springer.

Fine, T. (1973). *Theories of probability: An examination of foundations*. Academic Press, INC.

Hacking, I. (1975). *The emergence of probability: a philosophical study of early ideas about probability induction and statistical inference*. Cambridge University Press.

Kuzniak, A. (2022). The Theory of Mathematical Working Spaces - Theoretical Characteristics. In *Mathematical Work in Educational Context* (pp. 3-31). Springer, Cham.

Kuzniak, A., Nechache, A., & Drouhard, J. P. (2016). Understanding the development of mathematical work in the context of the classroom. *ZDM - International Journal on Mathematics Education*, *48*(6), 861-874.

Machuca, K. (2023). *El trabajo probabilístico en la formación inicial docente en Chile*. Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.

Menares, R., & Vivier, L. (2022). Personal Mathematical Work and Personal MWS. In A. Kuzniak, E. Montoya, & P. R. Richard (Eds.), *Mathematical Work in Educational Context. Mathematics Education in the Digital Era*. Springer, Cham.

Nechache, A. (2016). *La validation dans l' enseignement des probabilités au niveau secondaire. Histoire et perspectives sur les mathématiques*. Université Denis Diderot. Français.

Nechache, A., & Parzysz, B. (2022). Le rôle de la simulation informatique dans L' articulation des domaines Probabiliste et Statistique. *PdiUAQ*, *5*, 1-13.

Parzysz, B. (2011). Quelques questions didactiques de la statistique et des probabilités. *Annales de Didactique et Des Sciences Cognitives*, *16*, 127-147.

Parzysz, B. (2014). Espaces de travail en simulation d'expèrience aléatoire au lycée : Une étude de cas. *Revista Latinoamericana de Investigacion En Matematica Educativa*, *17*(4), 65-82.

Rifo, L., Estrella, S., & Vidal-Szabó, P. (2022). Enfoque subjetivo de la probabilidad en el conocimiento especializado de profesores de matemática en formación. In J. Carrillo-Yañez, M. Á. Montes, & N. Climent (Eds.), *Investigación sobre conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK): 10 años de camino* (pp. 179-190). Editorial DYKINSON, S.L.

Ruiz, J. I. (2012). *Teoría y práctica de la investigación cualitativa*. Universidad de Deusto.

Stake, R. (2010). *Investigación con estudio de casos*. Editorial Morata, Madrid, quinta edición.

Vásquez, C., & Alsina, Á. (2016). Probabilidad su desarrollo y significados. In J. Zacarías, V. Vásquez, H. Reyes, F. Tajonar, H. Cruz, F. Velasco, & B. Juárez (Eds.), *Investigación en Educación Estadística y Probabilística* (pp. 143-162).

DESCRIPTION D'ISSUES ÉQUIPROBABLES ET INTRODUCTION EN CLASSE DE LA LOI BINOMIALE

Jannick Trunkenwald

Lycée Fénelon (Académie de Paris)

Laboratoire Didactique André Revuz (LDAR, Université de Paris Cité)

Cette communication aborde l'interaction pouvant exister dans l'apprentissage entre la mise en œuvre de la Formule de Laplace et la découverte de la loi binomiale. La réflexion menée se base sur une expérimentation de thèse portant sur les formes de travail mathématiques mobilisées par les élèves de lycée autour de la notion de probabilité, en lien avec les approches fréquentiste et combinatoire sous-jacentes. L'analyse menée à l'aide de l'ETM met en évidence certaines difficultés rencontrées par les élèves ayant développé des automatismes dans la description d'univers équiprobables, lorsque la situation se complexifie.

PRESENTATION DE L'ÉTUDE

Concernant la probabilité qu'un évènement donné se réalise au cours d'une expérience aléatoire, deux approches sont envisageables. Une première approche a priori, dite combinatoire, permettant d'obtenir une valeur exacte de la probabilité à partir d'un univers constitué d'issues possibles. Une deuxième approche a posteriori, dite fréquentiste, permet d'estimer empiriquement cette valeur de probabilité par l'observation de données réelles issues d'un grand nombre de répétitions de l'expérience aléatoire considérée, ou d'une simulation de celle-ci.

En lien avec le processus de modélisation mathématique d'un phénomène aléatoire, notre thèse (Trunkenwald, 2023) traite de la question générale suivante : « **Quelles sont les formes de travail mathématique associées à une mise en lien des approches fréquentiste et combinatoire, lorsque des élèves de lycée en classe de terminale abordent la notion de probabilité ?** ».

La première question de recherche, « **Comment les élèves mettent-ils en lien l'observation empirique d'une fluctuation des fréquences, avec la mesure d'une probabilité ? »,** nous a amené à confronter individuellement des élèves de terminale à une tâche basée sur la règle d'un jeu. Il s'agit de lancer simultané de deux dés équilibrés à 6 faces. On gagne à ce jeu si on obtient un total d'au-moins 9 points affiché par les deux dés.

Une première phase de l'expérimentation oriente alors les élèves vers l'étude de données présentées sous forme d'échantillons de taille 50 permettant de conjecturer une valeur approchée de probabilité de gagner à ce jeu. Puis les élèves doivent déterminer sa valeur exacte par un raisonnement.

La deuxième question de recherche : « **Quelles sont les formes de travail mathématique des élèves lorsqu'ils se confrontent avec la double approches**

fréquentiste et combinatoire de l'intervalle de fluctuation ? » nous amène à déterminer les bornes d'un intervalle de fluctuation de fiabilité 0,95 pour la variable aléatoire correspondant à la fréquence des succès pour un échantillon de taille 50. Cette approche combinatoire est alors basée sur la loi binomiale B(50 ;10/36), et permet de confirmer l'intervalle de fluctuation empirique initialement observé.

Pour mettre en œuvre cette méthodologie, une phase intermédiaire est aménagée afin de faciliter la découverte par les élèves de la loi binomiale. La taille des échantillons est modifiée à 5 pour permettre une étude de la loi de probabilité sous-jacente. Il s'agit de mettre en évidence la loi binomiale B(5 ;10/36) à l'aide de propriétés élémentaires s'appuyant sur des arbres de probabilités, ou des techniques de dénombrement.

Dans cet article nous portons notre attention sur l'émergence, au cours de cette 2ème phase, intermédiaire, de l'expérimentation, de la loi binomiale. Nous identifions alors l'influence de la mise en place à bon escient, d'un univers équiprobable au cours de la 1ère phase expérimentale. Cela apporte une réponse importante à la 1ère question de recherche, du point de vue particulier de l'approche combinatoire de la notion de fréquence.

EMERGENCE DE LA FORME DE TRAVAIL ASSOCIÉE À LA DESCRIPTION D'ISSUES ÉQUIPROBABLES

Nous étudions les Espaces de Travail Mathématique spécifiques (Kuzniak et al, 2022) au sein de deux domaines mathématiques (Montoya Delgadillo & Vivier, 2014). Nous projetons l'ETM au sein de deux domaines : celui des probabilités (ETMP) et celui des statistiques descriptives (ETMS). Cela nous permet d'identifier des genèses qui sont discursive (DIS) pour la réalisation d'une preuve, sémiotique (SEM) pour la réalisation d'une visualisation, ou instrumentale (INS) pour la réalisation d'une construction.

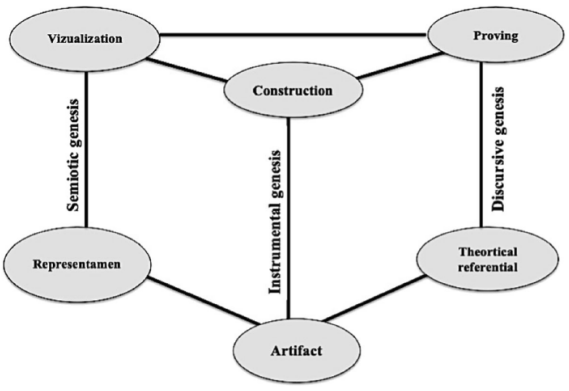


Fig. 1 : L'Espace de Travail Mathématique (Kuzniak, 2022).

Cette circulation du travail mathématique au cours des différents épisodes enchaînés par chaque élève, nous permet d'identifier des formes élémentaires de travail, qui participent chacune de l'approche fréquentiste, ou de l'approche combinatoire.

En appui sur les travaux de Nechache liés à la validation (Nechache, 2015), nous définissons un niveau de validation dit lacunaire, superficiel, ou complet. Ce niveau

dépend du nombre de genèses renforçant la genèse discursive de preuve. Un tel niveau est affecté à chacune des formes de travail, dont certaines sont exploitées pour identifier un style de travail mathématique personnel de l'élève, tout au long de l'expérimentation.

La première phase expérimentale correspond à l'analyse par les élèves de 80 échantillons de taille 50 (nuage de points représentant des fréquences de succès), qui sont issus d'une simulation de l'expérience aléatoire correspondant au jeu de dés.

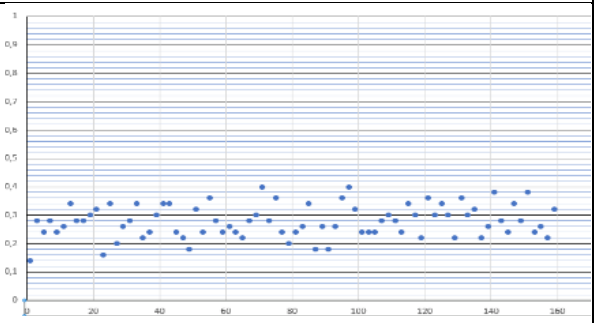
<table>
<tr><th colspan="2">Énoncé de la Tâche 1 (2 heures) : LE JEU DU 9 OU PLUS AVEC LES DEUX DÉS</th></tr>
<tr><td>Enoncé</td><td>Consignes</td></tr>
<tr><td>Contexte global</td><td>Un jeu consiste à lancer deux dés cubiques équilibrés numérotés chacun de 1 à 6. On gagne si la somme des deux valeurs affichées sur la face supérieure vaut au-moins 9.</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Sous-tâche 1.1</td><td>1) On a simulé ce jeu en produisant 80 échantillons de 50 lancers des deux dés. C'est-à-dire que pour produire chacun de ces 80 échantillons, on a testé le jeu 50 fois. Les 80 fréquences de succès obtenues on été représentées dans le graphique ci-dessous.
 
Chaque point représente un échantillon de 50 parties, avec en ordonnée la fréquence des succès. On a placé ces 80 points toutes les deux unités d'abscisse (de 1 à 160).</td></tr>
<tr><td>a) Résumez les données du graphique pour situer les valeurs des 80 fréquences simulées. Expliquer votre démarche.</td></tr>
<tr><td>b) Peut-on estimer à partir de ce graphique une valeur approchée de la probabilité de gagner à ce jeu ? Si vous pensez que oui, proposez un protocole, en expliquant votre démarche, et présentez la valeur approchée de probabilité obtenue. Si vous pensez que non, expliquez pourquoi.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Phase de mise en commun</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Sous-tâche 1.2</td><td>c) On rappelle que pour gagner une partie à ce jeu, on doit obtenir au-moins 9 en ajoutant les résultats des lancers des deux dés. On souhaite déterminer la valeur exacte de cette probabilité de gagner. Présenter une démarche en justifiant clairement le résultat obtenu.</td></tr>
<tr><td>d) Pouvez-vous établir un lien, ou une correspondance, entre le résultat de la question précédente, et le premier graphique ? Quelles sont incertitudes ou les difficultés que vous avez rencontré en résolvant cet exercice ?...</td></tr>
<tr><td colspan="2">Phase de mise en commun</td></tr>
</table>

Fig. 2 : Énoncé de la tâche 1 et de ses sous-tâches (Trunkenwald, 2023).

Dans le cadre d'une première sous-tâche 1.1, les élèves conjecturent une valeur approchée de la probabilité de gagner à ce jeu à partir de ces données empiriques. Ils peuvent pour cela observer l'intervalle de fluctuation des fréquences obtenu. Lors de

cette première sous-tâche, les élèves peuvent mettre en œuvre différentes stratégies dans le but de conjecturer une valeur de probabilité.

Puis lors d'une deuxième sous-tâche 1.2 les élèves justifient l'obtention d'une valeur exacte de la probabilité de gagner en se servant d'un raisonnement adapté à la règle de ce jeu. Ils doivent obtenir p = 10/36. Cela s'obtient à l'aide d'un tableau à double entrée, ou d'un arbre de dénombrement, ou encore de l'inventaire de tous les couples de valeurs possibles pour chacun des dés.

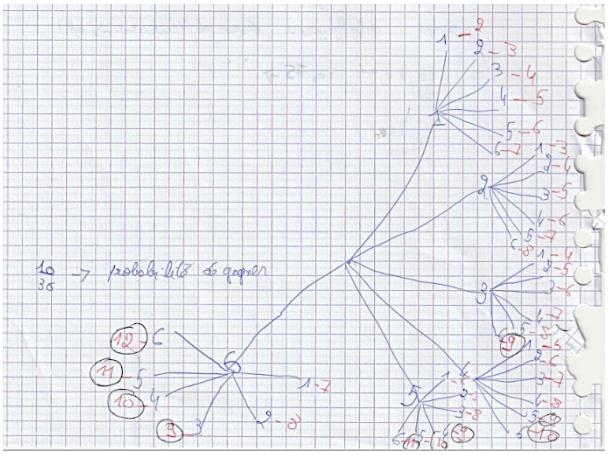


Fig. 3 : Forme AC3 réalisée par l'élève E3 pour la sous-tâche 1.1 (Trunkenwald, 2023).

La forme combinatoire AC3 est identifiée lors de cette phase. Le travail mathématique associé correspond à la visualisation des issues d'un univers équiprobable à l'aide de signes exprimés au sein d'un registre de représentation probabiliste, puis construction d'une description complète, menant à une preuve probabiliste.
Nous associons un style spécifique à l'élève dit *planificateur* qui met en œuvre cette forme AC3, en fournissant un travail mathématique complet et correct au cours de la première phase expérimentale.
La 1ère phase expérimentale, correspondant à la tâche 1, a permis d'identifier deux groupes disjoints, à un élève près, avec des effectifs proches.

Un première catégorie d'élèves ayant manifesté un biais d'équiprobabilité (BE), qui sont qualifiés d'*égaliseurs*, avec les élèves ayant montré une intention de dénombrer tous les échantillons possibles, qui sont qualifiés de *collectionneurs*. Une moitié de ce groupe correspond à des élèves qui sont à la fois *égaliseurs* et *collectionneurs*.

Aucun d'entre eux n'a pu mettre en œuvre, au cours d'un épisode de son processus de résolution, un travail complet lors de la phase de la tâche 1 qui précède la mise en commun.

Mais à un élève près, ils ont tous pu réaliser une genèse DIS soutenue par une genèse SEM au sein de l'ETMS, essentiellement basée sur une visualisation des bornes de l'intervalle de fluctuation. De plus à l'issue de la mise en commun liée à l'approche fréquentiste, une moitié de l'effectif a pu réviser son approche combinatoire initiale,

qui était erronée, pour finaliser la tâche 1 avec une forme de travail AC3 complète et correcte au sein de l'ETMP.

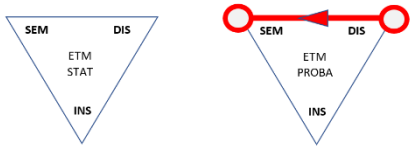
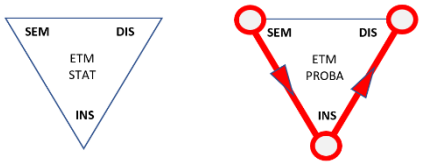
Circulation du travail pour les formes combinatoires réalisant SEM-INS-DIS dans l'ETMP	
• Genèse DIS (ETMP): Interpréter les données de cet énoncé d'un point de vue probabiliste. • Circulation dans le plan DIS-SEM en adaptant l'approche à un registre de représentation. • Genèse SEM (ETMS): Traitement par le registre sémiotique.	
• Activation du plan SEM-INS: Automatisation d'une technique, à partir d'artefacts symboliques ou graphiques, extraits du registre de représentation sémiotique. • Genèse INS (ETMS): Construction d'un résultat exploitable dans le cadre d'une approche combinatoire. • Activation du plan INS-DIS: Exploitation du résultat obtenu pour mettre en œuvre un raisonnement. • Genèse DIS : Interprétation constituant une preuve probabiliste.	

Fig. 4 : Circulation du travail pour une forme combinatoire réalisant SEM-INS-DIS dans l'ETMP.

Une deuxième catégorie est formée des autres, à un élève près, qui ne sont donc ni *collectionneurs*, ni *égaliseurs*. Tous ces élèves ont montré une démarche allant au bout de l'investigation, dans l'approche fréquentiste ou dans l'approche combinatoire, en produisant un travail complet respectivement dans l'ETMS ou dans l'ETMP. Cette catégorie se partage en trois styles : les *précurseurs* qui ont réalisé un forme combinatoire produisant un travail complet et correct dans l'ETMP en amont de la mise en commun, les *dubitatifs* qui n'ont pas du tout pratiqué l'approche combinatoire, et les *zélés* qui n'ont amorcé une approche combinatoire qu'après la mise en commun des résultats liés à l'approche fréquentiste.

Les élèves *précurseurs* confirment lors de la deuxième phase, comme d'ailleurs la plupart des élèves *planificateurs*, que leur aisance initiale à réaliser leur genèse SEM, avec le registre sémiotique et les artefacts qui s'en déduisent, et la genèse INS, et la genèse DIS qui en découle, dans le cadre d'une application de la Formule de Laplace, suivant la forme AC3, peut justement devenir un obstacle (Brousseau, 1976) lorsque la situation se complexifie.

LA FORMULE DE LAPLACE : UN OBSTACLE EPISTEMOLOGIQUE A L'APPROCHE COMBINATOIRE DE LA FREQUENCE DES SUCCES

La deuxième phase de l'expérimentation, correspondant à la tâche 2, mène à analyser la répétition de 5 parties successives, c'est-à-dire à prendre en compte 5 lancers des deux dés.

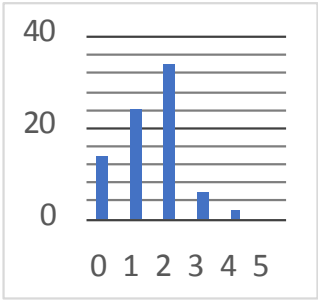
<table>
<tr><th colspan="2">Énoncé de la Tâche 2 (2 heures) : JEU DES 5 LANCERS DES DEUX DÉS</th></tr>
<tr><td>Enoncé</td><td>Consignes</td></tr>
<tr><td>Contexte global</td><td>1) Pour rappel, un jeu consiste à lancer deux dés cubiques équilibrés numérotés chacun de 1 à 6. On gagne si la somme des deux valeurs affichées sur la face supérieure vaut au-moins 9.
2) On considère une nouvelle expérience aléatoire qui consiste à jouer 5 fois de suite à ce jeu. Et on va s'intéresser au nombre de parties qui seront gagnées au cours de ces 5 lancers des deux dés.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Sous-tâche 2.1</td><td>a) Proposez un protocole expérimental permettant de tester cette expérience aléatoire. Décrivez en détail chaque étape de ce protocole, avec son objectif, et le type de résultat attendu.</td></tr>
<tr><td>b) A votre avis, qu'est-ce que cela permettra d'observer au niveau de l'expérience aléatoire? Quelles sont les incertitudes ou difficultés que vous rencontrez ?</td></tr>
<tr><td colspan="2">Phase de mise en commun</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Sous-tâche 2.2</td><td>c) On a testé 80 fois cette expérience aléatoire consistant à jouer 5 fois de suite, et à observer le nombre de succès. Après avoir relevé le nombre de succès obtenus lors de chacun de ces 80 tests, on a représenté les résultats dans le diagramme en bâtons présenté ci-contre.
Quel pourcentage des tests effectués correspond à un nombre de succès compris entre 1 et 3 (au sens large) ?
 
</td></tr>
<tr><td>d) On souhaite déterminer la probabilité d'obtenir exactement 2 succès en jouant 5 parties de suite. Et on cherche la valeur exacte de cette probabilité. Présenter le raisonnement en justifiant clairement le résultat obtenu.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Phase de mise en commun</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Sous-tâche 2.3</td><td>e) On souhaite déterminer la probabilité d'obtenir de 1 à 3 succès en jouant 5 parties de suite. Et on cherche la valeur exacte de cette probabilité. Présenter le raisonnement en justifiant clairement le résultat obtenu.</td></tr>
<tr><td>f) Si vous n'avez pas eu le temps de finir cette activité, vous pouvez décrire rapidement ci-dessous ce que vous auriez continué à faire.</td></tr>
<tr><td>g) Quelles sont les difficultés ou incertitudes que vous avez rencontré en traitant cette partie de l'activité ?</td></tr>
<tr><td colspan="2">Phase de mise en commun</td></tr>
</table>

Fig. 5 : Énoncé de la tâche 2 et de ses sous-tâches (Trunkenwald, 2023).

Pour la sous-tâche 2.1, les élèves doivent envisager un protocole de collecte de données empiriques. Ceux qui parviennent à envisager une série d'échantillons sont tous des *planificateurs*.

Au cours de la sous-tâche 2.2, l'observation par les élèves d'un diagramme en bâtons présentant la répartition en nombres de succès (pouvant aller de 0 à 5 pour 80 échantillons de taille 5) les entraîne d'abord vers une approche fréquentiste.

Cela permet d'appréhender un registre sémiotique de l'ETMS qui peut être transposé à la représentation d'une loi de probabilité au sein de l'ETMP. La congruence

syntaxique correspondante peut alors faciliter une approche combinatoire adaptée à la notion de fréquence, en tant que variable aléatoire.

Certains élèves ont réalisé un travail complet au sein de l'ETMS en étudiant le diagramme statistique en bâtons. Ils avaient réalisé un épisode de travail complet dans l'ETMS lors de la tâche 1, ou proposé un protocole statistique produisant des échantillons au début de la tâche 2. Ces derniers avaient d'ailleurs produit une genèse DIS appuyée par une genèse SEM dans l'ETMS pour décrire leur procédure d'échantillonnage. Une fibration DIS vers l'ETMP les avait alors amenés à réaliser la genèse INS correspondant à la démarche probabiliste de nature empirique.

La difficulté liée au changement de registre sémiotique au sein de l'ETMS semble nécessiter une certaine maîtrise de la conversion. La genèse SEM associée au registre sémiotique précédent ainsi que son interprétation par une genèse DIS dans l'ETMS, doivent avoir été dépassées au cours du travail mathématique. Cela correspond alors à une genèse INS de l'ETMS, au-delà des opérations de traitement direct, avec le recul apporté par la démarche empirique, qui se traduit par la fibration DIS vers l'ETMP et sa genèse INS associée.

Cet autre registre sémiotique qui est le diagramme en bâtons peut alors être appréhendé sans glissement direct par une fibration SEM erronée au sein de l'ETMS.

Par ailleurs considérons les élèves, dits *explorateurs*, ayant au-moins réalisé pour la sous-tâche 2.2 la genèse DIS consolidée par une autre genèse, en lien avec un plan vertical de l'ETMP, dans le cadre de leur tentative d'étudier la loi de probabilité rattachée au nombre de succès obtenus. Ces *explorateurs* ont tendance à réussir à produire un niveau de validation analogue au sein de l'ETMS lors de leur approche fréquentiste liée à une présentation du protocole d'échantillonnage.

De plus la plupart de ces *explorateurs* sont aussi des élèves dits *égaliseurs*, c'est-à-dire particulièrement susceptibles de produire un biais d'équiprobabilité. La Formule de Laplace apparait alors être un obstacle épistémologique, dans ce contexte d'une première rencontre avec la loi binomiale.

Les élèves maîtrisant un usage approfondi de l'approche laplacienne basé sur la visualisation d'issues équiprobables, ont tendance à vouloir reproduire cette stratégie de résolution pour étudier la loi binomiale.

Mais celle-ci nécessite un calcul de dénombrement trop avancé, qui ne peut plus être visualisé dans son intégralité à l'aide de signes. Et paradoxalement les élèves moins à l'aise sur la démarche laplacienne, semblent envisager plus aisément à enchaîner l'usage d'artefacts, tels que le principe multiplicatif, ou un arbre probabiliste, afin de contourner cette difficulté.

Les *explorateurs* ne réalisant pas un travail complet au sein de l'ETMP lors de cette première rencontre avec la loi binomiale ne sont pas des *planificateurs*. Or les élèves à la fois égaliseurs et planificateurs semblent davantage capables de réaliser ce même travail complet. Nous pensons que ces égalisateur *planificateurs* sont mieux préparés

dans le sens où ils ont montré leur capacité à se remettre en question en corrigeant leur biais d'équiprobabilité, et à relancer une nouvelle étape de modélisation, pour revenir sur leur univers probabiliste afin de le redéfinir de manière équiprobable.

Enfin les élèves dits *calculateurs*, mobilisant spontanément des opérations entre différentes valeurs de probabilités, ont une forte tendance à se lancer dans une démarche d'investigation approfondie pour l'approche combinatoire de la loi binomiale, à la manière des élèves dits *explorateurs*. Ces élèves *calculateurs* finalisent tous la tâche 2 avec un travail complet au sein de l'ETMP.

L'INFLUENCE DU STYLE DE TRAVAIL SUR UNE APPROCHE COMBINATOIRE CORRECTE DE LA FREQUENCE DES SUCCES

Suite à la première rencontre avec la loi binomiale liée à la sous-tâche 2.2, une mise en commun permet de corriger l'approche fréquentiste correspondante au diagramme en bâtons, et d'attirer l'attention sur certaines erreurs et confusions liés à l'approche combinatoire mais sans apporter une correction à cette dernière. La suite de l'expérimentation soumet la sous-tâche 2.3 aux élèves, qui est analogue à 2.2 mais avec une légère variation de consigne demandant la probabilité d'obtenir 1, 2, ou 3 succès au cours de 5 parties jouées.

Le diagramme statistique en bâtons ayant été explicité, et la confusion liée au biais d'équiprobabilité portant sur les 5-uplets de succès ou échecs (correspondants aux chemins de l'arbre de probabilité) ayant été expliquée, la tendance majoritaire des élèves est ensuite de réaliser individuellement une forme combinatoire complète en un seul épisode. Toutefois outre ce caractère de complétude, le travail mathématique n'est correct que pour quelques élèves. Et paradoxalement ceux-ci n'avaient pas produit de forme combinatoire complète pour traiter la sous-tâche 2.2.

Les élèves ayant mis en œuvre deux genèses DIS et INS, ou ayant produit un travail complet dans l'ETMP, au début de la tâche 2, finalisent celle-ci avec un travail complet, mais incorrect. Il semble donc qu'une genèse SEM prématurée au sein de l'ETMP risque, dans le contexte d'une mise en place de la loi binomiale, d'emprisonner l'élève dans une telle approche combinatoire incorrecte.

Parmi eux, les élèves dits *égaliseurs*, c'est-à-dire ayant produit un biais d'équiprobabilité lors de la tâche 1, finissent la tâche 2 avec une forme de travail complète mais en manifestant à nouveau un biais d'équiprobabilité. Ces élèves *égaliseurs* avaient pourtant en tant que *planificateurs*, corrigé ce type d'erreur à la fin de la tâche 1.

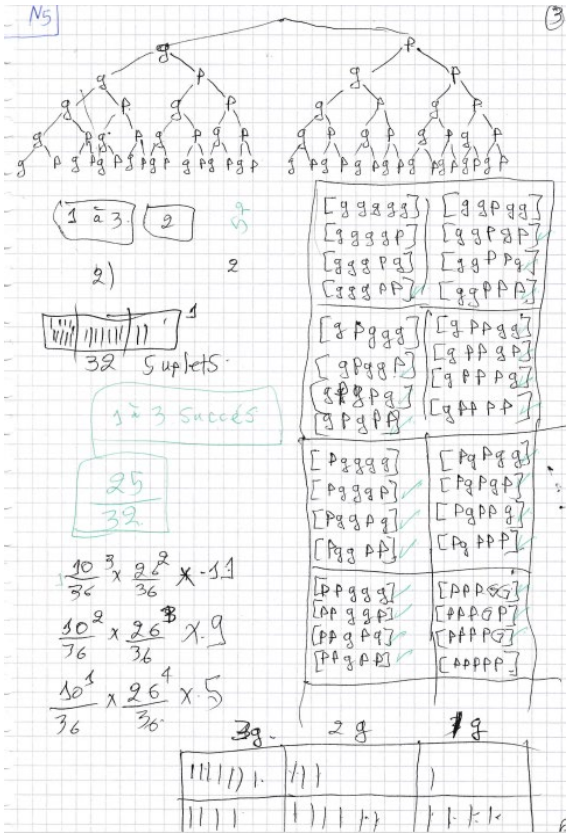


Fig. 6 : Exemple de travail mathématique correct lors de la sous-tâche 2.3 (Trunkenwald, 2023).

D'autres élèves d'abord en échec dans leur approche de la loi binomiale, ont montré une progression importante en finalisant avec un travail complet mais incorrect. Des lacunes portant sur leur perception de la fluctuation des fréquences, semblent expliquer leurs difficultés initiales lors de la confrontation avec la loi binomiale. Il s'agit essentiellement d'élèves *égaliseurs* ayant reproduit un biais d'équiprobabilité, et d'élèves *collectionneurs* ayant au cours de la tâche 1 tenté de dénombrer tous les échantillons possibles.

D'ailleurs à une exception près, tous les élèves *égaliseurs* finalisent avec un travail complet. Ceux d'entre eux étant aussi des *planificateurs* sont les élèves ayant produit un BE sur les 5-uplets (c'est-à-dire sur les branches de l'arbre probabiliste).

D'ailleurs malgré la mise en commun ayant averti les élèves sur ce point, les élèves dits *planificateurs*, finalisent tout de même avec un biais d'équiprobabilité lorsque 10 des 5-uplets apparaissent favorables sur les 32 possibles, ceci à l'exception d'un élève *précurseur* lors de la tâche 1, qui finalise la tâche 2 avec un travail correct.

Nous supposons bien ici l'existence d'un obstacle acquis par les *planificateurs* lors de leur approche combinatoire de la probabilité, qui produit son effet lors de l'approche combinatoire de la loi binomiale associée pour 5 répétitions.

Les écueils rencontrés par les élèves *collectionneurs* proviennent d'une difficulté à dénombrer les issues favorables en décrivant l'ensemble de tous les échantillons

possibles. Afin de contourner cette difficulté, le processus de preuve peut procéder en deux temps articulés autour du référentiel théorique de l'ETMP.

Le sujet cognitif commence par exploiter une genèse SEM de visualisation d'issues associées aux différents 5-uplets de succès ou échecs, à l'aide d'un codage visuel ou d'un arbre, et en lien avec le référentiel théorique qui fournit les principes de la probabilité conditionnelle, et de la probabilité d'évènements incompatibles. Puis il réalise une genèse INS construisant un calcul lié au référentiel théorique (RT) qui fournit la Formule de Laplace et le principe multiplicatif. Cette activation des demi-plans RT-SEM et RT-INS permet ensuite une interprétation correcte par une genèse DIS en produisant aussi un travail complet au sein de l'ETMP.

Le caractère discret de la variable aléatoire sous-jacente à la fluctuation de fréquence, et sa loi de probabilité associée liée à la loi binomiale, entraînent les élèves vers cette démarche empirique associé à des épreuves répétées de manière identique. Les valeurs de probabilités définissant cette loi ne sont pas la probabilité de l'évènement visé. Comprendre cette nuance peut aider les élèves à interpréter ce lien subtil entre une notion de fréquence fluctuante et une notion de probabilité mesurant la propension d'un évènement à se réaliser, ceci en lien avec notre 1ère question de recherche.

Les élèves n'ayant pas finalisé la sous-tâche 2.3 avec un épisode de travail complet au sein de l'ETMP montrent des difficultés pour aborder de manière combinatoire la loi binomiale, et aussi pour interpréter de manière correcte le diagramme statistique en bâtons. Sans travail complet, ils ont tous en commun la réalisation d'une forme combinatoire basée sur une genèse SEM provoquant une activation du demi-plan RT-SEM.

Des résultats sont construits à partir des seuls artefacts de calculs liés aux règles de base pour les quatre opérations, dans le cadre d'une genèse INS, semblent coupées du référentiel théorique de l'ETMP.

Cela rappelle aussi certaines observations menées lors de notre phase pré-expérimentale au niveau des classes de primaire (Trunkenwald et al, 2022). Les processus antérieurs de ces élèves, mis en œuvre lors de la tâche 1, comportent une lacune importante, soit du côté de l'approche fréquentiste, soit du côté de l'approche combinatoire.

CONCLUSION

Au cours de la 1ère phase expérimentale, le style de travail *Planificateur* correspond à un calcul de probabilité par la Formule de Laplace avec la description d'un univers avec dénombrement d'issues équiprobables. Il peut toutefois intervenir comme une démarche experte sans que cela ait donné lieu à une démarche exploratoire. Son utilité dans une situation où des issues équiprobables peuvent être dénombrées sans trop de difficultés, peut alors justement devenir un obstacle épistémologique dans une situation où l'univers probabiliste se complexifie, c'est-à-dire lorsqu'il devient plus aisé

d'exploiter un arbre de probabilités, voire de mener à bien un calcul probabiliste plus avancé.

La forme de travail associée AC3 peut avoir été réalisée lors de la 1ère phase expérimentale, suite à une première erreur telle que par exemple un biais d'équiprobabilité (BE). Dans ce cas précis le sujet cognitif peut alors assimiler le fait que les différentes sommes des deux dés en tant qu'issues du premier univers prises individuellement, correspondent chacune à plusieurs issues du deuxième univers, qui est lui équiprobable. Ce principe de partition peut alors apporter une capacité à structurer l'étude probabiliste en plusieurs étapes, ce qui pourra être utile lorsqu'il s'agira d'aborder des calcul plus complexes, tels que l'étude de la loi de probabilité attendue dans la deuxième phase exploratoire.

Au cours de la 2ème phase expérimentale, la Formule de Laplace semble d'abord représenter un obstacle épistémologique pour aborder la loi binomiale, en raison d'une complexification de l'univers probabiliste. Une genèse SEM prématurée au sein de l'ETMP risque, dans le contexte d'une mise en place de la loi binomiale, d'emprisonner l'élève dans une telle approche combinatoire incorrecte. Pour les élèves moins à l'aise sur la démarche laplacienne, le principe multiplicatif, ou un arbre probabiliste, apparaissent au contraire comme des stratégies de contournement intéressantes. Les seuls élèves dits *explorateurs* qui réalisent une performance combinatoire complète lors de la sous-tâche 2.2, ne sont d'ailleurs pas des *planificateurs*.

Cependant, parmi les élèves *planificateurs* ceux qui ont aussi commis un biais d'équiprobabilité lors de la première phase expérimentale (et qui comptent donc parmi les élèves dits *égaliseurs*) semblent en meilleure capacité de réaliser cette performance combinatoire complète lors de cette deuxième phase, et cela se traduira lors de la sous-tâche 2.3. Les élèves ayant préalablement échoué en réalisant un biais d'équiprobabilité, peuvent avoir pris conscience d'un principe de partition apportant une capacité à structurer l'étude probabiliste en plusieurs étapes, ce qui pourra être utile lorsqu'il s'agira d'aborder des calculs probabilistes plus complexes.

Par ailleurs, il serait intéressant d'expérimenter différemment la tâche 2 visant la découverte de la loi binomiale, en faisant se confronter les élèves à deux diagrammes en bâtons, l'un empirique, et l'autre théorique, qui seraient mis en perspective.

Une telle approche pourrait présenter l'intérêt de contrer un certain biais d'équiprobabilité.

Enfin, il serait intéressant d'adapter cette méthodologie expérimentale avec un énoncé moins découpé, et un travail encore plus exploratoire, qui permettrait justement d'observer une dynamique de choix des différentes phases par les élèves.

REFERENCES

Brousseau. G., (1976). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. Willy Vanhamme et Jacqueline Vanhamme. La problématique et l'enseignement de la mathématique. Comptes rendus de la XXVIIIe rencontre

organisée par la Commission Internationale pour l'Étude et l'Amélioration de l'Enseignement des Mathématiques, Louvain-la-neuve, pp.101-117, hal-00516569v2.

Kuzniak, A., Montoya-Delgadillo, E., Richard, P.R. (eds) (2022). *Mathematical Work in Educational Context - The Mathematical Working Space Theory Perspective*. Mathematics Education in the Digital Era, vol 18. Springer, Cham. ISBN 978-3-030-90849-2.

Masselin, B., *Étude du travail de l'enseignant autour de la simulation en classe de troisième et seconde : Métamorphoses d'un problème au fil d'une formation en probabilité*. Education. Université Sorbonne Paris Cité, 2019. Français.

Montoya-Delgadillo, E., & Vivier, L. (2014). Les changements de domaine de travail dans le cadre des Espaces de Travail Mathématiques. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, *19*, 73-101.

Nechache, A. (2015). La comparaison de la démarche de validation dans les espaces de travail idoines en géométrie et en probabilités. In I. Gomez-Chacon, J.Escribano, A. Kuzniak, PR. Richard (Eds), *Actes Quatrième symposium des Espaces de travail Mathématiques*, Madrid.

Trunkenwald, J., (2023). *Sur les formes de travail mathématique mobilisées par des élèves de lycée autour de la notion de probabilité : approche combinatoire et approche fréquentiste.* Thèse de doctorat. Université Paris Cité.

Trunkenwald, J., Moungabio Malonga, F., Laval, D. (2022). The Frequentist Approach of Probability, from Random Experiment to Sampling Fluctuation. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, v22 n3 p679-699 Sep 2022.

Trunkenwald, J., Zorai, M., Benmansour, M., (2021). L'intervalle de fluctuation d'échantillonnage : Une formation didactique à la notion de preuve. *In Proceedings for the XXVIIème colloque CORFEM pour les professeurs et formateurs de mathématiques 10-11 juin 2021, Strasbourg, France.*

THE INVERSE FUNCTION UNDER THE PRISM OF THE MATHEMATICAL WORKING SPACE MODEL

Kostas Nikolantonakis[*], Elisavet Gemenetzi[**]

[*]University of Western Macedonia[40], Greece

[**]Mathematics Teacher, Secondary Education, Greece

This paper presents part of the Master thesis "The Inverse Function through the Prism of the Mathematical Working Space" (Gemenetzi, 2022) which aimed to explore difficulties in understanding functions through the study of inverse functions. A teaching intervention with three worksheets was conducted. A pre-test assessed students' Mathematical Working Space (MWS) before the intervention, and a post-test assessed it afterward. Results showed a clear improvement in students' ability to recognize and define invertible functions, and to study their properties using various representations. Findings suggest that using the MWS framework helps identify gaps between the reference working space, the appropriate working space, and the personal working spaces of teachers and students, providing useful insights for teaching practices.

INTRODUCTION

The concept of the inverse function is crucial in mathematical curricula worldwide and finds applications across disciplines. However, students struggle due to incomplete understanding of functions and their properties, such as one-to-one correspondence, monotonicity, composition of two functions, and symmetry of its graphical representation with respect to a line.

Delgadillo, and Vivier (2016) introduced a novel approach using this model in the teaching of Analysis, aiming to understand problem-solving processes (Analysis 1-GA, Analysis 2-CA, Analysis 3-RA).

This study aims to work on these gaps by examining students' understanding of the inverse function before and after a teaching intervention which has been designed by using the MWS_A model. The research questions focus on the evolution of students' personal working space in this context.

DIFFICULTIES AND MISCONCEPTIONS OF STUDENTS REGARDING THE CONCEPT OF INVERSE FUNCTIONS

A fundamental prerequisite for understanding inverse functions is the conceptual understanding of functions and their properties. The existence of an inverse function is guaranteed when the original function is "one-to-one" or strictly monotonic. This prior

[40] I would like to thank the University of Western Macedonia which covered part of the costs of my participation in this symposium.

knowledge necessary for advancing to more specific cases is often missing or addressed in a procedural way that lacks in conceptual depth (Delastri *et al.*, 2019). The general lack of knowledge prevents some students from broadening their horizons and grasping the idea of an inverse relationship, even in a visual context (Wilson *et al.*, 2011; Minh & Lagrange, 2016).

Studies have shown that arrow diagrams as a teaching aid positively affect students understanding. Students scored higher (31% higher) when taught with arrow diagrams, which mapped values from the domain of f to its range, and by following the reverse path, they found the values of the inverse function, rather than being taught the direct method of solving the equation for x (Nolasco, 2018).

A more specific case involves trigonometric functions (Akkoc, 2008; Hertel & Cullen, 2011; Moore & LaForest, 2014; Weber, 2005). For them, finding the inverse function within a restricted domain where the function is one-to-one is achieved through graphical representation. Although students understand from the graph that the function can be inverted, they do not accept this result because they cannot derive the formula for the inverse one. Despite students' consistency in using graphical techniques, the majority did not apply these methods for finding the inverse function in more complex trigonometric mappings (Paoletti *et al.*, 2015).

DESIGN OF THE INTERVENTION WITH THE USE OF MWS_A MODEL

Analysis teaching aims to provide students with essential tools for modeling and problem-solving. However, presenting analysis concepts and standardized procedures alone is insufficient. Effective understanding requires intuitive grasp through visual representations and real-world connections.

Our teaching proposal on the inverse function aims to achieve these goals and explore students' personal MWS before and after instruction with activities, based in a priori analysis by using MWS model, emphasize connections between all its elements.

The research was conducted in 2020-2021 at a public school in Western Thessaloniki with 17 from the Economics and Informatics direction at the final class of Higher Secondary School. 15 students had prior tutoring on inverse functions. The instruction spanned 7 hours. Initially, a pre-test assessed their understanding and explored their personal MWS. In the 2nd and 3rd hours, the 1st worksheet introduced the concept through problems and function representations. In the 4th hour the second worksheet focused on finding the inverse function graphically and formulaically. The 5th hour explored the inverse function's properties with the third worksheet. In the 6th hour students had to identify common points between function graphs and their inverses and solve related equations. Finally, in the 7th hour a post-test evaluated their understanding after the intervention.

In Topic B of tests and Topics C and D of the 1st Worksheet, activities included various representations. Students examined invertibility and described inverses using these representations, visualizing and confirming the inverse function definition. In these

topics, through the different representations of the function, students had to visualize the definition of the inverse function and verify its validity. Through these activities, students worked on object-tools of the epistemological level, such as value tables, graphical representations, the set of ordered pairs, and the function formula. This topic initially serves as an example of Analysis 1 and Analysis 2.

The aim of question B3 from the two tests and the 2nd Worksheet is to help students understand the symmetry of a function and its inverse with respect to the line y=x, learn to graph the inverse function from the original, and determine if a function is invertible based on its symmetry. Initially, students visualize the concept of symmetry with respect to a line, constructing symmetric points using ruler and compass, achieving an instrumental genesis. Then they validate their conclusions through analytic geometry properties. By graphing various functions, students identify which are invertible and then plot their inverse functions.

The initial topic requires students to visualize the definition of an inverse function, justify the inverse process, and find symmetric points on function graphs. They use tools to construct the inverse function graph, transitioning from discursive to semiotic genesis and arriving at an instrumental genesis.

In the next topic, students reverse the process from topic B. In Topic C, they analyze symmetric graphs of functions with respect to the line y=x, determining if they represent functions that are invertible. This transition involves handling function definitions through graphs, understanding symmetry to a line and its visualization, modeling the situation, and discovering new properties of inverse functions not covered in textbooks, so not part of the appropriate MWS. Using GeoGebra dynamic software, students experiment and verify their assumptions.

ANALYSIS OF RESULTS

In this section, we will analyze the results of topics B from the two tests as well as topics C and D from the 1st Worksheet and topics A, B, and C from the 2nd Worksheet through the lens of the MWS_A framework. These topics are paradigms of numerical or geometric analysis. The aim of these topics was to investigate the students' difficulties: in defining a one-to-one function, in the different representations of the function, and in determining the inverse function of trigonometric functions within a specific interval of their domain.

In question B1 of the pre-test (Given the table of values of the function f. Examine if the function is one-to-one and construct the corresponding table of the inverse function. Justify your answer.)

x	1	2	3	4	5
f(x)	7	3	1	9	5

In this question 7 students answered that the function is not one-to-one, 1 student answered that it is but did not justify the answer, and the rest answered that the function is one-to-one, justifying their answers either with the definition or descriptively. Those

students who answered correctly also completed the table correctly. In the equivalent question of the post-test, 16 students answered correctly.

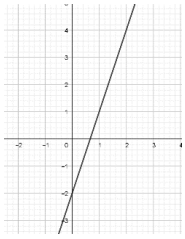
(B1. Post test. Given the table of values of the function f. Examine if the function is one-to-one and construct the corresponding table of the inverse function. Justify your answer.)

x	-1	-2	-3	-4	-5
f(x)	5	9	1	3	7

Student M14 justifies his answer using the textbook definition and then, using the fundamental equivalence of the inverse function, constructs the table of the inverse function by changing the variable *y* to the variable *x*. There is an interaction of semiotic-discursive genesis and discursive-instrumental genesis. Student M3 justifies that the function is not one-to-one because it is not monotonic. Student M2 justifies his answer using the definition but does not place the variables correctly in constructing the table. Thus, he does not reach discursive genesis. Student M3 utilizes the definition of the one-to-one function, gives an example to confirm it, instrumentalizes the fundamental equivalence, and correctly completes the table of the inverse function. His work evolves across all vertical levels of MWS. Student M9 does not justify her answer correctly but descriptively presents how she completed the table.

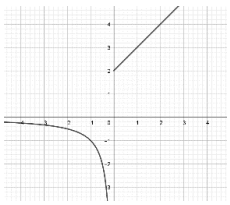
In question B2 of the pre-test (Given the set of ordered pairs of the function *g* C_g= {(1,3), (2,15), (3,8), (4, -2), (5, -1)}. Examine if the function is one-to-one and construct the corresponding set of ordered pairs of the inverse function. Justify your answer), 15 students answered that the function is one-to-one, but only 10 of them justified their answer correctly. Furthermore, 12 of them correctly wrote the set of ordered pairs of the inverse function. In the corresponding question of the post-test (Given the set of ordered pairs of the function *g*. C_g= {(3,1), (15,2), (8,3), (-2,4), (-1,5)}. Examine if the function is one-to-one and construct the corresponding set of ordered pairs of the inverse function. Justify your answer), 15 students answered correctly. Seven of them justified their answer descriptively, and 1 student used the contraposition of the definition.

Student M4 assumes that the function consists of the remaining points and connects the successive given points with straight line segments. The function he designs is not strictly monotonic, so he should have concluded that it is not one-to-one; however, he uses the definition of the inverse function and correctly justifies his answer. Instrumental genesis has not been achieved for this student.



In question B3 of the pre-test (Given the graph of the function *h*. Examine if the function is one-to-one and construct the graph of the inverse function. Justify your answer.)

In this question 13 students respond that the function is one-to-one. Five of them justify their answer with the help of parallel lines on the $x'x$ axis, two with the help of monotonicity, one student proves that the line is one-to-one, and the rest do not justify their answer. Nine students manage to plot the graph of the function by finding two points of the given line, finding two points of the inverse function, and connecting them. Two students plot the symmetrical line with respect to the $y'y$ axis. In the corresponding question of the post-test (Given the graph of the function h. Examine if the function is one-to-one and construct the graph of the inverse function. Justify your answer.) In these 12 students answer correctly, but only 8 correctly justify their answer in similar ways to the initial test. Also, in this test, 9 students correctly plot the graph of the inverse function. One student plots the symmetrical function with respect to the $x'x$ axis.



Student M16 believes that the function is not one-to-one but does not justify the answer and constructs the symmetrical graph with respect to the $x'x$ axis.

Finally, in the B4 question of the pre-test (Examine if the function is invertible and if so, compute the values of the inverse for $m(x)=\sin x$, $x\in[-\pi/2, \pi/2]$, $x=-1, 0, 1$), 6 students responded that the sinusoidal function is invertible, justifying their answer through the graphical representation of the function. Three of them used the property of monotonicity, one used the definition, and the other 2 used the property of the graph of the 1-1 function. In the corresponding question of the post-test (Examine if the function is invertible and if so, compute the values of the inverse for $m(x)=\cos x$, $x\in[0,\pi]$, $x=-1, 0, 1$), 11 students responded that the sinusoidal function is invertible, justifying their answer through the graphical representation. Nine students correctly provided the values of the inverse function through the values of the original function.

The instructional intervention included examples from Arithmetic-Geometric Analysis and Computational Analysis. Its goal was to bridge the gap between elements of the two levels in the concept of the inverse function. The instructional intervention is structured between the MWS of Algebra with equation solving, use of algebraic symbolism, and performing operations, and the MWS of Analysis with the involvement of concepts and properties of functions, inverse functions, and variables. The development of the intervention is expected to expand across all three vertical levels of MWS, including processes of exploration, reasoning, and communication.

Students were working individually on their worksheets and then presented their conclusions to the whole class. The mathematical software GeoGebra was available during the intervention and was used where deemed necessary by the researcher.

In Topic C of the 1st Worksheet (A function is described below in three different ways: a table of values, an equation, and a set of ordered pairs. Examine each case to determine if it is invertible and describe its inverse in the same way. Justify your answer.

1st Method: Table of Values

x	-1	0	1	2	5	10
$f(x)$	-4	0	6	12	7	6

x	1.1	2.2	5.4	6	7.8	12
$h(x)$	-7	-6	-7	-4	-3	-2

x	1	2	5	10	15	20
$G(x)$	19.8	19.6	19	18	17	16

2nd Method: Equation $g(x) = (x\text{-}2)(x+3)+1$, $f(x) = \ln(1\text{-}x)$, $h(x) = e^{-x}+2$

3rd Method: Set of Ordered Pairs: Cg = {(1,5), (2, 25), (3, 125), (4, 625)}, C_f= {(-2, e^{-2}), (-1, e^{-1}), (0,1), (1, e)}, C_h = {(-1, ½), (0,0), (2, ½), (8,8)}

Students were introduced to the different ways of describing a function. They observed the tables and examined whether the different values of the independent variable corresponded to different values of the dependent variable. In this way, they validated the definition of the inverse function and constructed the corresponding table of the inverse function. Students dealt with a second-degree polynomial, composite logarithmic function, and a composite exponential function, and examined whether they are one-to-one functions. Finally, they examined the sets of ordered pairs. Some students constructed the corresponding value table to check if the function is invertible.

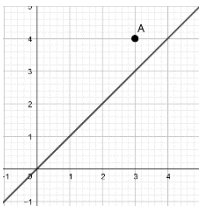
The topic D of the same worksheet is an example of numerical or geometric analysis.

[A) Plot the graph of the function $f(x)=\sin x$, $x\in[-2\pi, 2\pi]$ and determine if the function is invertible. B) Plot the graphs of the functions and prove they are invertible. Then, plot the graph of the inverse function for each function $f_1(x)=\sin x$, $x\in[-3\pi/2, -\pi/2]$, $f_2(x)=\sin x$, $x\in[-\pi/2, \pi/2]$, $f_3(x)=\sin x$, $x\in[\pi/2, 3\pi/2]$ D2. A) Plot the graph of the function $g(x)=\cos x$, $x\in[-2\pi, 2\pi]$ and determine if the function is invertible. B) Plot the graphs of the functions $g_1(x)=\cos x$, $x\in[-2\pi, -\pi]$, $g_2(x)=\cos x$, $x\in[-\pi, 0]$, $g_3(x)=\cos x$, $x\in[0, \pi]$, $g_4(x)=\cos x$, $x\in[\pi, 2\pi]$ and prove they are invertible. Then, plot the graph of the inverse function for each function. D3. A) Plot the graph of the function $h(x)=\tan x$, $x\in(-\pi/2, \pi/2)\cup(\pi/2, 3\pi/2)$ and determine if the function is invertible. B) Plot the graphs of the function $h_1=\tan x$, $x\in(-\pi/2, \pi/2)$, $h_2(x)=\tan x$, $x\in(-\pi/2, 3\pi/2)$, and prove they are invertible. Then, plot the graph of the inverse function for each function.]

The researcher presented with the help of the GeoGebra software the graphical representation of trigonometric functions and then the graphical representation of these on the corresponding interval given. Although the students perceive from the graph that the function does not invert in its domain but in a restriction of it, they do not

accept this result as they cannot define the type of the inverse. This result is consistent with the research of Paoletti *et al.* (2015). Later in the topic, the students attempted to construct the graph of the inverse function. Several students proposed to construct a table of values for the trigonometric function and then to construct the corresponding table of values for the inverse. As the students mentioned, they had not dealt with the inverse function of trigonometric functions. The graphical representation of trigonometric functions served as a means for the process of visualization and transition to the cognitive level. Students observed that line y=0.5 has at least two common points with the graph of each trigonometric function. This observation led them to a discursive genesis and to the conclusion that trigonometric functions do not invert in their domain. Then they plotted the graphs in each interval and through monotonicity confirmed that the functions invert in the corresponding interval. The researcher presented the results of the topic in GeoGebra and the properties of the functions were discussed in the class. Several students observed that the two functions have the same type of monotonicity and that their graphical representations are symmetric with respect to the line $y=x$. This topic served as an introductory activity for the next worksheet.

Questions A1 and A3 of this topic from Worksheet 2 are examples of numerical or geometric analysis, while questions A2 and A4 are examples of computational analysis.



[A1. In the following system of rectangular axes, find the symmetrical point B of point A(3,4) with respect to the bisector of angles xOy and $x'Oy'$. A2. Prove that the symmetrical point B of point A(α, β) with respect to the line $y=x$ has coordinates (β, α). A3. Draw the symmetrical line (ζ) of the line (ε) with respect to the line $y=x$. Justify your answer. A4. Find the equation of the lines (ε) and (ζ). What is the relationship between these two linear functions?]

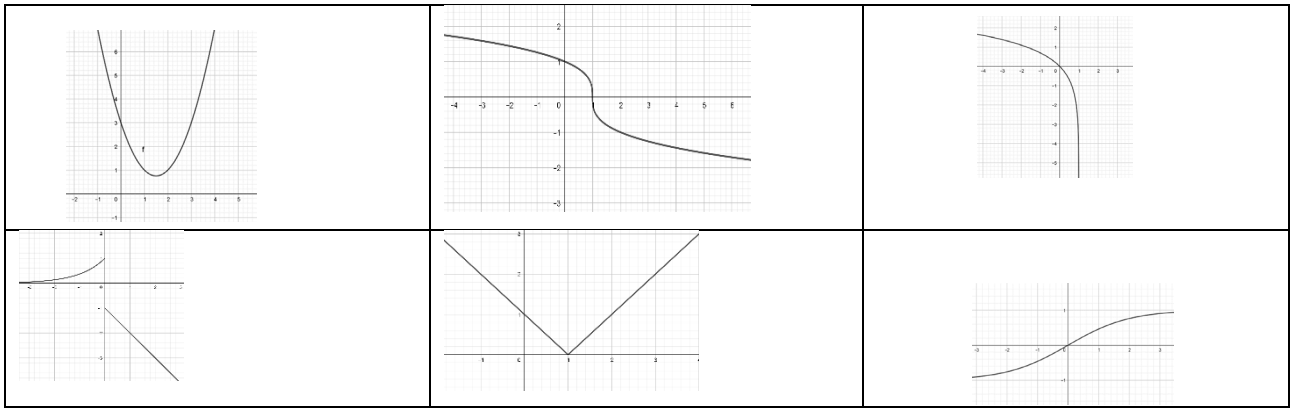
Initially, the concept of symmetry with respect to an axis and a point was discussed in the class. Several students mentioned the symmetry of the graphical representations of a function with its inverse function with respect to the x-axis. Then the students observed the shape of the A1 question and marked on the figure the symmetric point of point A with respect to the angle bisector of the angles xOy and $x'Oy'$. One of them suggested the folding process to find the point. In question A2, the students failed to present a complete solution. The researcher observed serious cognitive deficiencies in the concept of a straight line. For this reason, she presented the solution in detail and at the same time demonstrated the process step by step using the GeoGebra software. In question A3, the students noticed that a point on the line is also a point on the line $y=x$, so its symmetric point with respect to this line will be the same point. Then they found another symmetric point with respect to the line $y=x$, and by connecting the two points, they constructed the line requested. Finally, they found the equations of the two lines, and some students mentioned that if the equation of one line is solved for x, the equation of the second line will result. They concluded that one linear function is the inverse of the other.

The work of the students progressed at all three levels of the MWS as well as in their interactions. The students were guided through a significant transition from the framework of representations to the process of visualization. Their intuition led them to the symmetric point with respect to the line $y=x$. Then, using the reference frame of analytic geometry, they employed the equation of a line, the coordinates of the midpoint of a segment, the property of perpendicular lines, and the point of intersection of two lines. Through discursive genesis, they were led to prove that the symmetric point of a point with coordinates (a, b) would be the point with coordinates (b, a). The results of visualization and proof led the students through the process of constructing the symmetric line with respect to the line $y=x$ and finding the equations of the two lines. The work was completed with an instrumental genesis, where the use of the instrument of solving the equation of the first linear function with respect to the dependent variable led to the equation of the second linear function and ultimately to the conclusion that one function is the inverse of the other. The students moved bi-directionally at all three vertical levels of the MWS to conclude that the graphical representations of inverse functions are symmetric with respect to the line $y=x$.

The topics B and C of the same worksheet are examples of numerical or geometric analysis.

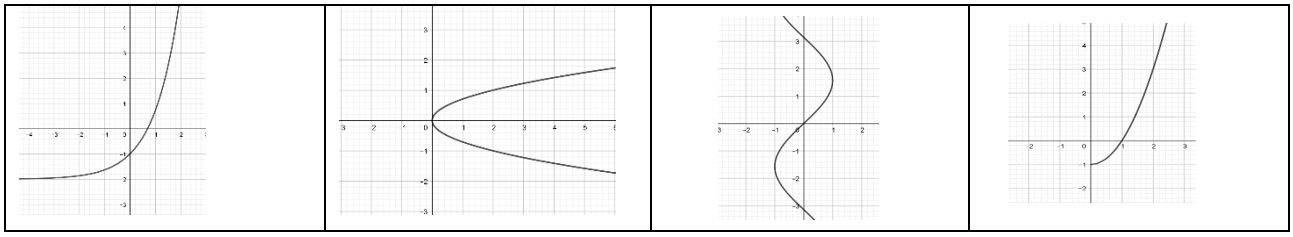
Topic B

Given the graphs of the functions f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, identify which of these functions have an inverse, and for each of them, sketch the graph of the inverse function.



Topic C

Given the symmetrical graphs of the functions f_1, f_2, f_3, f_4 with respect to the line $y=x$, determine if these graphs represent functions and then examine if the functions f_1, f_2, f_3, f_4 are one-to-one.



All students recognized which of the functions are one-to-one and justified their answer correctly. They plotted the line $y=x$ and tried to construct the graph of the inverse function. The researcher observed that even the students who struggle with mathematics were now able to construct the two tables. In Topic C, students observed the graphs and concluded that the second and third graphs are not function graphs since there is a vertical line that intersects the graph at least in two points, while the first and fourth ones represent function graphs as every vertical line intersects the graph at most in one point. Then they constructed the line $y=x$ and the symmetric graph of the given one with respect to it. The researcher encouraged the students who couldn't construct the symmetric graph to construct firstly a table of values. This process was observed to be effective, and all students managed to construct the graphs. Finally, all students recognized which of the functions are invertible. They mentioned that they hadn't dealt with something similar before.

The students were led through semiotic genesis from the framework of representations to the process of visualization. They observed the graphs and then, using the property from the function reference framework that every vertical line intersects the graph at most in one point, they reached a verbal genesis. Finally, with the instrument of symmetry with respect to the bisector of the first and third quadrants, they constructed the initial functions and observed which of them are one-to-one. The instrumental genesis thus led them to a discursive genesis and to the formulation of a proposition that would function as a property. The students concluded that “when the symmetric graph does not represent a function graph, then the initial function is not invertible."

CONCLUSIONS

In this work, various ways of representing functions were shown, and students examined whether each function was one-to-one and to define its inverse, if it existed. Students performed better in this topic compared to others, and even in the post-test, the performance of weaker students significantly improved. During the teaching intervention, students engaged with similar topics, showing particular interest. This engagement positively impacted their performance on both simpler and more complex topics, consistent with the research by Delastri *et al.* (2019).

By solving several problems where students mapped function values from the domain to the range, they checked whether different independent variable values led to different dependent variable values. Then, they followed the inverse path to find values of the inverse function, resulting in higher post-test scores. This conclusion aligns with Nolasco's findings (2018).

The last question of this topic concerned trigonometric functions. In the pre-test, 6 students gave correct but incomplete answers, while in the post-test, 11 students provided integrated solutions. Students reported that they had not been taught this topic at the tutorial center. During the intervention, the inverse function of a trigonometric function was detailed, but students struggled to accept the result due to difficulty

finding the inverse function formula (Akkoc, 2008; Hertel & Cullen, 2011; Moore & LaForest, 2014; Weber, 2005).

Before the intervention, students' personal MWS were shaped by tutorial lessons and included actions within the MWS framework to address pre-test issues. Mathematical work is complete when epistemological and cognitive elements are connected and when the three vertical geneses of MWS are organized and developed (Kuzniak *et al.*, 2016). Pre-test results showed most students couldn't successfully address the issues due to insufficient activation of various dimensions related to inverse functions.

Post-intervention, students' personal MWS showed significant changes, with improved performance and justification in post-test results. Students combined epistemological and cognitive elements and various connections effectively (Delgadillo & Vivier, 2016). The teaching intervention decisively contributed to the development of all dimensions of students' MWS, highlighted by activity selection based on the MWS model. This model facilitated exploration, reasoning, and answer justification through interactions of vertical levels.

Students were called to decode and interpret symbols to construct internal representations and relationships within the MWS epistemological level framework. They worked on object-tools of this level, activating all dimensions. One difficulty in understanding functions and their inverses is their multiple representations. Teaching intervention activities helped students visualize and verify the function and inverse function definitions. Semiotic genesis led most students to discursive genesis, transforming the definition into a tool and through the instrumental genesis enabling them to construct appropriate inverse function representations.

The use of GeoGebra during the intervention was crucial for developing the ability to discover mathematical task solutions. Semiotic – instrumental geneses interaction led to discovering inverse function properties, and through tools and techniques, students developed appropriate argumentation for proving these properties. In conclusion, the worksheet activities fulfilled their purpose, leading to improved student performance in the post-test by enabling successful operation of instrumental-discursive genesis and vice-versa and connecting semiotic with instrumental and discursive genesis.

REFERENCES

Akkoc, H. (2008). Pre-service mathematics teachers' concept image of radian. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 39(7), 857-878.

Delastri, L., Purwanto, Subanji, & Muksar, M. (2019). Students' conceptual understanding on inverse function concept. IOP Conf. Series: *Journal of Physics*: Conf. Series 1157. IOP Publishing. https://doi.org/10.1088/1742-6596/1157/4/042075

Delgadillo, E. M., & Vivier, L. (2016). Mathematical working space and paradigms as an analysis tool for the teaching and learning of analysis. *ZDM*, https://doi.org/10.1088/1742-6596/1157/4/04207510.1007/s11858-016 0777-9

Hertel, J. T., & Cullen, C. (2011). Teaching trigonometry: A directed length approach. In L. R. Wiest & T. Lamberg (Eds.), *Proceedings of the 33rd Annual Meeting of the North American* Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (pp. 1400-1407). Reno, NV: University of Nevada, Reno.

Kuzniak, A., Tanguay, D., & Elia, I. (2016). Mathematical Working Spaces in schooling: an introduction. *ZDM*, 48(6), 721-737.

Minh, T. K., & Lagrange, J. B. (2016). Connected functional working spaces: a framework for the teaching and learning of functions at upper secondary level. *ZDM*, 48, 793 807.

Moore, K. C., & LaForest, K. L. (2014). The circle approach to trigonometry. *Mathematics Teacher*, 107(8), 616-623.

Nolasco, J. (2018). *The struggle with inverse functions doing and undoing process*. California State University, California.

Paoletti, T., Stevens, I. E., Hobson, N. L. F., Moore, K. C., & LaForest, K. R. (2015). Pre-service teachers' inverse function meanings. In T. Fukawa-Connelly, N. Infante, K. Keene, & M. Zandieh (Eds.), *Proceedings of the Eighteenth Annual Conference on Research in Undergraduate Mathematics Education* (pp. 853-867). Pittsburgh, PA: West Virginia University.

Weber, K. (2005). Students' understanding of trigonometric functions. *Mathematics Education Research Journal*, 17(3), 21.

Wilson, F., Adamson, S., Cox., T. & O'Bryan, A. (2011). Inverse functions. What our teachers didn't tell us. *Mathematics Teachers*, 104(7), 501-507.

LA DERIVADA Y SUS CONEXIONES EN CONTEXTOS ECONÓMICOS, DESDE EL ESPACIO DE TRABAJO MATEMÁTICO

Flor Isabel Carrillo Lara

Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile; flor.carrillo.l@mail.pucv.cl

Esta comunicación es parte de una investigación que tiene como objetivo caracterizar el trabajo matemático personal de estudiantes de Economía con tareas en contexto económico. La investigación de carácter cualitativo fue implementada a estudiantes de primer año de la carrera de Economía. Se propone una secuencia didáctica conformada por tareas, donde se analizan las producciones matemáticas e interpretaciones económicas en relación a la derivada. Donde se consideran los significados de la derivada relacionados a los temas de análisis marginal, elasticidad y optimización. Los resultados nos indican las relaciones establecidas por los estudiantes, respecto a los significados de tasa de variación media de dos magnitudes, tasa de variación instantánea, variación porcentual de dos magnitudes y proceso de optimización.

Palabras clave: Derivada, Trabajo Matemático, interpretación económica, tareas en contexto económico, GeoGebra.

INTRODUCCIÓN AL PROBLEMA DE ESTUDIO

Conviene remarcar que en las investigaciones de Villa-Ochoa y Ruiz (2010), Amador (2020) y Neira (2019) utilizaron softwares matemáticos como el GeoGebra o Derive, los cuales buscan nuevas alternativas para la enseñanza de la derivada. Estos fueron importantes porque permitieron a los estudiantes manipular la funcionalidad del zoom, así como reconocer la recta tangente al "linealizar" la gráfica de una función en los alrededores cercanos a un punto sobre ella. También se evidencia un impacto significativo sobre la utilidad del software en las matemáticas por parte de los estudiantes, y la aproximación entre los conceptos de tasa de variación y derivada.

Feudel y Biehler (2021) señalan que el uso de la derivada en Economía es muy heterogéneo, a veces inconsistente y contradice el conocimiento previo de los estudiantes. Esto se aplica en particular a la interpretación económica común de la derivada, como el caso del análisis marginal que investiga el efecto de pequeños cambios respecto al estado actual de una producción. Asimismo, para comprender la forma en que se utiliza la derivada en contextos económicos, los estudiantes deben ser capaces de identificar los diversos significados de la noción de la derivada.

Otra investigación que se considera para este estudio es de Ariza y Llinares (2009), quienes manifiestan que la dificultad de los estudiantes en manejar los significados de la derivada, en el registro gráfico, se da cuando toman decisiones relativas a conceptos de Economía. Estos resultados pueden ser manifestados por el poco énfasis sobre la explicitación de los significados de medida de variación en la enseñanza de los

conceptos económicos, debido a que algunas veces los estudiantes no poseen una comprensión de los conceptos matemáticos. Esto implica que, algunas veces, las interpretaciones de las situaciones económicas resultan difíciles de realizar como consecuencia de los conceptos matemáticos involucrados. Entre sus resultados, los autores afirman que existe un predominante manejo del registro algebraico por parte de los estudiantes y, que el buen manejo de los registros algebraicos y gráficos garantiza un mayor grado de comprensión de la derivada para interpretar los conceptos económicos.

En concordancia con lo anteriormente mencionado, se evidencian dificultades en estudiantes de Economía cuando resuelven problemas de la derivada, en contextos económicos. Algunas de las razones son: *i)* falta de conexión entre la derivada como concepto matemático y su interpretación económica a través de la aproximación lineal local (Feudel y Biehler, 2021), *ii)* comprensión débil de la noción de cambio marginal en diferentes situaciones de economía (Mkhatshwa, 2018) y *iii)* no poseen una comprensión de los conceptos matemáticos que involucran a la noción de la derivada (Ariza y Llinares, 2009). Es por ello, que el objetivo de la investigación es Estudiar los significados de la derivada en las conexiones entre Matemática y Economía en la formación de estudiantes de la carrera de Economía.

ELEMENTOS DEL MARCO TEÓRICO

Consideramos la teoría Espacio de Trabajo Matemático (ETM) debido a que estamos interesados en promover las conexiones entre Matemática y Economía, desde una secuencia didáctica formada por tareas que involucran a la derivada en contextos económicos, dirigida a estudiantes de Economía.

Es apropiado mencionar que el trabajo matemático es completo cuando cumple dos condiciones: la primera es una relación real entre los planos epistemológicos y cognitivo, es decir, que los estudiantes son capaces de elegir los artefactos pertinentes para resolver un problema y, luego utilizarlas adecuadamente como instrumentos para resolver la tarea dada. La segunda, implica una articulación entre las diferentes génesis y planos verticales del modelo ETM (Kuzniak *et al.*, 2022).

Para esta investigación, respecto a la génesis semiótica se identifican signos matemáticos en relación a la derivada. Como el límite de una función, que se denota por $\lim_{x\to a} f(x)$; la pendiente de una recta que eventualmente se denota con la letra $m;$ la notación de derivada de una función: $f'(x)$, derivada en un punto $f'(a)$, entre otros.

Para nuestra investigación, se tiene en cuenta un ETM de referencia en el dominio del Análisis, centrado en el objeto matemático la derivada. Además, se toma en cuenta aspectos teóricos en la disciplina de Economía. Sin embargo, esta investigación se centra en el ETM personal de estudiantes de la carrera de Economía. La pregunta de investigación es ¿Cuáles son los significados de la derivada en las conexiones entre Matemática y Economía que se pueden establecer para la formación de estudiantes de Economía? Por ello, se propone "Estudiar los significados de la derivada en las

conexiones entre Matemática y Economía en la formación de estudiantes de Economía". Esto corresponde a dos aspectos importantes respecto a los análisis de los significados de la derivada que emergen en el trabajo matemático y en las interpretaciones económicas.

ELEMENTOS METODOLÓGICOS Y CONTEXTO DE LA INVESTIGACIÓN

La metodología es de corte cualitativa, descriptiva de fenómenos (Hernández *et al.*, 2010). Además, se emplea un estudio de caso según Stake (2007).

Respecto a la experimentación de la secuencia didáctica, se realizó un piloto en febrero del año 2024. La experimentación del piloto, tuvo tres sesiones de dos horas cada una, donde se desarrolló cuatro tareas respecto a los temas de análisis marginal y optimización. Los participantes de la secuencia didáctica fueron estudiantes del primer año de la carrera de Economía.

Los análisis y resultados a presentar corresponden a la implementación piloto. La experimentación se realizó en tres sesiones, 13, 16 y 20 de febrero, en una universidad pública, Lima-Perú. El ambiente era un laboratorio de computación de la Escuela de Matemática. Donde participaron de manera voluntaria, 18, 11 y 17 estudiantes respectivamente en cada sesión, y estaban matriculados en el curso Matemática II.

En la sesión 1 se implementó la tarea 1, en la sesión 2 la tarea 2, y en la sesión 3 se desarrollaron las tareas 3 y 4, cada sesión tuvo una duración de dos horas. En todas las sesiones se tuvo el acompañamiento de un profesor investigador de RIITMA-Perú, quién apoyó a los participantes en temas relacionados con el uso del GeoGebra.

Las indicaciones generales para cada sesión fueron: realice las tareas en duplas, sin embargo, algunos estudiantes trabajaron de manera individual; colocar su nombre y apellidos; usar GeoGebra cuando considere necesario, usar un buscador en internet cuando lo necesite; mostrar a detalle todo su procedimiento, y explique el significado de sus resultados desde la Economía.

A continuación, se presenta el análisis del Espacio de Trabajo Matemático (ETM) personal de los participantes en la experimentación de la secuencia didáctica.

Análisis del ETM personal de los estudiantes

Para esta sección se considera la tarea 1, la cual tiene por objetivos promover la conexión entre la Matemática y Economía mediante una función en el contexto económico, e interpretar adecuadamente la tasa de variación media (TVM) del costo total respecto a la cantidad producida (dada en un intervalo).

En la descripción general consideramos tipos de sus producciones matemáticas e interpretaciones económicas, las cuales las denotamos con códigos con la finalidad de organizar los datos. Veamos las tablas 1 y 2.

Producción matemática	Descripción
Producción Matemática Esperada **(PME)**	Corresponde a la resolución del participante según a lo esperado.
Producción Matemática Parcial **(PMP)**	Resuelve de manera parcial según lo esperado.
Producción Matemática con Error **(PMCE)**	Realiza una producción matemática, pero con error de cálculos, uso de fórmulas, entre otros.
Producción Matemática Alternativa **(PMA)**	Resuelve la subtarea de manera correcta, pero usa una estrategia diferente a la solución esperada.
No Responde Matemáticamente **(NRM)**	No presenta resolución matemática.

Tabla 1: Códigos de las producciones matemáticas.

Asimismo, establecemos tipos de las interpretaciones económicas realizadas por los participantes para describir sus resoluciones, en los cuáles usamos los siguientes códigos.

Interpretación económica	Descripción
Interpretación Económica Esperada **(IEE)**	Corresponde a la interpretación del participante según a lo esperado.
Interpretación Económica Parcial **(IEP)**	Interpreta de manera parcial según lo esperado.
Interpretación Económica con Dificultad **(IED)**	El participante intenta dar una interpretación económica pero no es clara ni completa en relación a lo esperado.
Interpretación Económica Alternativa **(IEA)**	Esta interpretación económica debe estar en relación a la producción matemática alternativa realizada.
No Interpreta Económicamente **(NIE)**	No presenta una interpretación según el contexto económico.

Tabla 2: Códigos de las interpretaciones económicas.

Como resultado de la experimentación se obtuvieron producciones realizadas de manera individual y en duplas. Debido lo enriquecedor del trabajo realizado en duplas consideramos para esta investigación las producciones en pares, pero solo cuatro duplas asistieron a las tres sesiones entonces consideramos las cuatro duplas para el análisis de nuestra investigación. Con la intención de proteger la identidad de los participantes los llamamos: D1, D3, D4 y D6. A continuación, el enunciado de la tarea 1.

Tarea 1

a. A partir de la información dada en la tabla, responda: ¿Se podría establecer un modelo algebraico para relacionar el costo total con la cantidad producida de bebida de manzana? Caso sí, proponga un modelo para el costo total. Caso no, justifique.

b. **A partir de la gráfica** del costo total, del ítem a, responda:

i) ¿En la gráfica se identifican puntos de corte con los ejes coordenados? Caso sí, determine sus coordenadas y luego interprete según el contexto económico. Caso no, justifique su respuesta.

ii) Interprete y explique la tendencia de la función costo total cuando las cantidades producidas se encuentran en los intervalos [0,1] y [1, 1.3].

iii) ¿Qué ocurre con la función costo total a medida que se incrementa la cantidad producida de bebida de manzana? Explique.

c. Considerando y restringiendo algunos factores de producción que intervienen en el costo total, reescriba el modelo algebraico.

d. **Determine**

i) ¿Cuánto varía el costo total cuando la cantidad se incrementa de 1100 a 1400 litros? Interprete su resultado.

ii) ¿Cuánto varía en promedio el costo total cuando la cantidad se incrementa de 1100 a 1400 litros? Interprete su resultado.

La tarea 1 se diseña con la finalidad de establecer conexión entre una función real de variable real con el modelo del costo total de producir un bien, de manera particular bebida de manzana. Además, de promover una adecuada interpretación de la variación promedio de un fenómeno económico, como el costo total respecto a la cantidad producida de bebida de manzana. Se tiene en cuenta que en Matemática se define la razón de cambio promedio y en otras disciplinas, como en Economía, tasa de variación media (o tasa de variación promedio). En ese sentido, Mkhatshwa (2018) señala que estudiantes del curso cálculo empresarial interpretan el cambio marginal como una cantidad (la diferencia) y no como una tasa (el cociente de la diferencia).

Para este reporte presentamos el análisis de la subtarea 1d-ii.

Análisis de la subtarea 1d-ii

En la subtarea t1d-*ii*, a partir de la solución de la subtarea 1d-*i*, se espera que los estudiantes calculen la diferencia de las producciones dadas, y determinen la razón de cambio promedio e interpreten la tasa de variación media.

En el proceso de resolución de la subtarea, se identifica un bloqueo por parte de los estudiantes; en primer lugar, se realizó una intervención con un ejemplo de razones y proporciones respecto a las cantidades de estudiantes en la sala, pero no se logró lo esperado. En segundo lugar, se realiza una intervención, con la siguiente pregunta ¿hay alguna diferencia entre los ítems *i* y *ii*? Los estudiantes responden que sí, mencionando que en el ítem ii) se pide el promedio. En relación a su respuesta, se hace otra intervención, explicando el ejemplo del promedio de notas, el cual se necesita un cociente. Esto con la intención que los estudiantes relacionen el acumulado de notas y la división de la cantidad de notas; con el acumulado del costo total dividido con la variación de las cantidades producidas, según los datos de la subtarea. Esto logró un resultado adecuado según la solución esperada.

A continuación, la solución esperada y una producción de la subtarea 1d-*ii*

Solución esperada

Se considera la variación entre dos magnitudes que están relacionadas. Esto a partir de identificar la variable independiente y dependiente, en este caso el costo total depende de la cantidad producida.

$[1.4, 1.1]$: intervalo de cantidad, que corresponde al cambio de la cantidad producida de 1100 a 1400 litros de bebida de manzana.

$$TV_{media} = \frac{\Delta C}{\Delta q} = \frac{C(1.4) - C(1.1)}{1.4 - 1.1} = \frac{1.9592 - 1.45}{0.3} = \frac{0.3791\ (miles\ de\ dólares)}{0.3(miles\ de\ litros\ de\ jugo)} = 1.2639$$

Interpretación económica: tasa de variación media (o razón de cambio promedio), el costo total aumenta a razón de 1.2639 dólares por cada litro (cuando la cantidad producida se incrementa de 1100 a 1400 litros de bebida de manzana).

En la figura 1, la dupla D6 realiza una producción matemática e interpretación económica según lo esperado, corresponde a los códigos PME e IEE.

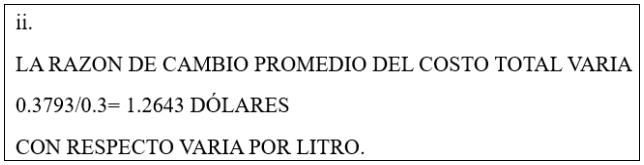

ii.
LA RAZON DE CAMBIO PROMEDIO DEL COSTO TOTAL VARIA
0.3793/0.3= 1.2643 DÓLARES
CON RESPECTO VARIA POR LITRO.

Figura 1: Producción la subtarea 1d-ii – D6.

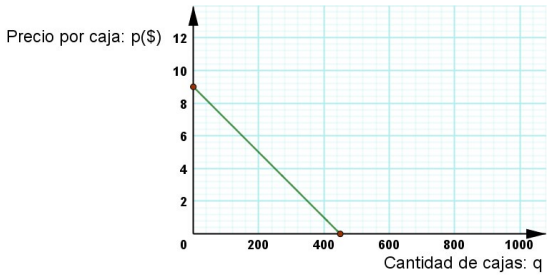
Al realizar las variaciones del intervalo y al considerar la variación del costo trabajado en el ítem anterior, la dupla activa el polo referencial de la matemática. Además, definen de manera correcta la razón de cambio promedio, la variación entre costos totales y la variación de cantidades producidas. También, se identifica un proceso de construcción debido a las acciones para determinar la variación promedio, este considerado un artefacto simbólico, técnica que permite calcular la razón de cambio. Así, la dupla activa la génesis instrumental. Al dar la interpretación económica se activa el referencial teórico en Economía, cuando mencionan que la razón de cambio promedio del costo total varía en 1.2643 dólares con respecto a la variación por litro.

Respecto a las cuatro tareas, los estudiantes logran realizar la producción matemática esperada de acuerdo a la definición de tasa de variación media, la derivada y funciones que representan los modelos económicos, como son demanda, ingreso y beneficio. Así como realizar un proceso de optimización del modelo beneficio mediante un análisis marginal, que involucra el ingreso marginal y el costo marginal. Además, los estudiantes establecen conexiones e interpretaciones de nociones que son importantes en ambas disciplinas; como razón de cambio promedio, función polinomial (de grados 1, 2 y 3), dominio de una función, límite y; en Economía los temas de variación promedio, costo total, producción y marginalidad.

Después del análisis de las cuatro tareas de la implementación piloto se realizaron mejoras a la secuencia didáctica y así realizar la implementación final de esta investigación. Las tareas fueron validadas por expertos de las disciplinas de Matemática, Economía y Didáctas de la Matemática. Los objetivos de las tareas 1 y 2 se mantuvieron, la tarea 3 y 4 se fusionaron, y el objetivo de la tarea 3 fue modificado. En la tarea 3 se consideró el tema de demanda, elasticidad, análisis marginal y optimización. La implementación final se realizó de manera reciente, 27 y 28 de junio del 2024.

La manera de relacionar la elasticidad desde la Matemática, fue por medio de una representación gráfica, para ello se consideró la función lineal afín desde un applet en GeoGebra. A continuación, presentamos la tarea 3 modificada y la que fue implementada el 28 de junio del 2024.

El Gerente de ventas de la empresa "Sabor Sureño" realiza un informe de ventas de bebida de naranja en caja de un litro, y lo presenta en el siguiente gráfico:



a. A partir del gráfico y de arrastrar el deslizador en el link https://www.geogebra.org/m/frwat8my ¿qué información matemática se puede obtener? y ¿qué relaciones identifica según el contexto de la tarea?

b. En el siguiente enlace https://www.geogebra.org/m/nvuzfd3d se tiene la gráfica del ingreso marginal, esboce la gráfica que representa el ingreso de las ventas de cajas de bebida de naranja.

Explique la relación de estas gráficas en el contexto de la tarea.

c. El departamento de contabilidad reporta que el **costo total** de producir bebida de naranja en cajas de un litro, está representado por $C(q) = 0.001q^2 + 1.3q + 50$.

Grafique el **costo marginal e ingreso marginal** y **explique sus relaciones** según la cantidad de cajas vendidas.

De acuerdo a la solución que se espera, el análisis en términos del ETM e interpretaciones económicas de la subtarea 3a se presenta a continuación:

Después de mover el deslizador, es posible reconocer que cuando varía la cantidad q, el precio también cambia. De tal manera que si la cantidad aumenta el precio (p) disminuye. Se determina una relación lineal afín, de acuerdo al contexto económico de la demanda (D) en función de q, esto se define $D: p(q) = -0.02q + 9,\ 0 \leq q \leq 450$. Respecto a la interpretación económica esperada. Debido a la ley de la demanda, cuando el precio aumente (variación positiva) la cantidad disminuirá (variación negativa). Se identifica que la pendiente de la gráfica que modela a la

demanda es decreciente, con signo negativo, con ello se relaciona que la elasticidad es negativa. Se tiene la definición de elasticidad:

$$E = \frac{cambio\ porcentual\ en\ la\ cantidad\ demandada}{cambio\ porcentual\ en\ el\ precio} = \frac{\%\Delta q}{\%\Delta p}.$$

Su interpretación económica esperada, corresponde a que la elasticidad mide la variación de la cantidad demandada ante una variación del precio de cada bien, en este caso, cada caja de bebida de naranja.

De acuerdo al ETM, por un lado, se espera el uso del applet dado en GeoGebra como una herramienta tecnológica, ya que su manipulación les permitirá visualizar la gráfica de una función línea afín, que relaciona la variable independiente (cantidad de bebida de naranja: q) y la variable dependiente (precio de venta: p). En ese sentido se espera la activación de la génesis semiótica. Asimismo, que los estudiantes definan la función lineal afín (que representa el modelo de la demanda).

Por otro lado, se espera que los participantes activen su referencial teórico, para la construcción algebraica de la función lineal afín con un dominio acotado. Además, la activación de la génesis instrumental, donde usa como artefacto simbólico la expresión algebraica $f(x) = mx + b$, a partir de ello, que los estudiantes realicen tratamientos algebraicos para obtener la solución esperada $D: p(q) = -0.02q + 9$. También, se espera la activación de su referencial teórico para definir el dominio de la función. Se podría identificar la definición de una función lineal afín y el análisis de sus parámetros como el caso de su pendiente, en ese sentido se espera activación de la génesis discursiva.

Respecto a la interpretación económica, se espera de los estudiantes el reconocimiento de la ley de la demanda, es decir los significados de la derivada cuando una variación es positiva o negativa según el precio dado del bien, en este caso el precio de las cajas de un litro de bebida de naranja.

Respecto a las conexiones entre Matemática y Economía, se espera que los estudiantes establezcan relaciones entre la pendiente de la demanda con las variaciones porcentuales y así determinen la noción de elasticidad. Para ello, empleen herramientas y artefactos digitales (applet en GeoGebra), y herramientas semióticas de la matemática (representaciones gráfica y algebraica de la función lineal-afín). Esperando así la activación de las génesis semiótica e instrumental. Además, la activación de la génesis discursiva, debido a la justificación de la definición de elasticidad y su relación con la derivada de una función. Respecto a la interpretación económica, se espera la construcción de la definición de elasticidad, es decir los significados de la derivada como la razón de dos cambios porcentuales (uno de la cantidad demandada y el otro del precio).

Las conexiones entre la Matemática y Economía establecidas en el diseño de la tarea 3, se presentan en la tabla 3

Matemática	**Economía: modelos económicos (costos, ingresos, beneficios, entre otros)**
Funciones reales (cuadrática, lineal afín, entre otros)	Representan modelos económicos (demanda, oferta, costo total, ingreso, beneficio, entre otros).
Derivada de una función real	Al derivar los modelos se obtiene Ingreso marginal, costo marginal, entre otros.
Teorema de valores extremos	Se establece para modelos continuos, se necesita identificar los puntos donde estos modelos alcanzan niveles máximos o mínimos.
Criterio de la primera derivada (puntos críticos-máximos, mínimos o puntos de inflexión)	En los modelos los puntos críticos indican posibles niveles de equilibrio o cambios en las tendencias. Por ejemplo, identifica niveles óptimos de producción.
Criterios de la segunda derivada	En pronósticos económicos, es crucial saber si son máximos o mínimos, esto orienta a la toma de decisiones.
Criterio de concavidad	En un análisis de costos, una función de costos cóncava indicaría rendimientos decrecientes, mientras que una función de costos convexa podría señalar rendimientos crecientes.

Tabla 3: Relación de temas-tarea 3.

En la tabla 3, se presenta seis relaciones entre la Matemática y Economía que están presentes en el diseño de la tarea 3, sin embargo es posible que emerjan otros conceptos de ambas disciplinas. Por un lado, la primera relación, corresponde a los diferentes modelos económicos que se desarrollan en esta tarea, como son la demanda, el costo total, el ingreso y el beneficio. Por otro lado, la segunda relación, corresponde a la derivada de un modelo económico. Luego, el teorema de valores extremos, los criterios de la primera y segunda derivada, así como el criterio de concavidad se relacionan con los procesos de optimización de fenómenos económicos. Como son los casos de minimizar costos, maximizar ingresos y beneficios.

En conclusión con la secuencia didáctica se logró promover las conexiones entre Matemática y Economía, en relación a las nociones de la derivada. Se conectaron conceptos matemáticos, mediante las tareas consideradas, algunos de ellos son: i) funciones polinomiales (grado 1, 2 y 3) con modelos económicos (demanda, costo total, ingreso total, beneficio), ii) razón de cambio promedio con tasa de variación media, iii) derivada de una función en un punto con tasa de variación instantánea, iv) variación porcentual de un cociente con la elasticidad demanda según el precio de un bien y, v) valores extremos con optimización de un modelo económico, como el beneficio máximo de una empresa. De esta manera se logra el objetivo de la comunicación. En términos del ETM se privilegió la activación de la génesis

instrumental, con el uso del artefacto digital GeoGebra, en el trabajo de los participantes.

Respecto al ETM personal de los estudiantes participantes, en el aspecto cognitivo, se identificaron limitaciones en el uso del GeoGebra por parte de los estudiantes, porque no todos los participantes lograron usar el modelo de regresión del software, esto porque no sabían usar la hoja de cálculo. También se identificaron limitaciones en como evaluar una función ingresada en la barra algebraica del GeoGebra. Además, de las limitaciones al redactar las interpretaciones y justificaciones de sus resultados en el contexto económico, relacionados a la marginalidad, elasticidad y optimización.

Consideramos que este trabajo tiene un aporte a la investigación interdisciplinaria en la Didáctica de la Matemática, las instituciones donde se realizaron las implementaciones y en los estudiantes participantes. De manera particular, para el diseño y validación de la secuencia didáctica se realizó un trabajo en conjunto de expertos, de diferentes disciplinas como Matemática, Economía y Didáctica de la Matemática, con el fin de fortalecer las relaciones entre los aspectos teóricos de Matemática y Economía en la formación de los estudiantes de la carrera de Economía. Además de promover el trabajo matemático completo y fortalecer las interpretaciones de estudiantes de la carrera de Economía cuando se enfrentan a una secuencia didáctica sobre la derivada en contexto económico.

REFERENCIAS

Amador, O. (2020). Introducción de la derivada en el contexto de problemas de máximos y mínimos utilizando desarrollos de Taylor algebraicos y el acercamiento infinitesimal que provee GeoGebra. [*Tesis de Maestría, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional*]. https://repositorio.cinvestav.mx/handle/cinvestav/3886

Ariza, A. y Llinares, S. (2009). Sobre la aplicación y uso del concepto de derivada en el estudio de conceptos económicos en estudiantes de bachillerato y universidad. *Enseñanza de las Ciencias, 27*(1), 121-136. https://ensciencias.uab.cat/article/view/v27-n1-ariza-llinares

Feudel, F. y Biehler, R. (2021). Students' Understanding of the Derivative Concept in the Context of Mathematics for Economics. *Journal Fur Mathematik-Didaktik*, *42*(1), 273-305. https://doi.org/10.1007/s13138-020-00174-z

Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, P. (2010). *Metodología de la Investigación*. Editorial Mc Graw Hill.

Kuzniak, A., Montoya-Delgadillo, E. y Richard, P. (Ed.). (2022). *Mathematical Work in Educational Context - The Perspective of the Theory of Mathematical Working Spaces.*

Mkhatshwa, T. (2018). Business calculus students' interpretations of marginal change in economic contexts. *Proceedings of the 40th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics,* 564-571. https://eric.ed.gov/?q=derivative&pr=on&ft=on&pg=2&id=ED606719

Neira, V. (2019). *Aplicación de la derivada: impacto sobre las percepciones en los estudiantes de Administración y Finanzas de una universidad privada del Perú*. [Tesis de Doctorado, Universidad Nacional de Educación Enrique Guzmán y Valle].

Stake, R. (2007). *Investigación con estudio de casos*. Ediciones Morata, S. L. https://bit.ly/2SkMfPq

Villa-Ochoa, J., y Ruiz, M. (2010). Pensamiento variacional: seres-humanos-con-GeoGebra en la visualización de nociones variacionales. *Educação Matemática Pesquisa*, *12*, 514-528. http://funes.uniandes.edu.co/1545/

ANÁLISIS DEL TRABAJO MATEMÁTICO DE ESTUDIANTES DE PRIMARIA A PARTIR DE UNA TAREA ABIERTA SOBRE FUNCIONES EN UN ENTORNO TECNOLÓGICO

Catalina Palacios Bezama, Jorge Gaona Paredes

Universidad de Playa Ancha, Chile

Se diseñó una tarea sobre función afín y lineal que se implementó con estudiantes chilenos de 8° básico. La tarea trata sobre la cotización para organizar un evento. Esta se desarrolló en una plataforma en línea (Moodle/Wiris) que permite el uso de expresiones matemáticas, respuestas abiertas, múltiples intentos y retroalimentación inmediata. La tarea inicialmente tuvo un trabajo aritmético, pero luego al fomentar el trabajo colectivo con apoyo de GeoGebra se logra construir el concepto de función lineal y afín. Se observa la activación de todas las génesis y algunos planos verticales en diferentes episodios de la implementación.

ANTECEDENTES

Este estudio se realiza bajo el marco del proyecto "Relación entre el feedback y el trabajo matemático de estudiantes en el contexto de evaluación en línea en matemática"[41], tesis de magíster "Evaluación en línea: análisis del trabajo matemático de estudiantes de 8° básico a través de una tarea abierta sobre funciones"[42] y en un artículo recién publicado sobre la experimentación (Palacios y Gaona, 2024).

En los últimos años, se han llevado a cabo diversas investigaciones sobre el trabajo de los estudiantes al utilizar sistemas de evaluación en línea. En su revisión bibliográfica, Gaona (2020) recopiló estudios hasta el año 2019, clasificando los artículos obtenidos en dos enfoques principales: los estudiantes y los artefactos tecnológicos utilizados

Para actualizar esta revisión, se llevó a cabo un análisis de la literatura entre 2020 y 2023, obteniendo 25 artículos, los cuales, en su mayoría, pueden analizarse desde la relación entre el sistema de evaluación, los estudiantes y los artefactos tecnológicos utilizados. En comparación con los años anteriores, se observa un aumento en los estudios que presentan una discusión epistemológica sobre el objeto matemático (Barana *et al.*, 2021b, 2021a; Gaona, Hernández, *et al.*, 2022; Gaona, López, *et al.*, 2022; Gaona y Menares, 2021; Luz y Yerushalmy, 2019; Popper y Yerushalmy, 2022; Putra *et al.*, 2023; Sangwin, 2023). Sin embargo, son pocos los estudios que abordan aspectos epistemológicos en estudiantes de nivel secundario.

---

[41] Proyecto Fondecyt de Iniciación N°11230953 a cargo del investigador responsable Jorge Gaona perteneciente a la Universidad de Playa Ancha Ciencias de la Educación.

[42] Tesis presentada para obtener el grado de Magíster en Evaluación Educacional en la Universidad de Playa Ancha de Ciencias de la Educación, bajo la dirección de Catalina Palacios Bezama.

Al analizar los artefactos tecnológicos de los estudios, se observa como las características tecnológicas específicas pueden jugar un rol clave en la interacción entre los estudiantes, los profesores y los sistemas de evaluación en línea. Se concluye que, al trabajar en áreas particulares, como el cálculo, álgebra, geometría o estadísticas, el trabajo se enriquece cuando se utilizan softwares específicos para estos.

Por su parte, la educación secundaria chilena considera 6 años de estudios distribuidos en los niveles de 7° y 8° básico y de I a IV medio. A nivel curricular en matemática se trabaja con cuatros ejes temáticos: números, álgebra y funciones, geometría y probabilidad y estadística. Dentro de los objetos matemáticos estudiado se encuentran las funciones, las cuales se trabajan de manera formal por primera vez en octavo básico (Ministerio de Educación de Chile, 2016). En los cursos posteriores de segundaria se continúa con otras familias de funciones: cuadrática, exponencial y logarítmica. Además, a nivel universitario se sigue siendo trabajando el concepto, tanto en carreras científicas como humanistas.

La decisión de trabajar con funciones responde a la relevancia curricular que se les otorga dentro de la enseñanza secundaria en Chile. Además, diversas investigaciones han señalado las dificultades que enfrentan los estudiantes al aprender el concepto de función, como, por ejemplo, en la conversión y el tratamiento de sus registros de representación, la distinción entre variable e incógnita, la formulación de situaciones que impliquen una relación funcional entre variables y la diferenciación entre funciones y ecuaciones, entre otros aspectos (Armas, 2020; Escorcia y Riveros, 2021; Ledezma *et al.*, 2018).

Por otra parte, aunque en los planes y programas se fomenta el uso de tecnología y algunas investigaciones muestran los beneficios de trabajar con ella, como desarrollar habilidades cognitivas tales como la argumentación o la representación, entre otras (Gaona, López, *et al.*, 2022; Gaona y Menares, 2021), aún son escasas las investigaciones donde se trabaja el concepto de función y sistemas de evaluación en línea.

Bajo este contexto, el estudio busca responder la siguiente pregunta de investigación, ¿Cómo se desarrolla el trabajo matemático de estudiantes de octavo básico en relación con las funciones lineales y afines cuando resuelven una tarea abierta en una plataforma de evaluación en línea?

MARCO TEÓRICO

La elección de la Teoría del Espacio de Trabajo Matemático (ETM) (Kuzniak *et al.*, 2022) se sustenta en su utilidad, ya que permite describir, analizar y comprender el trabajo matemático articulando, mediante las génesis semiótica, instrumental y discursiva, dos planos, uno epistemológico y otro cognitivo. En este trabajo se consideran las nociones de ETM personal (Menares Espinoza y Vivier, 2022) y la de ETM colectivo (Gaona *et al.*, en prensa).

El Espacio de Trabajo Matemático colectivo surge cuando los estudiantes desarrollan y construyen nociones matemáticas mediante una interacción constante, ya sea con sus compañeros o con el docente. A diferencia del ETM personal, que se centra en el trabajo matemático individual, el ETM colectivo se enriquece con las contribuciones de todos los miembros del grupo. En este proceso, cada estudiante aporta elementos de su ETM personal, lo que permite avanzar y construir conceptos de manera conjunta. De este modo, las nociones emergen no solo de la comprensión de un solo estudiante, sino que son el resultado de la interacción, argumentación e interrelación de diferentes estudiantes.

Por su parte, el docente desempeña un papel crucial al facilitar el proceso, guiando la discusión y asegurándose de que las diversas contribuciones se integren de manera adecuada para conformar el concepto o noción matemática en juego. En resumen, el ETM colectivo es un enfoque que fomenta la colaboración y la co-creación del conocimiento, subrayando la naturaleza social e interactiva del aprendizaje matemático.

Pese a que el ETM permitirá generar un análisis e interpretación de la información que se recopilará en la investigación, es importante mencionar que esta teoría no considera la tarea como parte de esta. Por lo que, las tareas se entenderán como actividades organizadas que permiten a los estudiantes construir sus propios conocimientos y habilidades. Considerando tres componentes didácticos de una tarea: el tipo de tarea, nociones matemáticas involucradas y el contexto (Gaona, 2018). En relación con los sistemas de evaluación en línea, este artefacto digital (plataforma) se divide en cuatro componentes; enunciado, sistema de entrada, sistema de validación y sistema de feedback.

Dentro de los tipos de tareas en sistemas de evaluación en línea, en este trabajo se considera una tarea abierta como aquella que permite que se generen múltiples respuestas en lugar de elegir entre opciones predefinidas o respuestas únicas (Gaona, 2022). Este tipo de tarea permite observar el potencial de conjeturas que proponen los y las estudiantes (Gaona, López, *et al.*, 2022; Luz y Yerushalmy, 2019; Yerushalmy y Olsher, 2020).

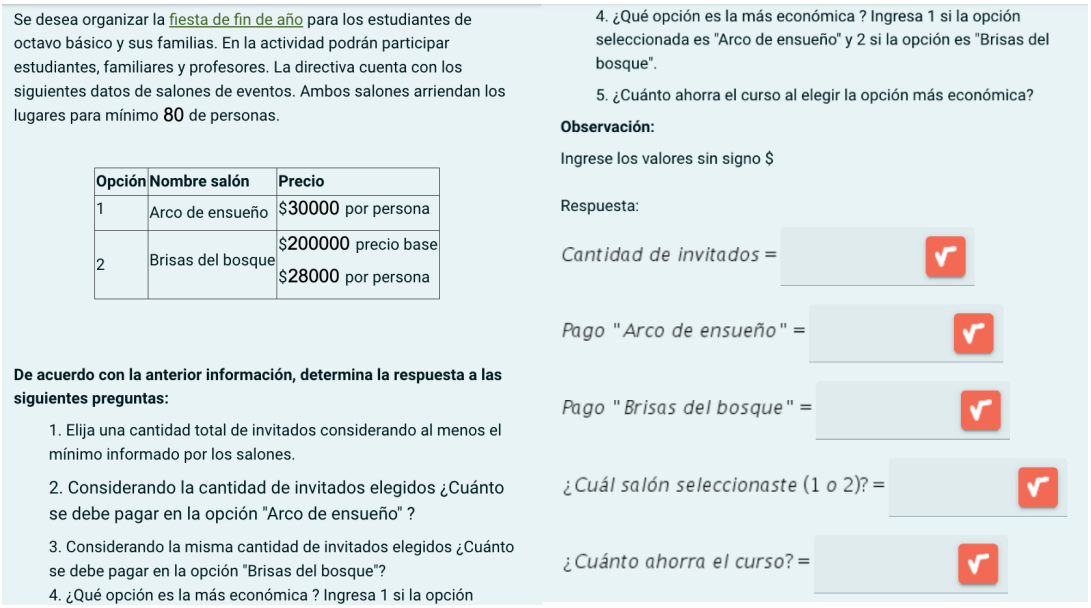
METODOLOGÍA

Para este estudio se utiliza la Ingeniería Didáctica (Artigue, 2015), ya que permite diseñar, desarrollar y analizar secuencias de enseñanza para mejorar la comprensión y el aprendizaje de conceptos matemáticos.

Tras un análisis curricular del Texto del Estudiante de 8° básico se observa la falta de tareas que motiven la transición por la génesis semiótica, discursiva e instrumental y que incluyan el uso de artefactos digitales. Es por esto que se diseñó una tarea en un entorno digital, específicamente en una plataforma Moodle/Wiris, la que se espera active las tres génesis mediante la modelación de una situación de la vida diaria.

La tarea está contextualizada en la búsqueda de un salón de eventos para la fiesta de fin de año de un curso mediante la cotización según cantidad de invitados. Esta presenta un problema que puede ser abordado desde lo aritmético, sin embargo, implícitamente existen dos funciones que modelan la cotización de cada salón de eventos cuando se considera la cantidad de invitados como variable.

En la Figura 1 se explicita el enunciado y el sistema de entrada, mientras que en la Figura 2 muestra el sistema de comprobación, por último, la Figura 3 indica el sistema de feedback. Cabe destacar, que la plataforma permite el uso de expresiones matemáticas equivalentes, respuestas abiertas, múltiples intentos y retroalimentación inmediata.


Se desea organizar la fiesta de fin de año para los estudiantes de octavo básico y sus familias. En la actividad podrán participar estudiantes, familiares y profesores. La directiva cuenta con los siguientes datos de salones de eventos. Ambos salones arriendan los lugares para mínimo 80 de personas.

Opción	Nombre salón	Precio
1	Arco de ensueño	$30000 por persona
2	Brisas del bosque	$200000 precio base $28000 por persona

De acuerdo con la anterior información, determina la respuesta a las siguientes preguntas:

1. Elija una cantidad total de invitados considerando al menos el mínimo informado por los salones.
2. Considerando la cantidad de invitados elegidos ¿Cuánto se debe pagar en la opción "Arco de ensueño" ?
3. Considerando la misma cantidad de invitados elegidos ¿Cuánto se debe pagar en la opción "Brisas del bosque"?
4. ¿Qué opción es la más económica ? Ingresa 1 si la opción seleccionada es "Arco de ensueño" y 2 si la opción es "Brisas del bosque".
5. ¿Cuánto ahorra el curso al elegir la opción más económica?

Observación:

Ingrese los valores sin signo $

Respuesta:

Cantidad de invitados =

Pago "Arco de ensueño" =

Pago "Brisas del bosque" =

¿Cuál salón seleccionaste (1 o 2)? =

¿Cuánto ahorra el curso? =

Figura 1: Enunciado de la tarea y Sistema de entrada.

La tarea va dirigida a estudiantes de octavo año básico de un establecimiento subvencionado de la comuna de Valparaíso. El grupo curso está conformado por 29 estudiantes entre los 13 y 15 años. Se decide que se trabaje en duplas para fomentar el intercambio de ideas, permitiendo una captura detallada de los datos a través del registro de estas interacciones.

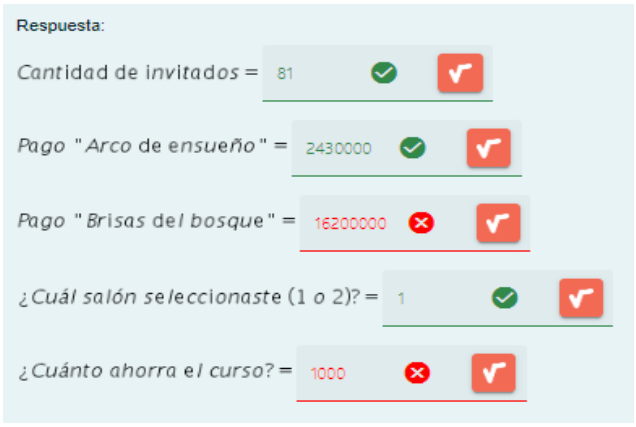
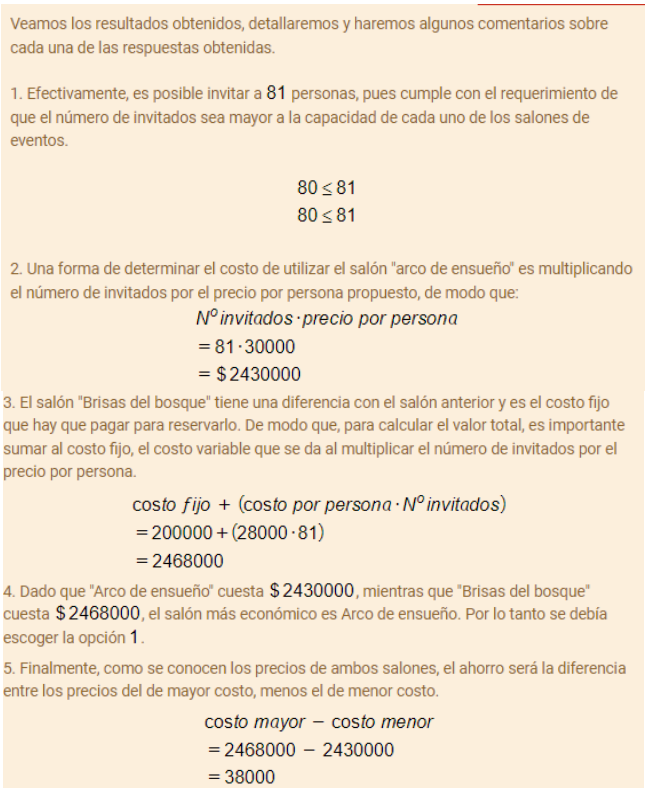


Figura 2: Sistema de comprobación.

Para la recolección de datos se utilizaron videograbaciones con una cámara fija y una en movimiento a cargo de un comunicador audiovisual. Además, grabaciones de pantalla de los computadores y audio. Por otra parte, las respuestas y cantidad de intentos de cada estudiante quedan registrados en la plataforma digital utilizada.


Veamos los resultados obtenidos, detallaremos y haremos algunos comentarios sobre cada una de las respuestas obtenidas.

1. Efectivamente, es posible invitar a 81 personas, pues cumple con el requerimiento de que el número de invitados sea mayor a la capacidad de cada uno de los salones de eventos.

$$80 \leq 81$$
$$80 \leq 81$$

2. Una forma de determinar el costo de utilizar el salón "arco de ensueño" es multiplicando el número de invitados por el precio por persona propuesto, de modo que:

$$N^o\,invitados \cdot precio\ por\ persona$$
$$= 81 \cdot 30000$$
$$= \$\,2430000$$

3. El salón "Brisas del bosque" tiene una diferencia con el salón anterior y es el costo fijo que hay que pagar para reservarlo. De modo que, para calcular el valor total, es importante sumar al costo fijo, el costo variable que se da al multiplicar el número de invitados por el precio por persona.

$$costo\ fijo\ +\ (costo\ por\ persona \cdot N^o\,invitados)$$
$$= 200000 + (28000 \cdot 81)$$
$$= 2468000$$

4. Dado que "Arco de ensueño" cuesta $\$\,2430000$, mientras que "Brisas del bosque" cuesta $\$\,2468000$, el salón más económico es Arco de ensueño. Por lo tanto se debía escoger la opción 1.

5. Finalmente, como se conocen los precios de ambos salones, el ahorro será la diferencia entre los precios del de mayor costo, menos el de menor costo.

$$costo\ mayor\ -\ costo\ menor$$
$$= 2468000\ -\ 2430000$$
$$= 38000$$

Figura 3: Sistema de feedback.

La implementación será dividida en dos instancias; la primera corresponde al trabajo en duplas en la plataforma, mientras que la segunda al trabajo colectivo para la construcción del concepto función.

Para poder analizar el potencial trabajo matemático se utilizarán las categorías de análisis de la Tabla 1, las cuales se sustentan en el ETM.

DIMENSIÓN	CATEGORÍA	DESCRIPTOR
Génesis semiótica	Representamen	Considera los elementos matemáticos en sus distintas formas de representación, tales como gráfico, algebraico, tabla de valores, diagrama sagital o lenguaje natural.
	Visualización	El objeto matemático función es interpretado mediante procesos cognitivos ligados a la visualización de sus diferentes representaciones.

Génesis instrumental	Artefactos	Se consideran artefactos simbólicos, como algoritmos que se utilizan en el proceso de construcción sin hacer ninguna conexión con la génesis discursiva donde se justifican. Se consideran artefactos digitales a programas informáticos, tales como; GeoGebra o Symbolab, entre otros.
	Construcción	Consideradas como acciones que son hechas a través del uso de los distintos artefactos y sus técnicas de uso asociadas.
Génesis discursiva	Referencial teórico	Asociados a las definiciones, propiedades o teoremas matemáticos preestablecidos. Como, por ejemplo, la definición de función como una relación que se establece entre dos conjuntos donde a cada elemento del primer conjunto se le asigna un único elemento del segundo conjunto o ninguno. Establecer argumentos utilizando conceptos relacionados, como por ejemplo, dominio, recorrido, variable dependiente e independiente, entre otros.
	Prueba	Es necesaria una argumentación, justificación o demostración para el razonamiento discursivo o sea pragmático con el uso de algún artefacto digital, o intelectual por medio de un razonamiento matemático (propiedad o teorema).
[Sem-Ins]	Génesis semiótica e instrumental	Estás génesis se verán articuladas, en el caso, por ejemplo; los objetos matemáticos son representados por alguno de los artefactos digitales usados en la tarea, lo cual permite su visualización en distintos registros de representación semiótica
[Sem-Dis]	Génesis semiótica y discursiva	Estás génesis se verán articuladas, en el caso, por ejemplo; la representación de las funciones es utilizada para justificar algún resultado.

[Ins-Dis]	Génesis instrumental y discursiva	Estás génesis se verán articuladas, en el caso, por ejemplo; los artefactos digitales dan información sobre las funciones lineales y afines, esta información es usada, y en coordinación con los conocimientos previos es posible dar una respuesta.

Tabla 1: Categorías del potencial trabajo matemático. Fuente: Extraída de Palacios y Gaona (2024).

RESULTADOS

El curso tenía 29 estudiantes, pero el día de la implementación solo se encontraban presentes 23, los cuales 7 deciden trabajar de manera individual y los demás se reunieron en dupla. La distribución se indica en la Figura 5.

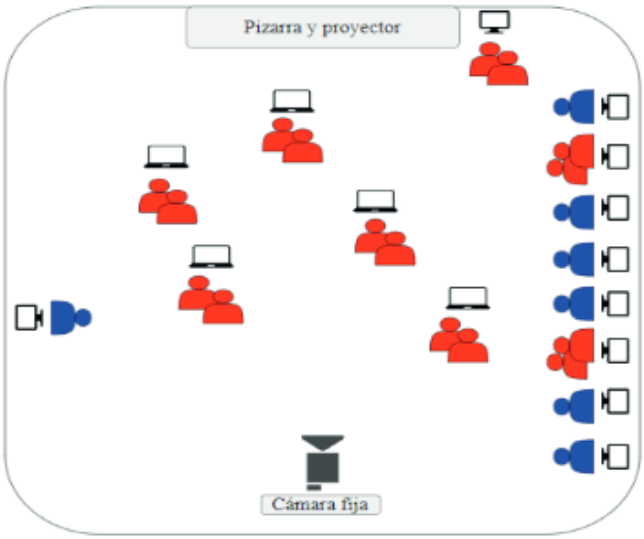


Figura 5: Distribución del grupo curso. Fuente: extraído de Palacios y Gaona (2024).

En la primera instancia, los estudiantes utilizan principalmente la aritmética para abordar las preguntas de la plataforma, encontrando dificultades específicas al tratar con el precio base del segundo salón. Sin embargo, después de varios intentos, a través de la retroalimentación y consultas dirigidas a la docente, logran responder de manera correcta esta pregunta. Algunos utilizan calculadoras de sus dispositivos móviles o computadoras, mientras que otros prefieren hacer cálculos manualmente en papel, lo que se puede interpretar como un trabajo principalmente instrumental aritmético, por lo tanto, no se evidencia categoría de análisis de un potencial trabajo matemático de

funciones (Ver tabla 2). Esto no quiere decir que no exista trabajo matemático, más bien que no se ajusta al funcional, que se está analizando en este estudio.

Estrategia 1	**Estrategia 2**	**Estrategia 3**
$81 \cdot 200000$	$28000 \cdot 100 + 200000$	$28000 \cdot 100$
I_6 escoge 81 invitados y utiliza calculadora para la operatoria.	D_1 escoge 100 invitados y realiza cálculo mental.	D_2 escoge 100 invitados y realiza el cálculo manualmente.

Tabla 2: Estrategias en el primer intento de la cotización salón "Brisas del Bosque".
Fuente: extraído de Palacios y Gaona (2024).

Durante la discusión colectiva, se observan 5 episodios y comienza a evidenciarse un trabajo matemático relacionado con funciones. En el primer episodio E1, la profesora invita a identificar las variables involucradas en la tarea anterior, donde se observa una argumentación respecto a cuáles son las variables y la diferenciación de la independiente con la dependiente, activándose la génesis discursiva del ETM funcional.

En el segundo episodio E2 se trabaja netamente con la recta de "Arco de ensueño" y en el tercero E3 con "Brisas del Bosque". En ambos casos, los estudiantes representan la relación entre la cantidad de invitados y el precio de la cotización en una tabla de valores. Luego, realizan la conversión del registro de la tabla de valores a las coordenadas (x,y), por último, lo representan en el plano cartesiano.

Según las categorías de análisis podemos determinar que se activa la génesis semiótica debido a que se presentan tres registros. Por otra parte, se activa la génesis instrumental ya que los estudiantes mencionan las coordenadas de forma algorítmica (cantidad de invitados, precio).

En el E4 se compararon los comportamientos de las dos rectas que aparecen. Mediante el registro gráfico los estudiantes comentan que ambas rectas "van hacia el mismo lugar" haciendo referencia implícita de la pendiente positiva de ambas. Activándose la génesis discursiva debido a que justifican mediante la proporcionalidad directa que cuando aumentan la cantidad de personas aumenta el valor de la cotización. Por otra parte, diferencian que la recta 2 parte más arriba debido al precio base que tiene el salón "Brisas del Bosque" activándose el plano [Sem-Dis] ya que justifican porque esta recta "parte" desde los $200.000 y no desde el origen a diferencia de la recta 1.

Por último, en el E5 se activa la génesis discursiva ya que justifican que las rectas son funciones ya que cumplen con la condición de unicidad. Por otra parte, al momento de generalizar las cotizaciones de ambos salones se activa la génesis semiótica debido a que realizan una conversión del lenguaje natural al algebraico. Luego, se les solicita

que utilicen el buscador web para ver imágenes de función lineal y afín, activándose el plano [Sem-Dis]. Ya que los estudiantes utilizan la representación gráfica para relacionar qué recta es lineal y cuál es afín. Destacando que las funciones lineales "parten" desde el origen y las afines no. Concluyen, que la cotización de "Arco de Ensueño" corresponde a una función lineal porque no tiene base y "Brisas del Bosque" a función afín ya que tiene una base.

CONCLUSIONES

En resumen, se realizó un análisis personal y colectivo del trabajo matemático de los estudiantes, cuando se ven enfrentados a una tarea abierta en un entorno tecnológico, en relación con el concepto de función afín y lineal. Este análisis se efectuó en dos instancias, una correspondiente al trabajo en la plataforma y otra a la discusión colectiva de lo realizado, evidenciando en la segunda, una activación de distintas génesis conformes a las categorías diseñadas en base a la Teoría del Espacio de Trabajo Matemático de las funciones, que son la génesis semiótica, instrumental y discursiva. Cabe destacar que la discusión fue realizada con apoyo de la herramienta GeoGebra y navegación en línea.

Los resultados obtenidos, revelan que los estudiantes de octavo básico de un establecimiento subvencionado de Valparaíso, al momento de resolver una tarea abierta relacionada con la función afín y lineal en un entorno tecnológico, activan las tres génesis descritas anteriormente. Además, se evidencia que estas operan de manera particular y también simultánea en los planos semiótico-instrumental y semiótico-discursivo.

Dichas génesis fueron accionadas por los estudiantes de diversas formas. La dimensión semiótica fue trabajada principalmente en la conversión de registros, la instrumental en la utilización de algoritmos y herramientas digitales para mencionar y ubicar coordenadas. Por último, la dimensión discursiva en la justificación a los cuestionamientos que hacía la docente sobre las funciones. En cuanto a los planos verticales activados, se observó que el plano semiótico-instrumental fue trabajado en la representación de rectas mediante la herramienta digital GeoGebra, y el plano semiótico-discursivo fue empleado principalmente en la justificación acompañada de registros gráficos. Se concluye que el potencial desarrollo del Espacio de Trabajo Matemático, mediante la tarea diseñada, se desarrolla en la mayoría de sus dimensiones.

Respecto al ETM colectivo, los estudiantes desarrollaran nociones matemáticas relacionada con las funciones lineales y afines mediante la interacción constante con sus duplas, grupo curso y el docente, enriqueciendo así la construcción del objeto matemático, ya que cada individuo aportó elementos de su ETM personal. Es por esto, que seguir fomentando el intercambio y la discusión de ideas desempeñan un papel crucial en el aprendizaje de la matemática, reflejando no solo la comprensión individual de cada estudiante, sino también contribuyendo a una comprensión colectiva. Es por esto, que el rol del docente es fundamental como guía de la discusión

y ayudando a integrar los aportes de los estudiantes, lo que permite la co-construcción del conocimiento.

Finalmente, las proyecciones de esta investigación están ligadas a estudiar diversos espacios de trabajo matemático cuando los estudiantes se enfrentan a tareas abiertas diseñadas en plataformas digitales, de esta forma analizar si el impacto de los entornos tecnológicos en el trabajo matemático de los estudiantes varía al modificar algunas variables didácticas. Lo cual aporta a una mejor comprensión de cómo es el trabajo de los estudiantes con tareas de evaluación de este tipo, apuntando a una posterior mejora de las prácticas docentes y al diseño de tareas educativas enriquecidas.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Armas, T. A. De. (2020). Evaluación de la Faceta Epistémica del Conocimiento Didáctico- Matemático de Futuros Profesores de Matemáticas en el Desarrollo de una Clase Utilizando Funciones. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, *34*(66), 110-131. https://doi.org/10.1590/1980-4415v34n66a06

Artigue, M. (2015). Perspectives on Design Research: The Case of Didactical Engineering. In *Approaches to Qualitative Research in Mathematics Education* (pp. 467-496). https://doi.org/10.1007/978-94-017-9181-6

Barana, A., Marchisio, M., y Sacchet, M. (2021a). Effectiveness of Automatic Formative Assessment for learning Mathematics in Higher Education. *International Conference on Higher Education Advances*, 1-8. https://doi.org/10.4995/HEAd21.2021.13030

Barana, A., Marchisio, M., y Sacchet, M. (2021b). Interactive feedback for learning mathematics in a digital learning environment. *Education Sciences*, *11*(6). https://doi.org/10.3390/educsci11060279

Escorcia, E., y Riveros, V. (2021). Estrategia TIC para enseñar la función lineal en estudiantes universitarios. *Boletín Redipe*, *10*(9), 413-429. https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=8114575

Gaona, J. (2018). Integrar tecnología en la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, factores claves. *Gestión de La Innovación En Educación Superior REGIES*, *3*, 75-93. http://www.inacap.cl/regies75 Orcid:https://orcid.org/0000-0001-6367-529X

Gaona, J. (2020). Panorama sobre los sistemas de evaluación automática en línea en matemáticas. *PARADIGMA*, 53-80. https://doi.org/10.37618/PARADIGMA.1011-2251.0.p53-80.id853

Gaona, J. (2022). Diseño de tareas en un sistema de evaluación en línea, una mirada desde la teoría de espacios de trabajo matemático. *PädiUAQ* , *5*(10), 2-18. https://www.researchgate.net/publication/361843551_Diseno_de_tareas_en_un_sistema_de_evaluacion_en_linea_una_mirada_desde_la_teoria_de_espacios_de_trabajo_matematico

Gaona, J., Hernández, R., Guevara, F., y Bravo, V. (2022). Influence of a Function's Coefficients and Feedback of the Mathematical Work When Reading a Graph in an Online Assessment System. *International Journal of Emerging Technologies in Learning*, *17*(20), 77-98. https://doi.org/10.3991/ijet.v17i20.32641

Gaona, J., López, S., y Delgadillo, E. M. (2022). *Aprendizaje de los números complejos usando diferentes sistemas de cálculo simbólico y un sistema de evaluación en línea en formación inicial de profesores*. http://arxiv.org/abs/2201.00407

Gaona, J., y Menares, R. (2021). *Argumentación de futuros profesores de matemáticas en tareas sobre fracciones mediadas por un sistema de evaluación en línea con feedback automático*. https://europepmc.org/article/ppr/ppr386985

Gaona, J., Palacios, C. B., y Sánchez, L. (n.d.). Táches ouvertes dans un environnement numérique pour le développement de l'etm collectif. *Actes Du Huitième Symposium d'Étude Sur Le Travail Mathématique*.

Kuzniak, A. (2022). The Theory of Mathematical Working Spaces—Theoretical Characteristics. In A. Kuzniak, E. Montoya-Delgadillo, y P. R. Richard (Eds.), *Mathematical Work in Educational Context: The Perspective of the Theory of Mathematical Working Spaces* (pp. 3-31). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-030-90850-8_1

Ledezma, C., Ramos-Rodríguez, E., y Vásquez, P. (2018). Propuesta de enseñanza para la conversión de registros en el tratamiento de las funciones lineales y afines. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, *31*(1), 183-191. http://funes.uniandes.edu.co/13503/1/Ledezma2018Propuesta.pdf

Luz, Y., y Yerushalmy, M. (2019). Students' conceptions through the lens of a dynamic online geometry assessment platform. *The Journal of Mathematical Behavior*, *54*, 100682. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2018.12.001

Menares Espinoza, R., y Vivier, L. (2022). *Personal Mathematical Work and Personal MWS* (pp. 91-120). https://doi.org/10.1007/978-3-030-90850-8_5

Ministerio de Educación de Chile. (2016). *Programa de Estudio Octavo básico: Matemática* (Primera edición). 2016. https://www.curriculumnacional.cl/614/articles-18983_programa.pdf

Palacios, C. y Gaona, J. (2024), Introducir el concepto de función afín y lineal a partir de una tarea abierta en un entorno tecnológico. (2024). UCMaule, 67, 136-164. https://doi.org/10.29035/ucmaule.67.136

Popper, P., y Yerushalmy, M. (2022). Online example-based assessment as a resource for teaching about quadrilaterals. *Educational Studies in Mathematics*, *110*(1), 83-100. https://doi.org/10.1007/s10649-021-10109-1

Putra, Z. H., Sari, I. K., y Dahnilsyah. (2023). Online formative assessment in mathematics education: Prospective primary teachers understanding of rational numbers. *Journal of Elementary Education*, *16*(2), 169-188. https://doi.org/10.18690/rei.16.2.1232

Sangwin, C. (2023). Running an Online Mathematics Examination with STACK. *International Journal of Emerging Technologies in Learning*, *18*(3), 192-200. https://doi.org/10.3991/ijet.v18i03.35789

Yerushalmy, M., y Olsher, S. (2020). Online assessment of students' reasoning when solving example-eliciting tasks: using conjunction and disjunction to increase the power of examples. *ZDM - Mathematics Education*, *52*(5), 1033-1049. https://doi.org/10.1007/s11858-020-01134-0

CONCEPTION D'UNE TÂCHE GÉOMÉTRIQUE POUR AMORCER LE DÉVELOPPEMENT DU RAISONNEMENT DÉDUCTIF D'ÉLÈVES DE 6E ANNÉE DU PRIMAIRE AU QUÉBEC : ANALYSE D'UN ETM IDOINE POTENTIEL

Sandrine Michot

Université du Québec à Montréal, Canada; michot.sandrine@courrier.uqam.ca

Cette contribution s'inscrit dans un projet doctoral visant à concevoir et à mettre à l'essai une séquence d'enseignement pour le primaire comprenant six tâches de géométrie permettant de travailler des éléments logiques tels que l'implication, sa réciproque et l'équivalence correspondante entre propositions, pour en arriver à la rédaction de définitions mathématiques. Dans le cadre de cette contribution, nous présentons une de ces tâches, qui introduit la distinction entre une propriété simple et une propriété caractéristique et entre une implication et une équivalence, dans le but d'élaborer le référentiel théorique d'élèves de 6e année du primaire, et l'analysons en termes d'ETM idoines potentiels.

INTRODUCTION

À l'école secondaire, les élèves sont confrontés à l'un des apprentissages les plus difficiles en mathématiques, celui de la démonstration mathématique. Différentes difficultés ont été relevées par les chercheurs : structure rigoureuse et contraignante (Duval, 1991), lexique mathématique difficile à employer (Venant, Tremblay, & Labrecque, 2015), confusion entre la démonstration et l'argumentation (Mangiante, 2004; Tanguay, 2007), difficulté à comprendre le rôle des définitions (Tanguay & Geeraerts, 2012), maîtrise insuffisante en logique (Epp, 2003; Tanguay & Geeraerts, 2012), pour n'en nommer que quelques-unes. Ces difficultés sont traditionnellement abordées selon une approche de rupture assumée entre les programmes scolaires du primaire et du secondaire. Nous proposons plutôt d'amorcer un travail sur la preuve dès l'école primaire (6 à 11 ans), dans un esprit de continuité avec ce qui est enseigné à l'école secondaire (12 à 16 ans). Certains auteurs relèvent, en effet, que le raisonnement déductif n'est pas assez mis en avant dès le primaire (Harel & Sowder, 1998; Mariotti, 2006; Solomon, 2006; Usiskin, 1982) : les élèves n'ont pas l'habitude de travailler sur des objets idéaux, organisés en théorie « déductive » à partir d'axiomes et de théorèmes.

L'idée poursuivie dans ce projet est d'amorcer le développement du raisonnement déductif dès le primaire, pour y établir des bases qui pourront agir à titre de levier pour les élèves et de concevoir l'enseignement de la géométrie dans un continuum.

Pour ce faire, nous avons conçu une séquence d'enseignement, composée de six tâches en géométrie, pour des élèves de 6e année du primaire (11 ans), dont l'objectif principal est de travailler des éléments logiques essentiels pour comprendre les spécificités de la

définition mathématique et pour amorcer un travail sur le raisonnement déductif. Les tâches proposées visent tout particulièrement à travailler des éléments de logique et de théorie des ensembles essentiels à l'apprentissage de la preuve : rôle de l'exemple et du contre-exemple, distinction entre une implication, sa réciproque et l'équivalence correspondante, inclusion des classes, quantifications (Durand-Guerrier, 1999). Les quadrilatères (trapèze, parallélogramme, rectangle, losange, carré et cerf-volant) et leur classification y sont travaillés du fait que la littérature soulève une ambiguïté et un manque d'uniformité, par rapport aux définitions et aux classifications proposées aux élèves (Bernat, 2021). Dans les tâches 1 et 2, les élèves réalisent un travail habituel sur des figures géométriques familières, avec mesure et instruments de géométrie, ils sont amenés à observer que les propriétés géométriques sont indépendantes du représentant de la figure (tâches 2 et 3). La tâche 3 amène les élèves à distinguer les propriétés simples des propriétés caractéristiques (en lien avec l'implication, sa réciproque et l'équivalence correspondante). La tâche 4 permet de mettre en évidence qu'une définition mathématique s'appuie sur des propriétés caractéristiques. Enfin, les tâches 5 et 6 amènent les élèves à réinvestir leurs connaissances et à définir une nouvelle classe d'objets géométriques (le cerf-volant) comme des mathématiciens le feraient, en décidant d'une propriété caractéristique à isoler.

Dans cet article, nous détaillons la troisième tâche qui introduit les distinctions entre propriétés simple et caractéristique et qui amène les élèves à construire leur référentiel théorique. Nous présentons les éléments théoriques qui ont soutenu la conception de la tâche, ainsi que son analyse, en termes d'ETM idoine potentiel, en nous intéressant à la circulation des genèses dans les plans verticaux.

CADRE THÉORIQUE

La conceptualisation de la tâche pour activer des ETM

La tâche est définie comme le « but qu'il s'agit d'atteindre sous certaines conditions » (Leplat, 1997 cité dans Vandebrouck *et al.*, 2013, p. 4). En classe de mathématique, des tâches sont proposées par l'enseignant·e sous forme de consignes orales ou écrites. Nous reprenons la définition de Sierpinska pour définir les tâches mathématiques (2004, p. 10) : « I use the expression mathematical task in a broad sense to refer to any kind of mathematical problem, with clearly formulated assumptions and questions, known to be solvable in predictable time by students ».

Le concept de tâche n'est pas représenté dans le diagramme représentant le cadre des ETM même si le travail mathématique est activé à l'aide des tâches. Nous avons choisi de considérer la notion de « types de tâches » de Chevallard (1999) pour caractériser la tâche au sein du cadre des ETM qui a été conceptualisée par Gaona (2018). Une tâche est donnée à l'aide d'un verbe et traite d'un objet précis. La tâche est en partie définie par le type auquel elle appartient, et ce type s'insère lui-même dans un *genre*. Par exemple, « calculer la valeur d'une fonction en un point » est un type de tâches; mais « calculer », tout court, est ce qu'on appelle un « genre de tâches » (Chevallard, 1999, p. 224). La tâche mathématique est constituée d'un type de tâches (première

variable) qui traite d'un objet ou d'un outil mathématique (deuxième variable) selon un contexte spécifique (troisième variable). Ainsi, dans le cadre de cette communication, la tâche présentée consiste à « travailler des éléments logiques » (type de tâche) à l'aide de quadrilatères connus (objet mathématique) selon un contexte collectif de la classe (travail en grand groupe) (Gómez-Chacón & Vivier, 2023), afin de favoriser les interactions et les échanges entre les élèves (Flores González, 2018; Vandebrouck, 2020; Vandebrouck *et al.*, 2013).

Nous avons choisi d'adjoindre cette conceptualisation des tâches au cadre des ETM, puisque le travail mathématique est activé par la tâche prescrite (Figure 1).

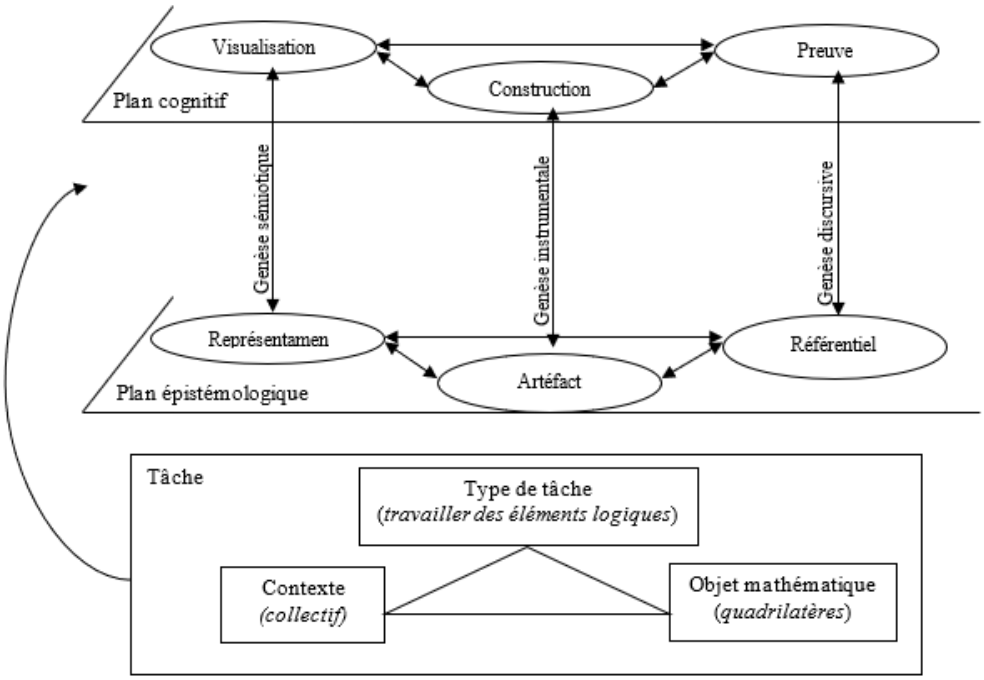


Figure 1: la tâche dans le cadre des ETM.

Définitions : propriété simple et propriété caractéristique

Dans cette tâche, les élèves auront à travailler des éléments d'implication et d'équivalence en lien avec les propriétés simples et caractéristiques des quadrilatères. Cela leur permettra de valider des énoncés à l'aide d'exemples et de contre-exemples et leur servira de tremplin pour la rédaction de définitions mathématiques.

Une propriété est un attribut d'un objet mathématique. En géométrie, deux types de propriétés sont à considérer : les propriétés simples et les propriétés caractéristiques. Une propriété simple est une propriété que partagent tous les représentants de la forme en cause. Par exemple, les parallélogrammes ont les propriétés simples suivantes : 4 côtés, des côtés opposés isométriques et parallèles, des angles consécutifs supplémentaires, des diagonales qui partagent le même milieu, etc. Néanmoins, certaines de ces propriétés sont aussi détenues par d'autres figures : le trapèze isocèle a par exemple lui aussi ses angles consécutifs supplémentaires. Comme son nom l'indique, une propriété caractéristique est une propriété qui caractérise complètement la figure parmi les autres figures. C'est une propriété à partir de laquelle on peut *définir*

la figure en cause. En général, une seule propriété caractéristique est suffisante pour définir la figure. Dans le cas du parallélogramme, « deux paires de côtés parallèles » sont une des propriétés caractéristiques possibles.

Des règles de logique : implication, réciproque, équivalence et quantification

Nous présentons les concepts d'implication simple, d'équivalence et de quantification, car ces éléments sont travaillés dans la tâche présentée.

Une implication simple est un énoncé qui se note (P⇒Q). Elle se lit « P implique Q », « si P alors Q », « P est une condition suffisante pour Q » ou « Q est une condition nécessaire pour P ». Par exemple, l'énoncé « si les diagonales d'un quadrilatère partagent un même milieu, alors c'est (forcément) un parallélogramme » est une implication simple. Sa réciproque (Q⇒P) serait : « si la figure est un parallélogramme, alors ses diagonales partagent (toujours) le même milieu ». Dans ce cas-ci, la première implication est vraie et sa réciproque est également vraie. On parle d'équivalence. En effet, P est vraie, si et seulement si Q est vraie, et pour que Q soit vraie, il faut et il suffit (il est nécessaire et suffisant) que P soit vraie. On dit que P est une condition nécessaire et suffisante pour Q. L'équivalence se note : P⇔Q. Les implications, les réciproques, les équivalences sont des énoncés dits *conditionnels*.

La réciproque d'une implication n'est pas toujours vraie. Par exemple, l'implication « si la figure est un rectangle, alors (forcément) les côtés opposés sont isométriques » est vraie. Or, la réciproque de cet énoncé, « si les côtés opposés d'un quadrilatère sont isométriques, alors la figure est (toujours) un rectangle » est fausse, car il est possible d'invalider l'énoncé à l'aide d'un contre-exemple : la figure pourrait être un parallélogramme non rectangle.

Dans les énoncés de la logique propositionnelle, des quantificateurs universels, « pour tout », « quel que soit » ou « tous », sont utilisés pour indiquer que tout élément d'un ensemble de référence vérifie l'énoncé (quantifié universellement). Le quantificateur universel est symbolisé par ∀. Pour invalider un énoncé quantifié universellement, il suffit de trouver un (seul) contre-exemple, c'est-à-dire un exemple qui ne satisfait pas l'énoncé. Dans les énoncés conditionnels, on peut aussi faire intervenir des quantificateurs existentiels, « il existe », « certains », « quelques », « au moins un », qui signifient qu'il existe au moins un élément de l'ensemble de référence qui satisfait l'énoncé. Le quantificateur existentiel est symbolisé par ∃.

En mathématiques, la quantification des énoncés conditionnels pose des difficultés aux élèves parce qu'elle est, la plupart du temps, implicite. En effet, comme l'a montré Durand-Guerrier (1999) dans son article où elle analyse une tâche portant sur un labyrinthe, l'implication simple « si P alors Q » est sujette à des malentendus, aussi bien pour les élèves que pour les mathématiciens et les enseignants. Durand-Guerrier s'interroge sur la pertinence de l'implicitation des quantificateurs et met en garde la communauté des enseignants de mathématiques contre cette « pratique généralement non questionnée : la quantification universelle implicite des énoncés » (1999, p. 68). En effet, pour les élèves, il ne va pas de soi que l'implication s'applique dans tous les

cas. Durand-Guerrier suggère de rendre les quantifications explicites dans les tâches proposées aux élèves, pour lever l'ambiguïté de la formulation de certains énoncés qui peuvent être en contradiction avec la logique naturelle, et ainsi éviter diverses interprétations des énoncés conditionnels. L'ajout des mots suivants peut aider à lever l'ambiguïté : toujours, forcément, etc. Dans cette tâche, les quantificateurs sont explicites, pour faciliter la compréhension des implications, de leur réciproque et des équivalences dans les énoncés.

MÉTHODOLOGIE

La séquence d'enseignement a été conçue comme un moyen pour provoquer le travail mathématique que nous voulons observer. Le cadre des ETM (thETM) a été mobilisé comme outil théorique et méthodologique pour analyser, interpréter et décrire nos tâches *a priori* et *a posteriori*, afin d'appréhender le travail mathématique qui pourrait être provoqué par ces tâches (Kuzniak, Tanguay, & Elia, 2016).

Nous distinguons l'ETM idoine potentiel de l'ETM *idoine* effectif, comme décrit dans le travail de thèse de Masselin (2019) ou les travaux de Henríquez-Rivas, Kuzniak, et Masselin (2022). L'ETM idoine potentiel est celui envisagé par l'enseignant ou le concepteur de la tâche au préalable, avant qu'elle soit implémentée. C'est « l'ETM idoine dans lequel un enseignant se projette et qu'il élabore seul en amont de la mise en place d'une tâche dans une classe » (Masselin, 2019, p. 51). L'ETM *idoine* effectif est l'ETM qui est réellement mis en œuvre dans une classe. Dans le cadre de cette tâche, l'ETM idoine potentiel est celui envisagée par la chercheuse.

Ces analyses sont menées dans le cadre de thETM et cherchent à mettre en évidence l'interaction des différentes dimensions en jeu dans le travail géométrique (sémiotique, instrumentale et discursive) dans l'activité mathématique de l'élève et les liens existants entre l'analyse des figures, l'usage des instruments de géométrie et le développement du raisonnement déductif, via les différentes genèses et les plans verticaux [Sem-Ins], [Ins-Dis] et [Dis-Sem]. La tâche n'ayant pas été implémentée, les analyses seront menées uniquement en termes d'ETM idoine potentiel.

PRÉSENTATION ET ANALYSE DE LA TÂCHE

Nous présentons l'étude d'un ETM idoine potentiel et des institutionnalisations potentielles. La tâche présentée prend la forme d'une discussion dirigée par l'enseignante afin de faire comprendre à ses élèves la distinction entre une propriété simple et une propriété caractéristique. Il ou elle dirige la discussion à l'aide de trois exemples choisis par la chercheuse et questionne les élèves pour les amener à clarifier et à définir ce que sont des propriétés simples et des propriétés caractéristiques. Dans le cadre de cette communication, nous ne présentons que le premier exemple qui est la « propriété simple : avoir des côtés opposés isométriques ». À l'aide de questions ciblées par la chercheuse, l'enseignante amène les élèves à prendre conscience des relations existantes entre les propriétés et à travailler des éléments de logique tels que l'implication, la réciproque et l'équivalence. Ces questions visent à amener les élèves

à activer la genèse discursive dans leur travail, en combinant des éléments issus de la genèse sémiotique et/ou de la genèse instrumentale. En termes d'ETM, le but est de passer progressivement du plan [Sem-Ins] vers le plan [Sem-Dis] en s'appuyant sur le plan [Ins-Dis], afin de commencer à construire le référentiel théorique et d'amorcer l'activation d'une genèse discursive encore à développer. Toutefois, l'enseignante dirige la discussion selon la compréhension et les réponses données par les élèves : le but étant de construire avec eux le sens associé aux propriétés simples et caractéristiques et qu'ils se familiarisent avec l'implication, la réciproque et l'équivalence. L'enseignante peut intervenir lorsque les élèves travaillent et les orienter vers un des plans verticaux qu'il juge opportun.

En termes d'ETM idoine, nous anticipons trois possibilités, avec un va-et-vient entre les trois plans verticaux :

- Un travail inscrit dans le plan [Sem-Dis] avec une activation de la genèse discursive en utilisant les connaissances à propos des quadrilatères (losange, carré, rectangle, parallélogramme, trapèze) pour décrire les relations existantes (de cause à effet) entre des propriétés, ou pour donner des exemples ou des contre-exemples ;
- Un travail inscrit dans le plan [Sem-Ins], avec une circulation entre les genèses sémiotique et instrumentale, en validant la présence (ou non) d'une propriété donnée dans des figures à l'aide des instruments de géométrie ;
- Un travail inscrit dans le plan [Ins-Dis] avec une activation des genèses discursive puis instrumentale, à travers l'évocation d'éléments du référentiel théorique et la validation des propositions à l'aide des instruments de géométrie, ou leur invalidation via le tracé de contre-exemples.

Nous présentons ci-dessous le déroulement prévu de la tâche tel qu'il a été envisagé par la chercheuse. Les consignes, les questions posées et les institutionnalisations (potentielles) par l'enseignante sont inscrites *en italique* sous forme de discours direct. Les réponses attendues des élèves et une brève analyse en termes d'ETM idoine potentiel sont également présentées pour illustrer le potentiel de cette tâche et les objectifs poursuivis dans cette séance.

Enseignante *: Nous allons voir ce que sont des propriétés simples et des propriétés caractéristiques. Je vais vous poser des questions afin que vous puissiez encore mieux comprendre le rôle des propriétés et que vous soyez en mesure d'identifier ces deux types de propriétés et les liens logiques qui existent entre les propriétés.*

Si je prends la propriété « avoir des côtés opposés isométriques », est-ce une propriété des rectangles ? (réponse attendue : oui, il a même deux paires de côtés opposés isométriques)

Est-ce que seulement les rectangles ont cette propriété ? Est-ce que si « je suis un quadrilatère qui a des côtés opposés isométriques, alors je suis automatiquement un

rectangle ? » (réponse attendue : non, je pourrais être un losange, un parallélogramme…)

Nous nous attendons à ce que les élèves soient en mesure d'utiliser leurs connaissances à propos des quadrilatères (notamment rectangle, losange, parallélogramme, carré) et que leur travail mathématique s'inscrit dans le plan [Sem-Dis] avec une activation de la genèse discursive pour décrire les relations existantes (de cause à effet) de la propriété « avoir des côtés opposés isométriques ».

L'enseignante écrit au tableau : Être un rectangle ⇒ (implique *forcément*, *dans tous les cas*…) avoir des côtés opposés isométriques.

Enseignante : *On parle dans ce cas d'une implication simple, car il est vrai que lorsque la figure est un rectangle, alors forcément elle a la propriété « avoir des côtés opposés isométriques ». Toutefois, peut-on dire que la réciproque (la flèche qui va dans l'autre sens) est vraie ?*

L'enseignante peut écrire au tableau : *Avoir des côtés opposés isométriques ⇒ (implique forcément) Être un rectangle

Enseignante : *Avoir des côtés opposés isométriques signifie-t-il que la figure est forcément un rectangle ?* (Réponse attendue : non, d'autres figures ont aussi cette propriété sans être un rectangle).

Vous me dites « non », êtes-vous en mesure de me donner un exemple (introduction du concept de contre-exemple), *ou de me dessiner une figure, pour me montrer que cette implication (avec son 'forcément', ce qui ici veut dire 'dans* ***tous*** *les cas') est fausse ?* (Réponse attendue : les élèves peuvent mentionner le losange, le carré, le parallélogramme. Il faut que l'enseignante questionne les élèves pour qu'ils ou elles comprennent que le carré est un rectangle particulier et ne constitue pas un contre-exemple à l'implication).

Nous nous attendons à ce que le travail mathématique des élèves soit inscrit dans le plan [Ins-Dis] avec une activation des genèses discursive puis instrumentale, à travers l'évocation d'éléments du référentiel théorique et l'invalidation de cette proposition via le tracé de contre-exemples.

Enseignante : *Comme la propriété « avoir des côtés opposés isométriques » n'est pas suffisante pour caractériser le rectangle, c'est qu'il faut ajouter des propriétés si l'on veut être sûr d'avoir affaire à un rectangle. On dira que cette propriété est une propriété simple du rectangle, mais que ce n'est pas une propriété* ***caractéristique*** *du rectangle car d'autres quadrilatères détiennent cette propriété. La propriété* ne ***caractérise pas complètement*** *le rectangle.*

En géométrie, on distingue les propriétés simples des propriétés caractéristiques. Une propriété simple est une propriété que partagent tous les représentants de la forme qui nous intéresse, mais qui est également une propriété d'autres formes.

Par exemple, tous les rectangles ont les propriétés simples suivantes : 4 côtés, 4 angles droits, des côtés opposés isométriques et parallèles, des diagonales qui partagent le même milieu, etc. Toutefois, ces propriétés, d'autres figures peuvent aussi les détenir. C'est pourquoi le concept de propriété caractéristique est intéressant. Une propriété caractéristique est une propriété particulière qui permet de différencier la figure de toutes les autres figures. C'est la propriété qui va caractériser complètement la figure. Habituellement, on cherche de préférence ***une seule*** *propriété caractéristique qui soit suffisante pour différencier la figure de toutes les autres. Dans le cas du rectangle, une des propriétés caractéristiques possibles est qu'il a 4 angles droits (prévoir que 3 angles droits est aussi une bonne réponse).*

Si des élèves mentionnent avoir des diagonales de même longueur et qui partagent le même milieu, ou avoir des côtés parallèles deux à deux et un angle droit, expliquer que ce sont effectivement de bonnes réponses, de bonnes propriétés mais que dans ces cas-ci, il n'y a pas une seule propriété mais la conjonction de deux propriétés (conjonction, c'est-à-dire avec un ET qui lie les deux propriétés). C'est la conjonction des deux qui est caractéristique de la figure, n'en garder qu'une seule ne suffirait pas.

Nous nous attendons à ce que le travail mathématique des élèves s'inscrive dans le plan [Ins-Dis] avec une activation des genèses discursive puis instrumentale, à travers l'évocation d'éléments du référentiel théorique et la validation des propositions à l'aide des instruments de géométrie pour isoler la (les) propriété(s) caractéristique(s).

Enseignante : *Si je reviens à la propriété suivante : « Avoir des côtés opposés isométriques », celle-ci peut être considérée comme une propriété caractéristique d'un quadrilatère. Je vous lance le défi de trouver la figure qui détient « avoir des côtés opposés isométriques » comme propriété caractéristique.*

L'enseignante peut écrire au tableau : Avoir des côtés opposés isométriques ⇔ Quelle figure ?

L'enseignante laisse du temps aux élèves pour trouver la réponse (réponse attendue : le parallélogramme).

Nous nous attendons à ce que le travail mathématique des élèves soit inscrit dans le plan [Sem-Ins], avec une circulation entre les genèses sémiotique et instrumentale, en validant la présence (ou non) de la propriété « avoir des côtés opposés isométriques » dans différents quadrilatères à l'aide des instruments de géométrie.

Enseignante : *En effet, pour un quadrilatère, avoir des côtés opposés isométriques implique forcément, dans tous les cas, que la figure est un parallélogramme.* (Rappeler aux élèves qu'un losange, un rectangle, un carré sont des parallélogrammes, des *cas particuliers* de parallélogrammes. Il est sans doute facile pour les élèves de comprendre qu'un parallélogramme implique que ses côtés opposés sont isométriques, mais que la réciproque est moins évidente pour eux : des côtés isométriques impliquent que la figure est un parallélogramme). Mentionner que l'implication n'est pas vraie si l'on

considère les quadrilatères croisés, mais que ces quadrilatères ne seront pas considérés dans la classe. Si les élèves ne les mentionnent pas, l'enseignante en fera abstraction.

Enseignante : *Dans ce cas, on dira qu'il y a équivalence, pour un quadrilatère (non croisé), entre « être un parallélogramme » et « avoir des côtés opposés isométriques ».*

On note cela ainsi : Parallélogramme $\Leftrightarrow$ *Côtés opposés isométriques*

ce qui se lit, « être un parallélogramme est équivalent à (ou équivaut à) avoir ses côtés opposés isométriques ». Bien entendu, l'équivalence signifie qu'on a les ***deux*** *implications, dans les deux sens.*

$$\textit{Parallélogramme} \Rightarrow \textit{Côtés opposés isométriques} \quad \textit{ET}$$

$$\textit{Côtés opposés isométriques} \Rightarrow \textit{Parallélogramme.}$$

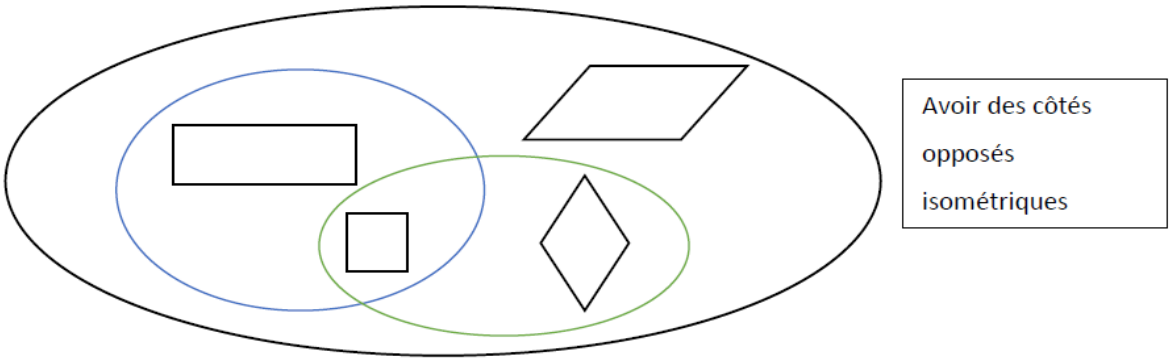


Figure 2 : Diagramme de Venn.

L'enseignante peut dessiner un diagramme de Venn au tableau (Figure 2) pour aider les élèves à comprendre les relations ensemblistes sous-jacentes et leur demande d'étiqueter les différents ensembles.

Enseignante : *à quel type de quadrilatère chaque ensemble correspond?* (Réponse attendue : l'ensemble noir correspond aux parallélogrammes, le bleu aux rectangles, le vert aux losanges et l'intersection de l'ensemble des rectangles et de l'ensemble des losanges aux carrés).

Le diagramme de Venn, est utilisé comme artéfact par l'enseignante pour soutenir la genèse sémiotique des élèves et faciliter la visualisation des relations ensemblistes. Le travail mathématique attendu s'inscrit alors dans le plan [Sem-Dis] avec une activation de la genèse discursive en utilisant les connaissances à propos du losange, du carré, du rectangle et du parallélogramme) pour décrire les relations existantes entre leurs propriétés et être en mesure d'étiqueter les ensembles.

L'enseignante montre à la classe le dessin d'un trapèze, d'un quadrilatère quelconque, d'un deuxième rectangle, chacun imprimé sur du papier cartonné. Puis, il ou elle leur demande de venir les disposer dans les différents ensembles (Figure 3).

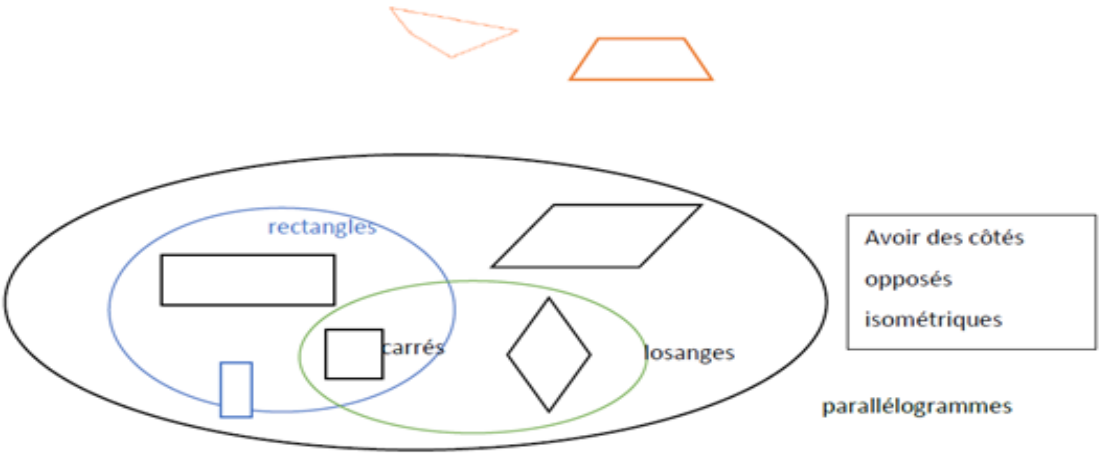


Figure 3: Diagramme de Venn complété.

Enseignante : *Toutes les figures à l'intérieur du grand ensemble ont des côtés opposés isométriques. De fait, le rectangle, le carré et le losange sont des parallélogrammes. Toutefois, la propriété « avoir des côtés opposés isométriques » n'est pas suffisante pour caractériser complètement le carré, le rectangle ou même le losange. Quelle(s) propriété(s) permet(tent) de caractériser le carré?* (Réponse attendue : avoir 4 angles droits et ses 4 côtés isométriques).

Afin que les élèves se familiarisent avec l'implication, l'équivalence, les propriétés simples et caractéristiques, la discussion se poursuit avec ces deux autres exemples: *« Propriété simple : « avoir des diagonales qui partagent le même milieu »* et *« Propriété simple : « avoir (au moins) une paire de côtés parallèles ».*

L'enseignante conclut la séance en mentionnant les concepts qui ont été vus : propriété simple, propriété caractéristique, implication et équivalence. Il ou elle peut faire une petite affiche qui sera à la disposition des élèves pour la suite des activités.

CONCLUSION

Pour amorcer le développement du raisonnement déductif dès le primaire, nous avons conçu une tâche *a priori* en termes d'ETMs idoines potentiels dans le but de provoquer un travail mathématique et d'amener les élèves à construire leur référentiel théorique et à amorcer l'activation d'une genèse discursive encore à développer. Nous avons considéré la notion de « types de tâches » de Chevallard (1999) pour caractériser la tâche au sein du cadre des ETM conceptualisée par Gaona (2018).

Dans cette tâche, à l'aide de questions bien choisies, l'enseignante amène les élèves à prendre conscience des relations existantes entre les propriétés simples et caractéristiques et à travailler des éléments logiques (l'implication, la réciproque et l'équivalence). Ces questions visent à amener les élèves à activer la genèse discursive dans leur travail, en combinant des éléments issus de la genèse sémiotique et/ou de la genèse instrumentale : passage progressif du plan [Sem-Ins] vers le plan [Sem-Dis] en s'appuyant sur le plan [Ins-Dis]. Pour lever l'ambiguïté des énoncés conditionnels,

nous avons rendu les quantificateurs explicites. Le travail mathématique envisagé a été analysé selon la circulation des genèses dans les plans verticaux.

Lorsque cette tâche sera implémentée, elle sera analysée en termes d'ETM *idoine* effectif de la classe. Il sera intéressant de regarder *a posteriori* le travail mathématique des élèves en regard aux ETM idoines potentiels.

REFERENCES

Bernat, J. (2021). Réflexions sur les quadrilatères et leur enseignement. *REPÈRES-IREM* (122), 15-46.

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches En Didactique Des Mathématiques*, *19*(2), 221-266.

De Villiers, M. (1998). *To teach definitions in geometry or teach to define?* Dans A. Olivier et K. Newstead (Dir.), *Proceedings of the Twenty-second International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, *2*, 248-255. University of Stellenbosch.

Durand-Guerrier, V. (1999). L'élève, le professeur et le labyrinthe. *Petit x*, *50*, 57-79.

Epp, S. S. (2003). The role of logic in teaching proof. *The American Mathematical Monthly*, *110*(10), 886-899.

Flores González, M. (2018). L'activité et le travail mathématique dans une tâche géométrique. Dans E. Montoya Delgadillo, P. R. Richard, L. Vivier, I. M. Gómez-Chacón, A. Kuzniak, M. Maschietto et D. Tanguay (Dir.), *Actes du Sixième Symposium sur le Travail Mathématique ETM 6*, 533-543. Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.

Gaona, J. (2018). Elaboración de un sistema de evaluación en línea como proceso de formación de profesores de matemáticas. [thèse de doctorat, Université Sorbonne Paris Cité].

Gaona, J., Hernández, R., Guevara, F., et Bravo, V. (2022). Influence of a function's coefficients and feedback of the mathematical work when reading a graph in an online assessment system. *International Journal of Emerging Technologies in Learning (iJET)*, *17*(20), 77-98.

Gómez-Chacón, I. M., et Vivier, L. (2023). Thème 3 : genèse et développement du travail mathématique : rôle de l'enseignant, du formateur, du collectif et des interactions. Dans C. Derouet, A. Nechache, P.R. Richard, L. Vivier, I.M. Gómez-Chacón, A. Kuzniak, M. Maschietto & E. Montoya Delgadillo (Dir.), *Actes du septième symposium d'Étude sur le Travail Mathématique*, 357-366. IREM de Strasbourg.

Harel, G., & Sowder, L. (1998). Students' proof schemes: Results from exploratory studies. *American Mathematical Society*, *7*, 234-283.

Henríquez-Rivas, C., Kuzniak, A., et Masselin, B. (2022). The Idoine or Suitable MWS as an Essential Transitional Stage Between Personal and Reference Mathematical Work. *Mathematical Work in Educational Contexts*, *18*, 121-146. Springer International Publishing.

Kuzniak, A., Tanguay, D., et Elia, I. (2016). Mathematical Working Spaces in schooling: an introduction. *ZDM*, *48*(6), 721-737.

Mangiante, J.-M. (2004). Rôle du lexique courant dans la structure de la démonstration mathématique. *Cahiers de l'APLIUT*, *23*(2), 71-80.

Mariotti, M.A. (2006). Proof and Proving in Mathematics Education. Dans A. Gutiérrez et P. Boero (Dir.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education Past, Present and Future*, 173-204. Sense Publishers.

Masselin, B. (2019). Étude du travail de l'enseignant autour de la simulation en classe de troisième et seconde: métamorphoses d'un problème au fil d'une formation en probabilité. [thèse de doctorat, Université Sorbonne Paris Cité].

Sierpinska, A. (2004). Research in mathematics education through a keyhole: Task problematization. *For the learning of mathematics*, *24*(2), 7-15.

Solomon, Y. (2006). Deficit or difference? The role of students' epistemologies of mathematics in their interactions with proof. *Educational Studies in Mathematics*, *61*, 373-393.

Tanguay, D. (2007). Learning proof: From truth towards validity. *Proceedings of the Xth Conference on Research in Undergraduate Mathematics Education (RUME)*, San Diego State University.

Tanguay, D., et Geeraerts, L. (2012). D'une géométrie du perceptible à une géométrie déductive: à la recherche du paradigme manquant. *Petit x*, *88*, 5-24.

Usiskin, Z. (1982). Van Hiele levels and achievement in secondary school geometry. [thèse de doctorat inédite]. University of Chicago.

Vandebrouck, F. (2020). Théorie de l'Activité en didactique des mathématiques. Dans M. Flores González, A. Kuzniak, A. Nechache et L. Vivier (Dir.), *Regards croisés sur le travail mathématique en contexte éducatif*, *Cahiers du laboratoire de didactique André Revuz,* (21), 43-54, IREM de Paris 7- Université Paris Diderot.

Vandebrouck, F., Robert, A., Rogalski, J., Abboud, M., Cazes, C., Chesnais, A., et Hache, C. (2013). Activités des élèves et pratiques des enseignants en classe de mathématiques. *Cahiers du laboratoire de didactique André Revuz*, (5), 1-147, IREM de Paris 7- Université Paris Diderot.

Venant, F., Tremblay, O., et Labrecque, A.-A. (2015). Le lexique au carrefour des mathématiques et du français: pistes pour travailler le vocabulaire courant et vocabulaire mathématique au primaire. *Bulletin AMQ*, *55*(3), 68-84.

TAREAS EMBLEMÁTICAS ADECUADAS: ESTUDIO DE LAS CARACTERÍSTICAS PARA SU DISEÑO

Darlis Panqueban, Carolina Henríquez-Rivas

Universidad Católica del Maule

La presente investigación se centra en el análisis de las características para el diseño de tareas emblemáticas adecuadas, la cual considera las condiciones de tareas emblemáticas definidas desde los ETM y las fases del diseño de buenas tareas. Se analiza el trabajo matemático de un profesor y un futuros profesor que resuelven una tarea, basado en un enfoque cualitativo. Se concluyen sobre el planteamiento de tareas emblemáticas que se pueden utilizar para la investigación y la formación del profesorado.

INTRODUCCIÓN

La investigación sobre el diseño de tareas en la educación matemática reconoce la importancia de las tareas en la enseñanza y en la formación de profesores (Adleff *et al.*, 2023). El estudio de Hiebert y Wearne (1993) señalan que el aprendizaje de los estudiantes está fuertemente influenciado por las tareas asignadas, ya que estas no solo proporcionan un enfoque específico, sino que también fomentan el desarrollo y aplicación de conceptos matemáticos y, su diseño moldea la interacción y comprensión de los estudiantes (Jones y Pepin, 2016). Este estudio se centra en el ciclo de diseño de buenas tareas planteado por Liljedahl *et al.* (2007) y la teoría de los ETM.

En cuanto a las tareas para la formación, estas permiten preparar a los futuros docentes para que adquirir el conocimiento necesario para enseñar matemáticas en el ámbito escolar (Zaslavsky, 2007). Además, tienen el potencial de facilitar el aprendizaje de las matemáticas e influir positivamente en la percepción hacia esta disciplina, así como en su enseñanza y aprendizaje (Thanheiser *et al.*, 2016). También, las tareas posibilitan alcanzar objetivos de aprendizaje específicos (Chin *et al.*, 2022), fomentar modos de pensamiento y facilitar la aplicación y comprensión de conceptos matemáticos (Jones y Pepin, 2016). Por ello, el estudio del diseño de tareas es de importancia para los estudiantes y los profesores.

Específicamente desde la teoría de los ETM, diversos autores han explorado el diseño de tareas en distintos dominios y niveles educativos. Por ejemplo, Henríquez-Rivas *et al.* (2023) analizan el trabajo matemático en torno a una tarea diseñada basada en conocimientos matemáticos y conceptos profesionales de administración para la Educación Técnico-Profesional en Chile. La investigación de Verdugo-Hernández y Espinoza-Vásquez (2023) analizan las tareas propuestas por un futuro profesor durante su práctica profesional. Por otra parte, Lagrange y Laval (2023) diseñan, implementan y evalúan una serie de tareas para determinar el ETM en estudiantes franceses.

En cuanto al diseño de tareas para la enseñanza, Manero *et al.* (2021) plantean que una tarea bien diseñada puede fomentar pensamientos de nivel superior. Además, permite

a los estudiantes decidir sus enfoques, evaluar sus respuestas y hacer visible su pensamiento mediante múltiples representaciones (Choy, 2016). En este sentido, Michal y Friedlander (2012) han desarrollado principios para el diseño de tareas, tales como el contenido matemático, el contexto, nivel de apertura estructural, representaciones y organizan una secuencia de tareas dentro de una actividad. Estos principios buscan abordar conceptos matemáticos específicos y desarrollar habilidades matemáticas en la educación escolar.

De lo anterior, sobre la importancia de tareas en matemática y su diseño, la pregunta que orienta esta investigación es: *¿Qué características se consideran en el diseño de tareas matemáticas adecuadas desde la teoría de los ETM?*

MARCO TEÓRICO

Tareas emblemáticas

Sobre las tareas en la teoría de los ETM, Kuzniak y Nechache (2016), definen el constructo *tareas emblemáticas*, como aquellas que pueden ser validadas mediante el análisis y la experimentación, debiendo cumplir tres condiciones de manera conjunta:

1) *La tarea debe estar disponible en el ETM de referencia*, es decir, debe contar con reconocimiento que valide su idoneidad para el desarrollo del trabajo matemático que se llevará a cabo con los estudiantes;

2) *Estar presente en el ETM idóneo*, lo que implica que deben ser tareas utilizadas en las clases ordinarias y en los libros de texto;

3) *La tarea debe permitir un trabajo matemático completo* y esta "debe definirse explícitamente en la investigación que las utiliza" (Kuzniak *et al.*, 2018, p. 527).

Diseño de buenas tareas

Desde la perspectiva del diseño de tareas, esta investigación adopta el planteamiento de Liljedahl *et al.* (2007), quienes proponen un ciclo para el diseño de *buenas* tareas matemáticas (las llamaremos tareas adecuadas) como "un proceso recursivo que se aplica tanto a la creación de tareas completamente nuevas como a la adaptación de tareas ya existentes" (p. 241). Este ciclo consta de cuatro fases:

1) En el *análisis predictivo*, se anticipan los posibles resultados en base al ETM y los efectos de la tarea antes de su implementación, identificando oportunidades y desafíos potenciales.

2) Después, se realiza la *aplicación* (*testing*) de la tarea con los participantes objetivos.

3) La fase de *análisis reflexivo* implica, entre otros aspectos, una revisión a posteriori de la tarea que ayuda a comprender que aspectos funcionan bien y cuáles no. Para estos efectos, en el estudio sobre procesos reflexivos, se considera a Valli (1997),

quien define la reflexión como es un proceso consciente y sistemático de pensamiento en el que una persona considera cuidadosamente lo que ha oído y visto con el objetivo de mejorar su comprensión y la práctica. Esto considera tres tipos de reflexión: técnica, en y sobre la acción, y practica o deliberativa.

4) Finalmente, en la fase de *ajuste*, se replantea la tarea con el objetivo de adaptarla a más posibilidades de éxito.

En el presente estudio, se propone analizar las características para el diseño de *tareas emblemáticas adecuadas*, la cual considera las condiciones de la tarea emblemática definida desde los ETM, en coordinación con las fases para su diseño adecuado.

En la Figura 1, se propone una relación entre el ETM y las fases para el diseño de tareas adecuadas, presentadas como un proceso cíclico o espiral que permite la revisión y mejora continua de las tareas diseñadas. Este ciclo contempla etapas en las que intervienen los investigadores y los participantes de la investigación (profesores, estudiantes). Además, se articulan los tipos de ETM y las condiciones de tareas emblemáticas con las fases del diseño de buenas tareas.

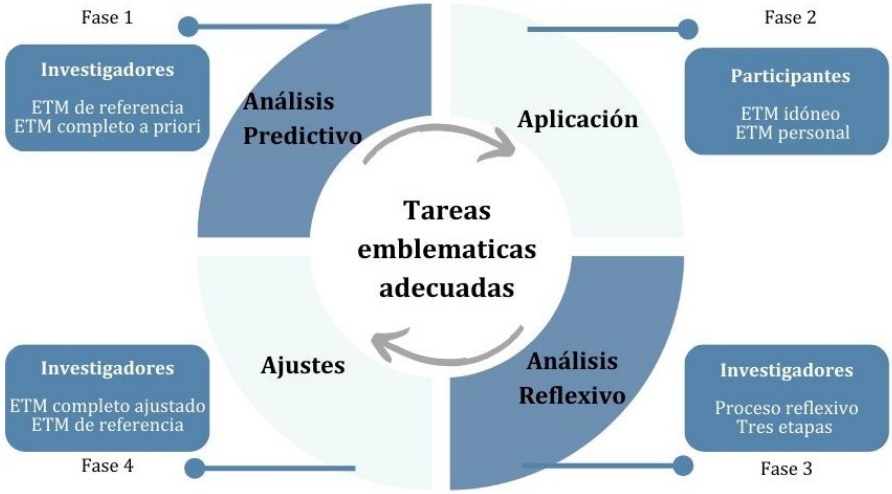


Figura 1: Esquema de condiciones de una tarea emblemática adecuada.
Fuente: elaborado por las autoras.

En particular, en la fase de análisis predictivo se realiza un análisis a priori del ETM completo de la tarea, tomando como base al ETM de referencia. En la fase de aplicación, la tarea se implementa con los participantes objetivos, que pueden ser estudiantes del nivel escolar o universitarios, futuros profesores o profesores en ejercicio, con lo cual se relaciona con el ETM idóneo o personal del participante. El análisis reflexivo, realizado por los investigadores, tiene como propósito ajustar y mejorar la tarea en la fase de ajustes.

METODOLOGÍA

Este estudio se basa en un enfoque cualitativo (Creswell y Creswell, 2018), con un diseño basado en el estudio de casos instrumental (Stake, 2007), dado que los participantes constituyen un instrumento para caracterizar el trabajo matemático de una tarea emblemática adecuada. Los casos nos permiten analizar singularidades en el trabajo matemático dados sus distintos niveles de experiencia en la resolución de tareas. Asimismo, la tarea propuesta permite analizar la coordinación de las condiciones de una tarea emblemática y las fases para el diseño de buenas tareas.

Contexto y selección de participantes

Los participantes corresponden a un futuro profesor de matemática y un profesor de matemática de secundaria. Al momento de la investigación, el futuro profesor se encuentra cursando el último año de su formación y el profesor de matemática cuenta con estudios de postgrados (maestría en educación matemática) y al menos 6 años de experiencia en la enseñanza de la matemática. Ambos participan de manera voluntaria y sin compensación de por medio. La tarea se aplicó de forma remota y al momento de la implementación se indicó que podían resolverla con o sin tecnología.

Recolección y análisis de datos

Las técnicas de recolección de datos cualitativas consideran las producciones escritas entregadas por los participantes al finalizar la tarea en la fase de ajuste. El análisis se fundamenta desde la teoría de los ETM y las fases del diseño de buenas tareas y, se utiliza la técnica de análisis de contenido (Mayring, 2000). Asimismo, se integran elementos de la metodología basada en el ETM (Kuzniak y Nechache, 2021), esto considera: 1) *Identificación de episodios de trabajo;* 2) *Descripción del trabajo;* 3) *Análisis de la circulación.* Con base en las descripciones del trabajo realizado, se analiza la circulación del ETM siguiendo un protocolo de análisis basado en ETM usado en investigaciones previas (e.g., Henríquez-Rivas y Verdugo-Hernández, 2023).

En la fase de análisis reflexivo, se siguen los tipos de reflexión planteados por Valli (1997), estructurados en preguntas (véase Tabla 1). Cabe señalar que, este estudio abarca el análisis predictivo, aplicación y análisis reflexivo en torno a una tarea.

En relación con las estrategias de triangulación (Denzin, 1978), se aplicó la triangulación del investigador, basada en la experiencia y formación de los autores. Este equipo incluye una doctora en didáctica de las matemáticas especialistas en el ETM, que se desempeña como formadora de profesores de matemáticas, y una estudiante de doctorado en didáctica de matemáticas.

Tipo de reflexión	Aspectos en que se centra	Características (adaptadas a una tarea)	Preguntas para la reflexión
Técnica	Instrucción y gestión	Analiza el desarrollo de las técnicas de resolución de una tarea. Se mide la eficiencia y la precisión del participante para resolver la tarea en función de la estrategia utilizada. La tarea, considera las habilidades del currículo nacional.	¿Qué aspectos específicos desarrolló la tarea en término del trabajo matemático completo?
En y sobre la acción		La reflexión sobre la acción hace referencia al pensamiento retrospectivo para anticipar la solución de futuros problemas. También, permite definir, redefinir, encuadrar, resolver, adoptar nuevos puntos de vista y aplicar nuevos conocimientos en el diseño de tareas. La reflexión en la acción reconoce el conocimiento tácito durante el diseño de una tarea.	¿Cuáles son las características de un trabajo matemático efectivo realizado por los participantes? ¿Qué aspectos relevantes se destacan en este trabajo matemático? ¿Qué dificultades surgieron? ¿Cómo se desarrolla el trabajo matemático entorno a los participantes? ¿Lo esperado en la fase de análisis predictivo coincide con lo efectivamente realizado por los participantes? ¿Qué similitudes, qué diferencias?
Práctica o deliberativa	Racionalización de las acciones desde el juicio personal	Integra múltiples perspectivas y fuentes de conocimiento en la toma de decisiones, considerando conocimientos específicos, profesores, estudiantes y contexto.	¿Para qué nivel educativo y contexto es adecuada la tarea? ¿Es coherente con los aspectos curriculares de ese nivel? ¿Por qué? ¿Qué limitaciones se pueden vislumbrar? ¿Qué cambiaría en función de lo realizado y de lo curricularmente aceptado? ¿se privilegia alguna génesis?

Tabla 1: Protocolo de análisis reflexivo basado en Valli (1997).
Fuente: elaborado y adaptado por las autoras.

RESULTADOS

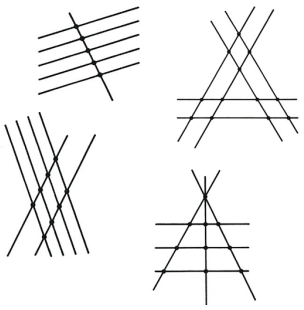
A continuación, se presenta la tarea estudiada. Primero, se muestran los resultados respecto a las fases de análisis predictivo y aplicación, considerando los tres elementos descritos en la sección metodológica: identificación de episodios, descripción del trabajo matemático y análisis de circulación. Posteriormente, se abordan las fases de análisis reflexivo y ajustes, de acuerdo con los tipos de reflexión: técnica, en y sobre la acción, y practica o deliberativa.

Presentación de la tarea

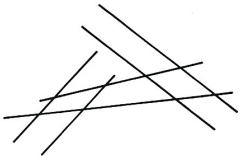
La tarea seleccionada, se denomina *Caminos que se cruzan* (Figura 2), la cual ha sido seleccionada y traducida al español, de una lista de tareas para olimpiadas matemáticas de estudiantes del Reino Unido. Esta tarea ha implementado en distintos cursos de formación de profesores en Chile. La tarea consta de una serie de tres subtareas (T1, T2, T3), que se muestran a continuación.

Situación 1: Caminos que se cruzan

En una comuna están elaborando la planificación de los caminos rurales de cierto sector. Se tiene presupuesto para generar seis caminos y se ha previsto poner señalética en cada intersección. La comisión asignada para la planificación ha propuesto algunas posibilidades. Observa las propuestas, ¿se produce la misma cantidad de intersecciones en cada caso?



Si los caminos se proyectan, ¿puedes encontrar todas las intersecciones que se producen?



T1. ¿Puedes dibujar otras planificaciones con 6 caminos?

T2. La comisión ha considerado que, a mayor número de intersecciones, más conectividad en el sector. ¿Cuál es el mayor número de intersecciones que tú puedes hacer? Justifica.

Figura 2: Tarea propuesta. Fuente: UK Math Trust (1996).

Análisis predictivo (fase 1): A continuación, se presenta el análisis predictivo de la tarea en función de la metodología basada en el ETM que considera: identificación de episodios (en adelante E1, E2, E3, …), descripción del trabajo matemático y análisis de circulación.

T1: Se identifica un episodio de trabajo. E1, *desarrollo de diferentes representaciones y configuraciones con seis rectas*. En este episodio, los participantes pueden crear diversas representaciones y configuraciones utilizado seis rectas de diferente tipo, de modo que se intercepten en distintos puntos, pudiendo encontrar entre 5 y 15 intercepciones. Se espera que en E1 se realicen construcciones y visualicen diferentes configuraciones geométricas, es decir, activación de la génesis semiótica.

T2: Se identifica dos episodios. E2, *identificación de configuraciones para diferentes números de rectas*. Y E3*, justificaciones de las configuraciones realizadas*. En E1, se requiere explorar y relacionar las configuraciones con el número de intersecciones obtenidas, que pueden variar entre 5 y 15 para 6 rectas. Además, se espera que justifiquen el procedimiento realizado. En E2, se anticipa que realicen diferentes construcciones geométricas con artefactos o sin artefactos, (plano [Sem-Dis]). En E3, se espera que activen elementos del referencial para justificar las construcciones, lo cual implica la activación de la del plano [Sem-Dis].

T3: Se identifican dos episodios. E4, *identificación de configuraciones de con variados números de rectas*. E5, *justificación de la relación entre las configuraciones y número de intersecciones*. En E4, se espera la creación de diferentes configuraciones con variadas cantidades de rectas y que relacionen el número de rectas con el número de intersecciones mediante la con la sucesión $a_n = \frac{n(n-1)}{2}$, con $a_n = a_{n-1} + (n-1)$ con $a_0 = 0$. Entonces, es esta subtarea se espera la activación de la génesis semiótica y discursiva, utilizando elementos del referencial como sucesiones.

Aplicación (fase 2): A continuación, se presenta un extracto del análisis del ETM en la fase de aplicación. Para ello, se muestra el ETM personal de uno de los participantes.

Análisis del futuro profesor (FP1)

En E1, FP1 realiza cuatro construcciones para configuraciones con 6 rectas, en las cuales utiliza diferentes tipos de rectas. En esta respuesta es posible observar que F1, realizó *diferentes representaciones para 6 configuraciones*, es decir activa la génesis semiótica.

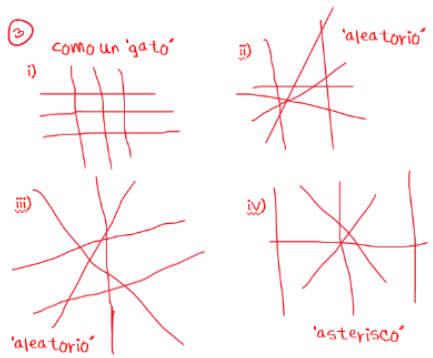


Figura 3: Evidencia del ETM personal de FP1.

En T2, se identifican los episodios en el análisis predictivo. E2, *representación de configuración para diferentes números de rectas* y E3, *justificaciones de las configuraciones realizadas*. FP1, realiza una única construcción para 6 rectas (E2), y en E3 plantea el número máximo se intersecciones para configuraciones con 2, 3, 4 y 6 rectas. En términos generales, sobre el ETM personal de FP1, se destaca que, predomina la génesis semiótica, la visualización y la construcción de una configuración geométrica (sin artefactos), a partir de la experimentación desde el dominio de geometría; es decir, el plano vertical privilegiado es [Sem-Ins].

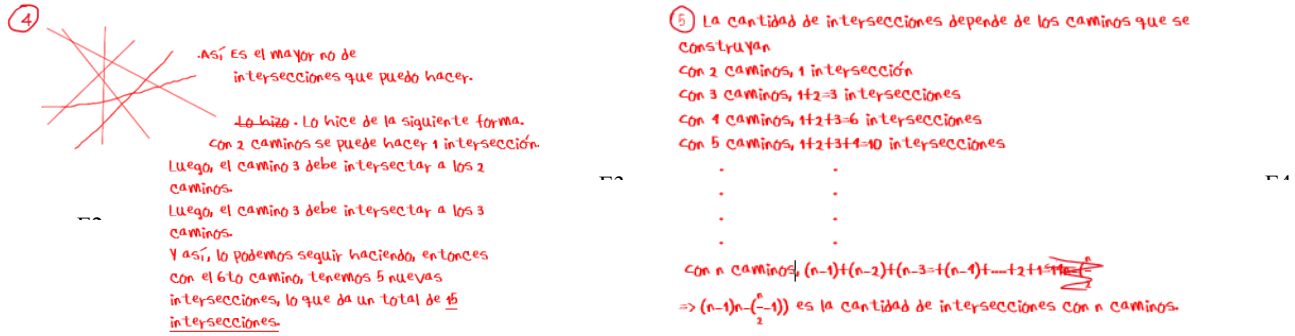


Figura 4: Evidencia del ETM personal de FP1.

En T3, solo se evidencia presencia de E5, *justificación de la relación entre las configuraciones y número de intercepciones*, para 2,3,4, 5… hasta n rectas, obteniendo $(n-1)n-\left(\frac{n}{2}-1\right)$ intersecciones. Finalmente, FP1 plantea una conclusión general (ver Figura 4), usando lenguaje natural y representaciones en el registro algebraico, lo cual implica que favorece el plano vertical [Sem-Dis]. Se observa en el ETM personal de FP1, un cambio de dominio de la geometría al análisis. No se presenta representaciones para cada una de las configuraciones mencionadas, por lo que no se construyen *configuraciones de con variados números de rectas*.

Análisis del profesor (F1)

En T1, se ha reconocido un episodio, *desarrollo de diferentes configuraciones con seis rectas*. La respuesta entregada por el P1 muestra cuatro construcciones con diferentes tipos de rectas que resultan en 8 y 9 intersecciones. En E1 predomina la génesis semiótica (ver figura 5), la visualización y la construcción de una configuración geométrica (sin artefactos), es decir, el plano vertical privilegiado es [Sem-Ins].

En T2, se identificaron dos episodios. E2, *desarrollo de configuraciones para diferentes números de rectas*. E3, *justificaciones de las configuraciones realizadas*. En E2, continúa con construcciones de una configuración geométrica acompañada de lenguaje natural y representaciones en el registro algebraico en E2 para justificar la construcción con elementos del referencial, lo cual implica que favorece el plano vertical [Sem-Dis].

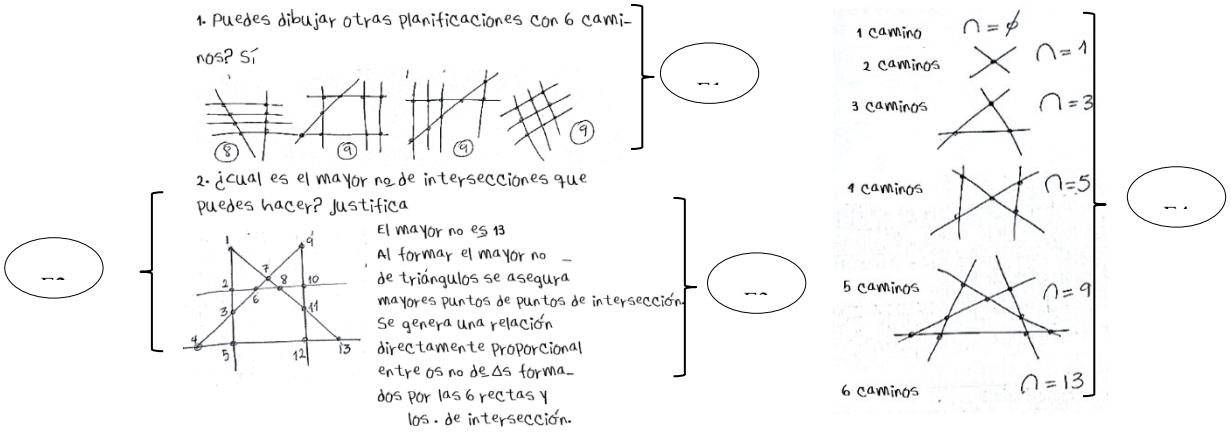


Figura 5: Evidencia del ETM personal de P1.

En T3, se detectaron previamente dos episodios: E4, *configuraciones de con variados números de rectas*. E5, *justificación de la relación entre las configuraciones y número de intersecciones.* En E4, se observa la visualización y construcción geométrica, predominando la génesis semiótica. No se presenta una *justificación de la relación entre las configuraciones y número de intercepciones,* por lo tanto no se utilizan elementos del referencial como sucesiones.

Análisis reflexivo y ajuste (fases 3 y 4):

Considerando las preguntas planteadas por los tipos de reflexión de Valli (1997), en esta sección se selecciona una pregunta por tipo de reflexión, estas son: ¿Qué aspectos específicos desarrolló la tarea en término del trabajo matemático completo? ¿Cómo se desarrolla el trabajo matemático entorno a los participantes? Y, ¿para qué nivel educativo es adecuada esta tarea?

En relación con las dos primeras preguntas, la tarea promueve el ETM completo; sin embargo, en la fase de aplicación predominó la génesis semiótica y una menor justificación de las construcciones realizadas, lo que indica poca activación de la génesis discursiva. Por ejemplo, el profesor no encontró el mayor número de intercepciones posibles dadas las condiciones de la tarea. En contraste, el futuro profesor mostró menos dificultades y movilizó todas las génesis del ETM, mientras que el profesor, a pesar de realizar diferentes construcciones, no logró alcanzar el máximo en ellas. Ambos participantes mostraron falta de motivación para utilizar herramientas tecnológicas como GeoGebra. Así, un posible ajuste de la tarea podría ser promover la génesis discursiva y la utilización de herramientas tecnológicas.

Respecto a la tercera pregunta, esta tarea puede ser implementada en el nivel de séptimo básico del sistema educativo chileno. Según el MINEDUC (2016), se espera que los estudiantes puedan "representar y ejemplificar utilizando analogías, metáforas y situaciones familiares para resolver problemas" (p. 25) y "construir objetos geométricos de manera manual y/o con software educativo líneas, como las perpendiculares, las paralelas, las bisectrices y alturas en triángulos y cuadriláteros" (p. 26). También, la tarea se podría adaptar para la formación de profesores alineándose

con el objetivo de "identifica(r) conocimientos y habilidades necesarios para abordar la resolución de problemas geométricos" (CPEIP, 2012, p. 117).

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

Este estudio analiza las características de las tareas emblemáticas *adecuadas* según los criterios de Kuzniak y Nechache (2016) y el diseño de *buenas* tareas matemáticas de Liljedahl *et al.* (2007). Para ello, la implementación de la tarea se realizó con un profesor y un futuro profesor de forma remota, permitiendo a los participantes resolverla con o sin uso tecnología, según su elección. En este sentido, ambos participantes optaron por resolver sin utilizar tecnología y un escaso razonamiento discursivo. El uso de las condiciones de una tarea emblemática adecuada sintetizadas en el esquema de la Figura 1, se plantea como un aporte en la línea del diseño de tareas.

Una limitación del estudio podría estar vinculado con la recolección de los datos, pues se puede considerar otros mecanismos, a fin de ahondar en el trabajo matemático de los participantes. Además, puede ser beneficioso ampliar la cantidad de participantes estudios, lo que enriquecería los análisis del ETM y los procesos reflexivos realizados por los investigadores.

A modo de proyección, la Teoría de Situaciones Didácticas (Brousseau, 1997) ofrece un marco de referencia que podría ser útil para analizar futuras implementaciones en entornos presenciales y de interacción docente-estudiantes, permitiendo observar el trabajo matemático al resolver una tarea y la construcción de conocimiento. Por otro lado, la Ingeniería Didáctica (Artigue, 1996), podría permitir evaluar cómo las tareas evolucionan tras su implementación y qué ajustes para potenciar su eficacia didáctica. Asimismo, estudios futuros podrían profundizar en las cuatro fases de tareas adecuadas, considerando las etapas reflexivas y de ajustes a la tarea como un proceso cíclico de mejora continua. Así como también, tareas en otros dominios matemáticos. Finalmente, este estudio ofrece un insumo teórico y metodológico para futuras investigaciones sobre el diseño de tareas sustentadas en la teoría de los ETM.

Agradecimiento

Las autoras agradecen el financiamiento al Proyecto Fondo Nacional de Desarrollo Científico y Tecnológico de Chile, Fondecyt de Iniciación año 2023, Folio 11230523. Y la Beca Doctorado Nacional, Folio 21240197.

REFERENCIAS

Adleff, A. K., Ross, N., König, J., & Kaiser, G. (2023). Types of mathematical tasks in lower secondary classrooms in Germany: Statistical findings from a latent class analysis based on general mathematical competencies. *Educational Studies in Mathematics*. https://doi.org/10.1007/s10649-023-10254-9

Artigue, M (1996). Ingénierie didactique. En Artigue, M. Brousseau, G. Brun, J. Chevallard, Y. Conne, F. & Vergnaud, G. (Eds.), *Didactique des mathématiques* (pp. 243-274). París, Francia: Textes de base en pédagogie.

Brousseau, G. (1997). *Theory of Didactical Situations in Mathematics*. Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Chin, S. L., Choy, B. H., & Leong, Y. H. (2022). Overlaps and shifts of instructional goals in the design of a set of mathematics tasks. *Mathematics Education Research Journal*, *34*(3), 523-549. https://doi.org/10.1007/s13394-022-00425-x

Choy, B. H. (2016). Snapshots of mathematics teacher noticing during task design. *Mathematics Education Research Journal*, *28*(3), 421-440. https://doi.org/10.1007/s13394-016-0173-3

Creswell, J. W., & Creswell, D. J. (2018). *Research Design: Qualitative, Quantitative, and Mixed Methods Approaches* (5ta ed.). Sage Publications.

Denzin, & Norman K. (1978). *The Research Act: A Theoretical Introduction to Sociological Methods*. McGraw-Hill.

Henríquez-Rivas, C., & Verdugo-Hernández, P. (2023). Design of tasks in the initial training of mathematics teachers that involve the representations of a function. *Educación Matemática*, *35*(3), 178-208. https://doi.org/10.24844/EM3503.06

Henríquez-Rivas, C., Verdugo-Hernández, P., & Valenzuela-Barrera, Y. (2023). Mathematical work of students in technical-professional education in an interdisciplinary context. *Uniciencia*, *37*(1), 1-24. https://doi.org/10.15359/ru.37-1.25

Hiebert, J., & Wearne, D. (1993). Instructional Tasks, Classroom Discourse, and Students' Learning in Second-Grade Arithmetic. *American Educational Research Journal Summer*, *30*(2), 393-425. http://aerj.aera.netDownloadedfrom

Jones, K., & Pepin, B. (2016). Research on mathematics teachers as partners in task design. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *19*(2-3), 105-121. https://doi.org/10.1007/s10857-016-9345-z

Kuzniak, A., Derouet, C., & Henríquez, C. (2018). Tâches emblématiques dans l'étude des etm idoines et personnels : existences et usages. *Sixth ETM Symposium*, 525-528.

Kuzniak, A., & Nechache, A. (2016). Tâches emblématiques dans l'étude des etm idoines et personnels : existences et usages. *Fifth ETM Symposium*, 145-155.

Kuzniak, A., & Nechache, A. (2021). On forms of geometric work: a study with pre-service teachers based on the theory of Mathematical Working Spaces. *Educational Studies in Mathematics*, *106*(2), 271-289. https://doi.org/10.1007/s10649-020-10011-2

Lagrange, J. B., & Laval, D. (2023). Connecting algorithmics to mathematics learning: a design study of the intermediate value theorem and the bisection algorithm. *Educational Studies in Mathematics*, *112*(2), 225-245. https://doi.org/10.1007/s10649-022-10192-y

Liljedahl, P., Chernoff, E., & Zazkis, R. (2007). Interweaving mathematics and pedagogy in task design: A tale of one task. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *10*(4-6), 239-249. https://doi.org/10.1007/s10857-007-9047-7

Manero, V., Muñoz-Escolano, J. M., & Oller-Marcén, A. M. (2021). Diseño e implementación de tareas de alta demanda cognitiva basadas en la sucesión look and say. *Avances de Investigación En Educación Matemática*, *20*, 161-183.

Mayring, P. (2000). Qualitative Content Analysis. *Forum Qualitative Sozialforschung Forum: Qualitative Social Research*, *1*(2), 1-10. https://doi.org/10.17169/fqs-1.2.1089

Michal, T., & Friedlander, A. (2012). Five Considerations in Task Design: The Case of Improving Grades. *Investigations in Mathematics Learning*, *4*(3), 32-49. https://doi.org/10.1080/24727466.2012.11790315

Stake, R. E. (n.d.). *Investigación con estudio de casos* (4ta ed.). Morata.

Thanheiser, E., Olanoff, D., Hillen, A., Feldman, Z., Tobias, J. M., & Welder, R. M. (2016). Reflective analysis as a tool for task redesign: The case of prospective elementary teachers solving and posing fraction comparison problems. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *19*(2-3), 123-148. https://doi.org/10.1007/s10857-015-9334-7

UK Math Trust (1996). *Junior Mathematical Olympiad. Preparing for the challenge*. UKTM

Valli, L. (1997). Listening to other voices: A description of teacher reflection in the United States. *Peabody Journal of Education*, *72*(1), 67-88. https://doi.org/10.1207/s15327930pje7201_4

Verdugo-Hernández, P., & Espinoza-Vásquez, G. (2023). El desarrollo de habilidades en el trabajo matemático: el caso de Lucas, un futuro profesor de matemática, en su práctica profesional. *Uniciencia*, *37*(1), 1-23. https://doi.org/10.15359/ru.37-1.10

Zaslavsky, O. (2007). Mathematics-related tasks, teacher education, and teacher educators. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *10*(4-6), 433-440. https://doi.org/10.1007/s10857-007-9060-x

SIMILITUDE, HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES ET ESPACE DE TRAVAIL MATHÉMATIQUE EN GÉOMÉTRIE PERSONNELLE DES ÉLÈVES DU COLLÈGE

Konstantinos Nikolantonakis[43,1], Polymnia Andreadou[2]

[1]Université de la Macédoine Occidentale, [2]Education Elémentaire en Grèce

Cette étude porte sur 21 élèves de troisième année de collège durant l'année scolaire 2020-2021, dans l'unité "Triangles semblables". L'intervention didactique, conçue selon l'Espace de Travail Mathématique pour la Géométrie (ETM_G), utilisait sept fiches de travail avec des problèmes historiques de mathématiques. Les élèves, en groupes, ont construit et utilisé l'outil historique d'Errard pour mesurer une distance inaccessible. L'objectif était de voir comment l'intégration de l'histoire des mathématiques, dans le cadre de l'ETM_G, influence leur compréhension des triangles semblables. L'analyse des réponses a montré que cette approche a stimulé les élèves, créé un climat positif et enrichi leur espace de travail personnel, favorisant une réflexion approfondie dans la résolution de problèmes, contrairement aux activités du manuel scolaire.

INTRODUCTION

Piaget (1971) affirme que les enfants ont une perception innée de la stabilité de la forme d'un objet malgré les changements de taille de ses côtés. En effet, on peut observer la similitude des formes dans divers aspects de la vie quotidienne, ce qui familiarise les enfants dès leur plus jeune âge. L'agrandissement ou la réduction des formes, les constructions à l'échelle, la mesure des distances inaccessibles, ou encore l'utilisation de la perspective par les peintres ou les designers pour représenter un objet tridimensionnel sur un plan sont autant d'exemples d'application du concept de similitude.

Cependant, il est également vrai que le concept de similitude des formes, notamment celui des triangles, pose des difficultés aux élèves de troisième année du collège. Ils confondent souvent la similitude avec l'égalité et ont du mal à saisir sa nature dynamique, où les angles restent constants tandis que les côtés changent proportionnellement (Mastrogiannis et Kordaki, 2006 ; Kospentaris & Spyrou, 2005). Dans ce travail, nous chercherons à aborder la similitude des triangles sous un angle historique. L'objectif est que les élèves comprennent le sens et l'utilité du concept, notamment la constance du rapport entre les côtés correspondants des triangles similaires. Ils résoudront des problèmes historiques et construiront un outil pour mesurer des distances inaccessibles afin d'expérimenter cette propriété particulière par

[43] Je tiens à remercier l'Université de Macédoine occidentale qui a pris en charge une partie des frais liés à ma participation à ce symposium.

eux-mêmes. L'objectif était d'explorer comment l'intégration de l'Histoire des Mathématiques dans l'Espace de Travail Mathématique en Géométrie impacte la compréhension des triangles similaires par les élèves.

HISTOIRE DE LA SIMILITUDE

Vers 600 av. J.-C., Thalès de Milet (624-547 av. J.-C.) a exploré des concepts géométriques, tels que la mesure de la distance d'un navire depuis la côte et la hauteur d'une pyramide en utilisant des bâtons (gnomons) et leurs ombres, en exploitant les rapports des triangles semblables (Katz, 2013; Tsimbourakis, 2002). Eudoxe de Cnide (408-355 av. J.-C.) a établi la théorie géométrique de la similitude trouvée dans le Livre VI des *Éléments* d'Euclide. Il a défini le rapport et la proportion, prouvant divers théorèmes sur les proportions dans le Livre V (Katz, 2013). Euclide a utilisé les rapports de grandeurs dans le Livre V et les rapports numériques dans le Livre VII. Son œuvre *Optique* inclut également des conclusions basées sur les propriétés des formes similaires, se concentrant sur les principes géométriques de la vision (Katz, 2013). Aristarque de Samos (320-250 av. J.-C.) a appliqué le concept des triangles semblables pour calculer les rapports de distance Terre-Lune et Terre-Soleil (Tsimbourakis, 2002). Héron d'Alexandrie (1er siècle ap. J.-C.) a utilisé les triangles semblables pour des mesures indirectes de distances et de hauteurs dans son œuvre *Dioptra*, détaillant des calculs pour la hauteur des tours, les distances entre des points inaccessibles, et les profondeurs des vallées (Katz, 2013). Du IIIe au IIe siècle av. J.-C., des instruments comme la dioptra de Héron étaient utilisés pour mesurer avec précision les distances horizontales et verticales en utilisant des triangles semblables. L'aqueduc de Samos, construit par Eupalinos entre 530-520 av. J.-C., a utilisé des triangles semblables pour assurer une pente constante lors de l'excavation de son tunnel (Tsimbourakis, 2002) selon l'analyse de Héron d'Alexandrie.

Le premier traité mathématique en Chine, le *Classique mathématique du Gnomon de Zhou* (100 av. J.-C. - 100 ap. J.-C.), incluait des résultats sur le théorème de Pythagore et utilisait les propriétés des triangles semblables pour mesurer des distances inaccessibles (Loder, 2010; Katz, 2013). L'un des problèmes abordés dans ce livre consiste à calculer la profondeur d'un puits (mesurée à partir de la surface de l'eau) de diamètre connu et, en élevant une tige jusqu'au bord du puits, à déterminer la profondeur de l'eau. *Les Neuf Chapitres sur l'Art Mathématique*, un autre ouvrage important, contenait 246 problèmes. Liu Hui a ajouté des problèmes plus complexes, formant le *Manuel Mathématique de la Mer* (Katz, 2013). Il se compose de neuf problèmes dont l'un calcule la hauteur et la distance d'une île, un autre la hauteur d'un arbre et la largeur d'une rivière.

Pendant la Renaissance, le concept de similitude était crucial dans le développement de la géométrie de la perspective. Filippo Brunelleschi a été un pionnier dans cette étude, tandis que Leon Battista Alberti a écrit le premier texte sur le sujet, *Della Pittura*, démontrant comment les carrés au sol peuvent être représentés sur une toile en utilisant des triangles semblables (Katz, 2013). Jean Errard de Bar-le-Duc, un ingénieur

français, a décrit la construction d'un instrument pour mesurer des distances inaccessibles en utilisant des triangles semblables dans son œuvre de 1594 *La géométrie et pratique générale d'icelle*.

ELEMENTS DE LA RECHERCHE

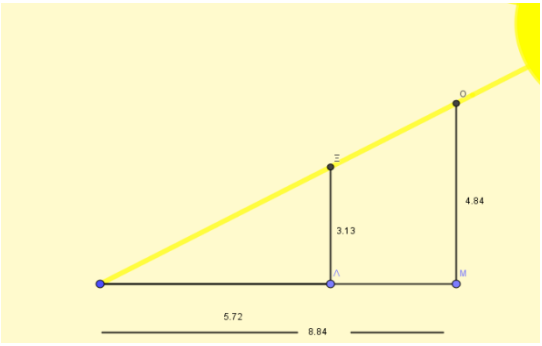
Les questions de recherche posées sont : Comment la création et l'utilisation par les étudiants d'un outil historique, ainsi que la résolution de problèmes historiques des époques différentes, influencent-ils la compréhension des triangles semblables et du critère de similarité ? Dans quelle mesure les étudiants répondent-ils, dans leur propre espace mathématique personnel, à l'interaction entre les trois genèses verticales de ETM_G ?

L'échantillon de l'étude comprenait 21 élèves de troisième année du collège, dont onze filles et dix garçons, élèves de l'institution de la chercheuse.

Pour collecter les données, sept feuilles de travail ont été utilisées, accompagnées d'observations pendant l'intervention, ainsi qu'un test final pour évaluer la maîtrise des nouveaux concepts par les élèves. Les feuilles de travail étaient conçues selon la théorie de l'ETM_G pour enrichir l'environnement d'apprentissage des étudiants (ETM idoine) et encourager l'interaction entre les différents niveaux (Kuzniak *et al.*, 2016a; Kuzniak *et al.*, 2016b). Chaque feuille de travail incluait des problèmes par l'histoire des mathématiques liés à la similitude des triangles, afin d'explorer leur impact sur la compréhension des concepts par les étudiants. De plus, une feuille de travail comportant une source historique authentique a été fournie aux étudiants pour les aider à construire un outil historique d'Errard pour la mesure des distances inaccessibles.

L'ETM_G IDOINE – RESULTATS DE L'INTERVENTION DIDACTIQUE

La première fiche de travail pratique se composait de deux activités collaboratives en binômes. L'objectif de la première activité était de permettre aux étudiants de définir les triangles semblables en utilisant un cadre de travail adéquat. Pour cela, un fichier GeoGebra sur les gnomons et leurs ombres a été utilisé comme outil principal. Les étudiants ont d'abord exploré le niveau sémiotique-discursif, en examinant un diagramme et un texte pertinent pour vérifier l'affirmation de Thalès selon laquelle des gnomons multiples ont des ombres multiples. Ensuite, en tirant parti de l'environnement dynamique de GeoGebra, ils ont calculé le rapport entre le gnomon et son ombre à plusieurs reprises. Cela leur a permis de passer de la dimension instrumentale à la dimension discursive en formulant la définition des triangles semblables, générant ainsi des discussions entre eux sur leurs résultats.



Un dialogue représentatif sur les trois rapports des côtés correspondants des triangles la première fois qu'ils les ont calculés était :

Mina : Qu'avez-vous trouvé ?

Tatiana : 1,3 à chaque fois.

Mina : Nous avons trouvé 1,64. Quel est le bon ?

Tatiana : Étant donné que ΞΛ est dans une position différente... il est logique que nous trouvions quelque chose de différent.

Mina : Quel est le bon ?

Professeur : Que disent les autres ? (Seuls deux équipes étaient arrivées à ce stade, donc elles ont répondu)

Hero : Nous avons trouvé 1,68.

Nikos : Et nous 1,99 et les trois côtés égaux.

Mina : Nous trouvons tous quelque chose de différent, mais les trois rapports sont égaux à chaque fois.

Professeur : Très bien, Mina....

Sur dix équipes, sept ont réussi à effectuer correctement la procédure et à obtenir l'égalité des rapports. Deux équipes ont commis des erreurs de calcul et n'ont pas trouvé les trois rapports égaux, mais ont corrigé leurs erreurs après discussion avec leurs camarades. Une seule équipe n'a pas pu commencer l'expérience dans la dimension instrumentale, car leur travail dans la dimension sémiotique n'avait pas été correctement mené, rendant difficile la compréhension de la nécessité de calculer les rapports des côtés.

Le problème initial de cette première activité, visant à vérifier l'affirmation de Thalès, a posé des défis considérables[44]. Seulement quatre équipes sur dix ont fourni la réponse correcte. Une équipe a répondu que les ombres et les gnomons doivent être calculés, une autre a mentionné l'importance de mesurer les baguettes multipliées, une troisième a parlé de trouver les ombres, et trois équipes n'ont pas répondu du tout. Parmi ces

---

[44] Thalès de Milet (640-546 av. J.-C.) aurait utilisé les ombres des gnomons (les gnomons sont des tiges de différentes tailles) en astronomie et en géométrie. Son étude des gnomons a dû l'amener à la conclusion suivante : « Plusieurs gnomons à la même heure du jour projettent des ombres multiples », c'est-à-dire que si une tige est deux fois plus longue que l'autre, l'ombre de la première tige sera également deux fois plus longue que l'ombre de la seconde.

Activité 1 (problème initial) Dans le fichier Helios1.ggb, nous pouvons observer la conclusion de Thalès. Dans la figure, vous voyez deux gnomons, ΞΛ et OM, et leurs ombres ΛΔ et MΔ respectivement. Que devons-nous calculer pour vérifier l'affirmation de Thalès ?

dernières, une équipe n'a pas complété les rapports des côtés dans la seconde partie de l'activité. Ces étudiants n'ont pas réussi à interpréter correctement le texte initial et à le combiner avec le diagramme fourni, ce qui a entravé leur progression dans le processus de genèse sémiotique et leur a posé des difficultés pour passer à la genèse discursive et développer un raisonnement correct.

L'objectif de la deuxième activité était de clarifier les différences entre les triangles égaux et semblables, car les étudiants distinguent souvent plus facilement l'égalité que la similitude (Parastuti *et al.*, 2018). On leur a donc demandé de construire, à l'aide d'outils géométriques, un triangle égal et un autre semblable à un triangle donné, et de décrire le processus de construction. Cette activité impliquait d'abord un travail au niveau sémiotique-instrumental, puis une transition vers la genèse discursive pour décrire le processus en utilisant les définitions des triangles semblables et égaux.

La majorité des élèves ont progressé facilement au niveau sémiotique-instrumental, réussissant à construire les triangles demandés. Trois couples ont construit un triangle semblable avec des côtés doublés, tandis que quatre autres ont construit un triangle avec des côtés de la moitié de la taille de l'original. Deux couples ont utilisé l'addition au lieu de la multiplication, l'un construisant un triangle avec des côtés augmentés de 2 cm et l'autre ayant commencé une construction similaire mais non terminée. Ces élèves n'ont pas utilisé correctement la définition des triangles semblables pour travailler au niveau instrumental-sémiotique.

Passer à la genèse discursive pour décrire le processus de construction s'est avéré difficile pour de nombreux élèves. Seuls douze d'entre eux ont réussi à développer un syllogisme approprié. Trois couples, malgré avoir construit les triangles demandés, n'ont pas pu décrire le processus faute de mots adéquats. Deux autres couples ont fourni une description très brève, indiquant leur méthode générale sans détailler les étapes précises suivies.

Dans la deuxième fiche de travail, deux activités ont été incluses. L'objectif de la première était de clarifier aux élèves que dans le concept de similitude des triangles, l'important est la constance du rapport des côtés homologues et l'égalité des angles correspondants, pas la position relative des triangles dans le plan ou l'espace. On a demandé aux élèves de construire une paire de triangles semblables dans le plan et un dans l'espace, sans utiliser d'instruments géométriques. Ils ont donc dû utiliser la définition des triangles semblables comme outil théorique et, en se déplaçant entre la genèse instrumentale et sémiotique, parvenir à la conception de triangles.

Après avoir discuté si les triangles devaient être rectangles ou si l'un devait être contenu dans l'autre, ils ont travaillé avec succès dans la dimension sémiotique et tous ont donné la forme requise sur le plan. Un dialogue caractéristique était le suivant :

Antonis : Que veux-tu dire par "contenu" ?

Hero : Que l'un soit à l'intérieur de l'autre... comme ceux qui ont des ombres.

Antonis : Ceux-là étaient des triangles droits. Voulons-nous construire des triangles droits ici ?

Tatiana : Pas seulement des triangles droits.

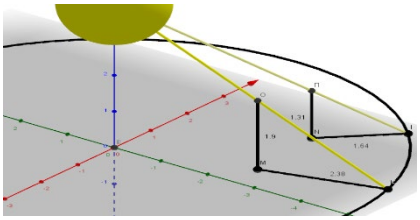
Professeur : Oui, ce n'est pas nécessaire qu'ils soient des triangles droits.

Hero : Ni que l'un soit contenu dans l'autre.

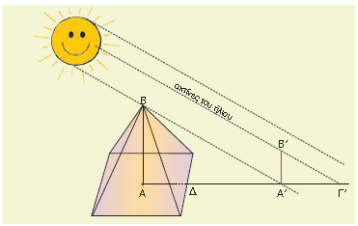
Antonis : Il doit être contenu pour donner l'impression que l'un est plus grand.

Hero : Il semblera toujours que les côtés sont doubles ou triples.

Cependant, il n'en était pas de même pour la conception de triangles semblables dans l'espace. Étant donné que les élèves ne sont pas familiers avec les formes en trois dimensions, ils n'ont pas pu imaginer la forme et accomplir la tâche dans la dimension sémiotique. En fait, ils ont posé des questions telles que *Que veux-tu dire par dans l'espace » ? Ce ne sera pas la même chose ?* ou *Allons-nous le faire en trois dimensions, alors ?* Seuls deux élèves ont dessiné avec succès le couple requis de triangles semblables. Dans la deuxième activité, les élèves ont de nouveau expérimenté avec un fichier GeoGebra 3D, qu'ils ont utilisé comme outil pour formuler le critère de similitude des triangles. Tous, facilement, se sont déplacés initialement dans le plan instrumental - sémiotique, observant la constance du rapport des côtés homologues et l'égalité des angles correspondants, et sont arrivés à la dimension discursive en créant le critère de similitude.

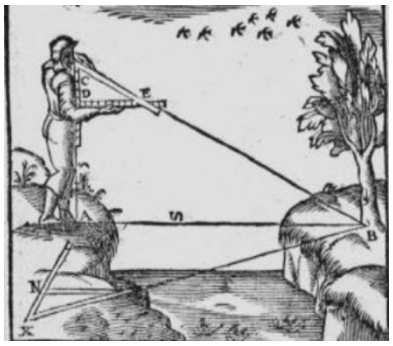


Dans la troisième fiche de travail, les élèves ont travaillé sur le problème historique bien connu de mesurer la hauteur de la pyramide de Thalès. Cette activité avait deux objectifs : d'une part, que les élèves comprennent l'utilité du concept de triangles semblables dans la mesure de distances inaccessibles et, d'autre part, qu'ils appliquent le critère de similitude qu'ils ont appris avec l'égalité des rapports des côtés homologues des triangles semblables. Initialement, les élèves ont été invités à se déplacer dans le niveau sémiotique - discursif et à décrire comment Thalès avait réussi à mesurer la hauteur de la pyramide. Ensuite, ils se sont vu donner quelques dimensions et ont été invités à calculer la hauteur mentionnée précédemment. Tous, en utilisant comme outils théoriques le critère de similitude et l'égalité des rapports des côtés homologues, ont travaillé avec succès au niveau instrumental - sémiotique et ont calculé la hauteur de la pyramide. Cependant, seuls onze d'entre eux ont réussi à passer avec succès à la dimension discursive et à décrire le processus suivi par Thalès pour mesurer la hauteur. Le reste a rencontré des difficultés dans la dimension discursive. Ils n'ont pas réussi à passer de la genèse sémiotique à la discursive, mais sont directement passés à l'instrumental. Il leur a été plus facile d'appliquer l'égalité des rapports dans le diagramme donné et de calculer la hauteur demandée. Ils ont considéré que s'ils effectuaient les calculs et



calculaient la hauteur inconnue, alors ils répondraient également à la question sur la description du processus.

Sur la quatrième fiche de travail, les élèves ont étudié un extrait du livre de l'ingénieur français Jean Errard *La géométrie et pratique générale d'icelle*, sur la construction d'un instrument pour mesurer des distances inaccessibles et comment cette mesure était réalisée. L'objectif était que les élèves réfléchissent sur des aspects de la vie quotidienne, principalement en étudiant les images du livre, dans lesquelles l'utilisation d'un instrument similaire pourrait être appliquée, et qu'ils réfléchissent également à sa construction. Bien sûr, le texte a attiré l'intérêt des élèves, qui ont travaillé avec succès au niveau instrumental - sémiotique, et après avoir compris l'extrait, ils ont conçu un instrument similaire à celui décrit dans le livre. Un dialogue caractéristique est le suivant, qui fait référence à la Figure.



Professeur : Et comment dis-tu qu'ils ont mesuré la distance sur cette image que tu mentionnes, Tatiana ?

Antonis : Avec l'instrument qu'il tient.

Professeur : Oui, mais comment ? De quelle manière ?

Minas : Un triangle se forme.

Hero : Ce sont deux triangles.

Professeur : Quels triangles sont-ils ?

Johana : Des triangles droits.

Professeur : Et entre eux, quelle relation ont-ils ?

Antonis : L'un est à l'intérieur de l'autre comme ceux que nous avons faits avec les ombres.

Hero : Ils sont semblables. Ils ont l'angle supérieur commun.

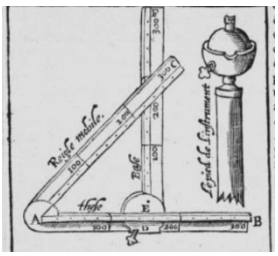
Professeur : Comment cette conclusion nous aide-t-elle ?

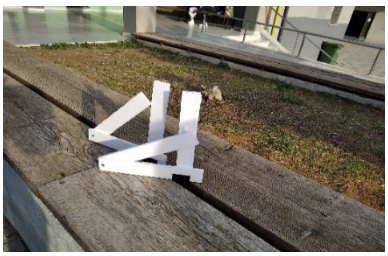
Nikos : Connaissons-nous les côtés du petit triangle ?

Professeur : Qu'en disent-ils ? ..... Relis la description de l'instrument.

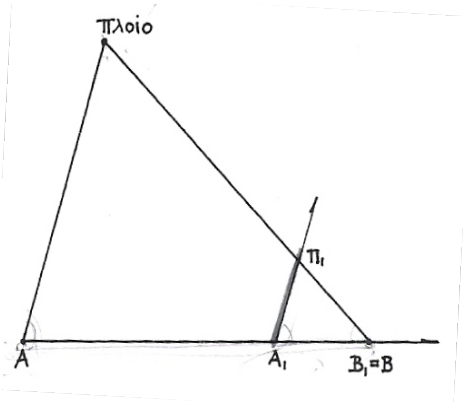
Evangelia : Oui, nous les connaissons car c'est l'instrument....., donc nous trouverons les rapports et nous trouverons la distance.

Sur la cinquième fiche de travail, des instructions ont été données aux élèves pour la construction de l'outil d'Errard dans le but qu'ils les suivent correctement et activent leur créativité pour le construire. Les élèves ont été divisés en cinq groupes et en travaillant avec succès sur la genèse instrumentale, ils ont réussi à construire l'outil.





Immédiatement après, les élèves ont été invités à mesurer, à l'aide de l'outil qu'ils avaient construit, une hauteur inaccessible de leur choix dans le gymnase de l'école. Bien sûr, après avoir terminé les mesures, ils devaient transférer la situation réelle sur papier en faisant un dessin qui les aiderait à calculer la hauteur désirée. Cependant, les élèves ont rencontré des difficultés la première fois à travailler dans la dimension sémiotique. La transition de l'espace réel au papier était impossible, donc ils n'ont pas atteint le niveau de visualisation et n'ont donc pas pu avancer vers la genèse discursive. Bien qu'ils aient utilisé l'outil pour visualiser, ils ne pouvaient pas se rappeler exactement ce qu'ils devaient mesurer, comme le montre le dialogue suivant



Tatiana : Nous devrions avoir deux triangles... droits.

Nikos : Oui, comme dans le livre... le français.

Socrate : Oui, mais là l'instrument n'était pas montré grand.

Professeur : Souvenez-vous de la dernière image, qui ressemble à ce que nous allons faire.

Hero : Oh, oui, je me souviens... compris.

Hero : D'abord, nous ferons le triangle à partir de l'instrument...

Minas : Et ensuite le grand... là où il regarde.

Ainsi, les élèves ont eu le temps en classe de revoir l'outil qu'ils avaient construit et, surtout, de se rappeler comment mesurer une hauteur inaccessible avant de retourner au gymnase. La deuxième fois, ils ont correctement effectué les mesures avec l'outil, et il y avait satisfaction avec le résultat. Ils sont passés de la genèse instrumentale à la sémiotique sans aucun problème particulier, car ils ont réussi à transférer la situation réelle sur une forme sur papier. Ensuite, ils ont justifié avec succès la similitude des triangles en utilisant le critère de similitude et sont immédiatement passés au niveau instrumental-discursif en utilisant la relation des côtés correspondants comme outil théorique pour calculer la hauteur requise.

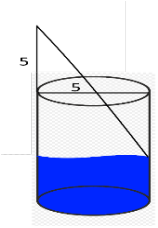
Dans le dernier fiche de travail, trois problèmes historiques ont été inclus. L'objectif ici était que les élèves pratiquent l'application du critère de similitude et de la relation de proportionnalité des côtés. De plus, ils devaient comprendre l'importance du concept de triangles similaires dans la vie quotidienne de personnes de différentes cultures et époques.

Le premier problème portait sur la mesure de la distance d'un navire depuis le port, réalisée par Thalès. Dans la première question sur la description de la résolution du problème, seule la moitié des élèves ont répondu correctement. Ils sont facilement passés à la genèse sémiotique-discursive et ont justifié, à travers la similitude des triangles, le calcul de la distance demandée. Quatre élèves ont correctement décrit la

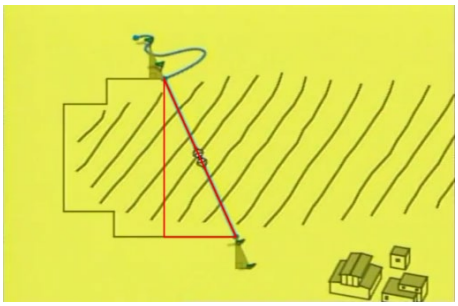
procédure suivie par Thalès, mais pour démontrer que les triangles du schéma étaient similaires, ils ont simplement dit qu'il *semble que l'un soit un agrandissement de l'autre*. Ici, nous voyons qu'ils ont compris le schéma, mais ont eu du mal à fournir une justification verbale correcte basée sur la théorie. Leur transition vers la genèse discursive a échoué. Un élève a même répondu qu'un triangle aurait des côtés doubles ou triples par rapport à l'autre, montrant qu'il comprenait la relation de proportionnalité des côtés mais ne pouvait pas appliquer le critère de similitude. Dans la deuxième question, où ils devaient calculer la distance eux-mêmes, 17 sur 21 élèves ont mesuré le segment A_1B avec une règle puis ont écrit la relation de proportionnalité entre les côtés et trouvé la longueur inconnue. Autrement dit, ils ont pu utiliser la règle et la relation de proportionnalité des côtés comme outils pour travailler avec succès dans la genèse instrumentale - sémiotique.

Les trois élèves qui n'ont pas correctement résolu le problème ont eu du mal à comprendre quels segments ils devaient mesurer eux-mêmes, donc ils n'ont mesuré que la distance ΑΠ et ont donné cette mesure comme réponse. Le dernier n'a pas pu écrire l'égalité de rapports correcte à cause de cela. Ces quatre élèves n'ont pas pu avancer avec succès dans la genèse instrumentale, car ils ont eu du mal à utiliser correctement les outils qui les guideraient vers la réponse.

Le deuxième problème portait sur la mesure de la profondeur d'un puits, dans l'un des problèmes de mesure des terres inclus dans le livre chinois *Jiuzhang suanshu* (Katz, 2013). Ici, les élèves n'ont pas eu de difficulté. 20 sur 21 ont correctement écrit l'égalité de rapports et calculé la distance. Ils sont facilement passés à la genèse sémiotique-discursive et, après avoir expliqué la similitude des triangles, ont utilisé la relation de proportionnalité comme outil et ont donné la bonne réponse.



Dans le troisième problème, les élèves ont d'abord regardé une vidéo sur le tunnel d'Eupalinos puis ont répondu aux questions de l'exercice. Dans la première question, liée à la nécessité de construire le tunnel, tout le monde a répondu correctement. Dans la deuxième question, sur la façon dont Eupalinos a mesuré la longueur du tunnel, dix-sept élèves ont correctement décrit la méthode de calcul. En utilisant la vidéo comme outil numérique, ils sont passés de la genèse instrumentale à la genèse discursive et, en utilisant le critère de similitude, ont expliqué comment Eupalinos a trouvé la longueur du tunnel. Deux élèves n'ont pas répondu du tout, et les deux autres ont répondu qu'ils avaient utilisé les triangles similaires dans le schéma. Ces réponses montrent que les élèves ont eu du mal à développer un raisonnement basé sur la théorie correspondante.



CONCLUSIONS

Dans l'intervention pédagogique décrite, les activités ont été conçues selon les principes de l'ETM_G. Celles-ci, idéales pour les élèves, ont été développées pour couvrir les trois genèses : sémiotique, instrumentale et verbale, comme vous pouvez le remarquer dans le tableau suivant.

Feuille de travail	Activité	Design de l'activité	Difficultés
1ère feuille de travail	Activité 1	L'introduction de l'activité se déroule au niveau de la dimension sémiotique-discursive. Pendant l'expérimentation, nous passons à la dimension instrumentale, puis finalement à la dimension discursive avec la formulation de la définition.	De nombreux élèves n'ont pas atteint le résultat souhaité lors du processus de genèse sémiotique, puis ont eu du mal à passer à la genèse discursive et à développer une pensée correcte.
	Activité 2	La première partie de l'activité relève du niveau discursif-instrumental avec un accent sur la dimension cognitive. Dans la deuxième partie de l'activité, les élèves évoluent au niveau instrumental-sémiotique en faisant appel à la dimension discursive.	Environ la moitié des élèves ont rencontré des difficultés dans la deuxième partie de l'activité lors de la transition vers la dimension discursive. Le développement de leur pensée adéquate s'est avéré assez exigeant.
2ème feuille de travail	Activité 1	L'activité se situe au niveau instrumental - sémiotique.	Ils ont eu du mal à terminer le travail dans la genèse sémiotique, en ce qui concerne l'espace tridimensionnel.
	Activité 2	L'activité se situe au niveau sémiotique - instrumental et aboutit à la genèse discursive par l'expression du critère de similitude.	Il n'y a pas eu des difficultés particulières à passer du niveau sémiotique-instrumental à la genèse discursive.

3ème feuille de travail	Activité	Au début, l'activité se situe au niveau sémiotique - discursif avec un accent mis sur le passage de la genèse sémiotique à la genèse discursive. Ensuite, le travail continue au niveau instrumental - sémiotique.	La moitié des élèves eu du mal à passer de la genèse sémiotique à la pensée discursive.
4ème feuille de travail	Activité	L'activité se situe au niveau sémiotique-instrumental. Le travail commence dans la genèse sémiotique, passe à l'instrumental, puis revient à la sémiotique.	Il n'y a pas eu des difficultés dans le travail au niveau sémiotique-instrumental.
5ème feuille de travail	Activité	Le mouvement se poursuit au niveau instrumental - sémiotique, avec un accent sur la genèse instrumentale pour la construction de l'outil d'Errard	Il n'y a pas eu des difficultés dans le travail des élèves au niveau instrumental - sémiotique.
6ème feuille de travail	Activité	L'activité commence par un mouvement au niveau instrumental - sémiotique avec la mesure de la distance inaccessible. Ensuite, elle passe au niveau sémiotique - discursif avec une inclinaison vers la genèse instrumentale.	Les élèves ont eu des difficultés dans le travail au niveau instrumental - sémiotique, en particulier dans le mouvement vers la genèse sémiotique.
7ème feuille de travail	1er problème	L'activité commence au niveau sémiotique - discursif avec un accent sur la dimension verbale. Ensuite, elle passe au niveau instrumental - sémiotique.	Environ la moitié des élèves ont eu du mal à passer à la dimension discursive. Quatre élèves ont eu du mal à utiliser les bons outils pour travailler avec succès dans la dimension instrumentale.
	2ème problème	Le travail a été fait au niveau sémiotique - discursif avec une inclinaison vers la genèse instrumentale.	Il n'y a pas eu des difficultés dans le travail au niveau sémiotique - discursif.

	3ème problème	L'activité se déplace entre le niveau instrumental - discursif et le niveau sémiotique - discursif.	Les élèves ont eu du mal à utiliser la théorie comme outil et à passer à la dimension discursive.

Tableau 1 : Description des activités avec les éléments de l'ETM_G.

L'interaction entre ces niveaux verticaux a enrichi l'ETM_G personnelle des élèves, facilitant la résolution de problèmes géométriques liés à la similitude des triangles et à la compréhension de ce concept.

En analysant les espaces de travail des élèves et en répondant à la question de recherche, nous pouvons affirmer qu'ils ont répondu aux exigences des activités de manière satisfaisante. La plupart des questions ont été traitées avec succès, passant par les niveaux verticaux de l'ETM_G. Cependant, des difficultés sont apparues, notamment lors du transfert de la mesure d'une hauteur inaccessible avec l'outil d'Errard ou de la conception de triangles similaires dans l'espace. Ils ont également eu du mal avec les activités nécessitant un raisonnement verbal, ce type de questionnement étant nouveau pour eux, car le manuel scolaire se concentre surtout sur les niveaux instrumental et sémiotique.

REFERENCES

Katz, V., (2013). *History of Mathematics. One Introduction*. Editions Universitaires de Crète.

Keepek (2001). *Euclid The Elements*, Vol.1, Athens.

Kospentaris, G., & Spyrou, P., (2005). The construction of the concept of similarity proportions and the educational experience. *Mediterranean Congress, Palermo*, 239- 255.

Kuzniak, A., Tanguay, D., Elia, I., (2016a). Mathematical Working Spaces in schooling: an introduction. *ZDM Mathematics Education* 48:721-737

Kuzniak, A., Nechache A., & Drouhard, J., P., (2016b). Understanding the development of mathematical work in the context of the classroom. *ZDM Mathematics Education*, 48(6), 861-874.

Lodder, J., (2010). Proportionality in Similar triangles: A Cross – Cultural Comparison – References. *Convergence*. Mathematical Association of America.

Mastrogiannis, A., Kordaki, M., (2006). The concept of similarity in triangles within the context of tools of Cabri-Geometry II. In *Proceedings of 4rth Int. Conf. m-ICTE2006*, (pp. 641-645), Seville, Spain, 22-25, November 2006.

Parastuti, R.H., Usodo, B., Subanti, S. (2018). Student's Error in Writing Mathematical Problem Solving Associated With Corresponding Angles of The Similar Triangles. *Pancaran Pendidikan FKIP*. Vol.7 pp. 186-193.

Piaget, J., & Inhelder, B., (1971). *The Child's Conception of Space*, Routledge & Kegan Paul, London, 320-374.

Tsibourakis, D., (2002). *Mathematical measurements in Ancient Greece*. Edition Eolos, Athens.

TAREAS SOBRE SEMEJANZA DE FIGURAS PLANAS EN LIBROS DE TEXTO CON USO DE TECNOLOGÍA: ¿QUÉ TRABAJO MATEMÁTICO PROPICIAN?

Denisse Avilés-Henn, Carolina Henríquez-Rivas

Universidad Católica del Maule

El presente trabajo analiza el trabajo matemático que activan tareas con uso de tecnología propuestas en libros de texto de Chile, que han sido utilizados durante la última década en establecimientos educacionales públicos. Para ello, fueron seleccionadas las tareas asociadas con la semejanza de figuras planas que implican el uso de algún software educativo y se analiza el trabajo matemático que estas favorecen. Los resultados muestran la necesidad de revisar las tareas que se proponen, a fin de propiciar un ETM más eficaz y aprovechar el potencial dinámico del artefacto.

INTRODUCCIÓN

La investigación en torno a la educación en geometría es variada, extensa y ha experimentado un desarrollo creciente en los últimos años (e.g., Herbst et al, 2018). La geometría se considera un componente crucial del currículo de matemáticas en los niveles educativos primario y secundario, formando parte integral de los contenidos obligatorios en esta disciplina (Fernández-Nieto, 2018).

Diversos estudios en geometría se sustentan en perspectivas diferentes, o bien, ponen atención en procesos cognitivos asociados con la geometría (Arzarello *et al.*, 2002; Duval, 2005; Kuzniak y Nechache, 2021). En este ámbito, estudios como los niveles de razonamiento de Van Hiele (1957) han sido fundamentales para comprender cómo los estudiantes progresan en su comprensión geométrica a través de diferentes etapas cognitivas. De la misma manera, autores como Houdement y Kuzniak (e.g., 2006) han propuesto paradigmas específicos para la enseñanza y aprendizaje de la geometría, clasificados en: geometría I (geométrica natural), geometría II (geométrica natural axiomática) y geometría III (geométrica axiomática formal). Estas categorías ayudan a estructurar el proceso educativo para desarrollar habilidades desde la intuición geométrica básica hasta la comprensión formal de los axiomas y teoremas geométricos.

Por otro lado, el estudio de libros de texto juega un rol esencial, pues son considerados uno de los recursos pedagógicos más relevantes para el aula (Díaz-Levicoy *et al.*, 2019), presentando propuestas de enseñanza que dan vida a los lineamientos curriculares de un país (Marmolejo y Gonzales, 2013). En esta perspectiva, Schubring y Fan (2018) señalan que el estudio de los textos en Educación Matemática ha tenido una atención internacional cada vez mayor. Por tal razón, un estudio que analice en profundidad el trabajo matemático que propician tareas específicas propuestas en los libros de texto, se considera como un aporte a la disciplina.

Por su parte, investigaciones como las de Flores *et al.* (2021) mencionan que el uso de tecnología es un gran apoyo como herramientas dentro de la enseñanza y el

aprendizaje, apuntando a la necesidad de proponer estrategias y actividades con el uso de herramientas tecnológicas que conlleven al estudiante a la reflexión y la apropiación de conocimientos geométricos específicos favoreciendo la formación integral del estudiante. En este sentido, el trabajo de Ribeiro dos Santos y Souza (2023) señala que software, como GeoGebra, además de ser un instrumento mediador del conocimiento matemático, proporciona a los estudiantes una visión dinámica del tema a estudiar, permitiendo calcular y establecer relaciones, modificarlas y visualizarlas fortaleciendo el aprendizaje. Por ello, estudiar las tareas geométricas propuestas en libros de texto, se plantea como un aporte al campo disciplinar.

En particular, se propone un estudio sobre las tareas con uso de tecnologías en temas asociados con el dominio de geometría, dada su relevancia asociada con procesos de verificación dado por el uso del arrastre y las dificultades implicadas.

Antecedentes de contexto

En Chile, los resultados de la Evaluación Nacional Diagnóstica Formación Inicial Docente (END-FID) (Mineduc, 2021a), señalan dificultades en los estándares disciplinares y didácticos de la pedagogía en matemática, especialmente en Geometría (Mineduc, 2021b). Además, la Agencia de Calidad de la Educación ha mostrado que el país sigue por debajo del promedio OCDE en evaluaciones internacionales como PISA (2022), la cual evidencia que cerca de la mitad de los estudiantes de 14 a 15 años no alcanzan el nivel mínimo en Matemática desde 2006. Por lo que, es crucial revisar recursos pedagógicos que aborden tareas de geometría, tema presente en el currículo escolar y los estándares de Formación Inicial Docente (FID) en matemática, incluyendo la semejanza de figuras planas, por lo que se considera un tema relevante de estudiar.

En relación con la política nacional sobre los libros de texto destaca la importancia de la enseñanza de la geometría para el desarrollo del pensamiento matemático (Mineduc, 2015). La política pública del Estado chileno garantiza la entrega sistemática y gratuita de libros de texto de alta calidad a todos los estudiantes de establecimientos educativos municipales y subvencionados en el país (Pavié *et al.*, 2019). Dichos recursos apoyan a la Unidad de Currículum y Evaluación del Ministerio de Educación, cuyo objetivo es mejorar la calidad educativa mediante la adaptación a los cambios y necesidades emergentes en la sociedad chilena (Mineduc, 2008). En este sentido, estudios como el de Diaz-Levicoy *et al.* (2019) mencionan que los libros de texto se consideran como un medio significativo para trabajar temas curriculares, apoyándose en tareas destinadas a evaluar el aprendizaje de una unidad (Bustamante-Valdés, *et al.*, 2024).

Por otro lado, el uso de herramientas tecnológicas para el aprendizaje de geometría es parte de lo establecido en la política pública y el currículo escolar (Mineduc, 2015). A modo de ejemplo, un *Objetivo de Aprendizaje* planteado en el currículo escolar de Primero Medio (14 años aproximadamente) señala:

> "Mostrar que comprenden el concepto de homotecia: Relacionándola con la perspectiva, el funcionamiento de instrumentos ópticos y el ojo humano. Midiendo segmentos adecuados para determinar las

> propiedades de la homotecia. Aplicando propiedades de la homotecia en la construcción de objetos, de manera manual y/o con software educativo. Resolviendo problemas de la vida cotidiana y de otras asignaturas." (Mineduc, 2015, p. 120).

Así, se evidencia que su uso debe estar presente dentro de la enseñanza; sin embargo, no es del todo claro cómo los profesores realizan esta transposición didáctica en el aula. En este sentido, el libro de texto se transforma en un recurso didáctico de relevancia y apoyo para la enseñanza y aprendizaje de la matemática.

De lo anterior, se hace necesario revisar tareas con el uso de herramientas tecnologías en libros de texto, que conlleven al estudiante a la apropiación de conocimientos geométricos, al considerar el uso del libro de texto como un apoyo en la mejora a la calidad educativa. Es por esto, que el objetivo de este estudio es analizar el trabajo matemático que propician las tareas presentadas en libros de texto chilenos que consideran el uso de tecnología en el estudio de la semejanza de figuras planas en la educación secundaria chilena.

MARCO TEORICO

El trabajo matemático que propician las tareas propuestas en los libros de texto se analiza desde la teoría de los Espacios de Trabajo Matemático (ETM) cuya finalidad es comprender, desde un punto de vista didáctico, lo que se pone en juego alrededor del trabajo matemático en un contexto educativo (Kuzniak, 2022). Dentro del ETM se articulan dos niveles, uno de carácter epistemológico relacionado con el contenido matemático del campo estudiado y otro de carácter cognitivo, donde se intenta dar cuenta de la actividad matemática (Gaona y Menares, 2021). La articulación entre estos planos se realiza mediante tres génesis: semiótica, instrumental y discursiva. De esta manera, estas tres génesis pueden interactuar al momento de realizar una determinada tarea, lo que permite identificar los planos verticales (Kuzniak, 2022).

Para ahondar en el uso de un software de geometría dinámica (SGD), se considera la perspectiva cognitiva planteada por Arzarello *et al.* (2002), quienes estudiaron la acción de arrastre, de los SGD y sus correspondientes procesos cognitivos. Los autores enfatizan que la práctica de arrastre ofrece una retroalimentación a la fase de descubrimiento siendo un apoyo al proceso de prueba, donde está última se puede diferenciar en función de la naturaleza de los conocimientos, así como del lenguaje (Richard, 2004). Se identifican dos niveles, uno de ellos a *procesos ascendentes* que corresponde cuando el individuo pasa de dibujos a la teoría y otro *proceso descendente*, cuando de la teoría se pasa a los dibujos (Arzarello *et al.*, 2002). Un estudio sobre los procesos cognitivos con uso de tecnología en el dominio de geometría, que consideran ambas perspectivas (ETM y procesos cognitivos), ha sido estudiado por Henríquez-Rivas y Kuzniak (2021), el cual se ha considerado en este estudio.

METODOLOGÍA

La metodología se desarrolla bajo un enfoque cualitativo (Creswell, 2018), a fin de analizar las tareas que se plantean con uso de tecnología en libros de texto diseñados para la educación pública de Chile. El diseño es un estudio de casos simple integrado, donde la toma de datos es en un objeto, en este caso libros de texto, con más de una unidad de análisis (Yin, 2018). En relación con los criterios de selección, estos corresponden a libros de textos implementados durante la última década en establecimientos educacionales públicos chilenos. En cuanto al tema matemático de estudio, se contempla el dominio de geometría, con atención en la semejanza de figuras planas, pues se considera un tema relevante de estudiar y analizar el planteamiento que ofrecen los textos en relación con tareas que permitan propiciar diversos procesos cognitivos asociados con el uso del software de geométrica dinámica.

De lo anterior, se seleccionaron tres libros de textos: Texto del Estudiante (lo llamaremos TE1) (Muñoz *et al.*, 2015), el cual estuvo en vigencia desde el año 2013 al 2015; Texto del estudiante (lo llamaremos TE2) (Galasso *et al.*, 2019), en vigencia desde el año 2016 al 2019; Texto del estudiante (lo llamaremos TE3) (Fresno *et al.*, 2021) vigente desde el año 2020 a la actualidad. La selección de las tareas considera aquellas que explícitamente proponen el uso del software GeoGebra para su resolución. Bajo este criterio, se encontraron dos tareas en cada uno de los libros de texto estudiados, las cuales deben ser resueltas por los estudiantes. A continuación, la Tabla 1 muestra las características de las tareas encontradas con uso de tecnologías.

Texto del Estudiante	Tareas	Características Centrales
TE1	Tarea 1	Aplicación de homotecia y análisis de figuras con GeoGebra.
	Tarea 2	Aplicación teorema de Thales y análisis de segmentos con GeoGebra.
TE2	Tarea 3	Conocimiento de herramientas GeoGebra para construcción de homotecia.
	Tarea 4	Construcción de homotecia en figura 2D en GeoGebra.
TE3	Tarea 5	Conocimiento de herramientas GeoGebra para construcción de homotecia.
	Tarea 6	Construcción de homotecia en figura 2D en GeoGebra.

Tabla 1: Características de tareas estudiadas.

Dentro de la búsqueda se evidencian tareas exactamente iguales en TE2 y TE3, por lo que, se considera solo las tareas de TE3, quedando así cuatro tareas, dos de TE1 y dos de TE3. Finalmente, para el presente estudio, se escoge una tarea por texto, la selección es esto considera: representatividad de ambos textos; elección de tareas que consideren el mismo tema, en este caso homotecia, para estudiar diferencias y similitudes en el trabajo matemático que propician. De este modo, se analizan las tareas 1 y 6.

En cuanto a los análisis, se consideran elementos de dos etapas que se describen en Kuzniak y Nechache (2021): *adentro*, la cual considera los distintos episodios

desarrollados en la resolución de la tarea y la circulación del ETM, donde cada episodio corresponde a una sub-tarea prescrita por un estudiante e incluye la secuencia de acciones matemáticas utilizadas para resolverla; 2) *afuera*, a fin de obtener de manera sintética la circulación del trabajo matemático e inferir la organización lógica de sus acciones matemáticas y así descubrir sus o su camino cognitivo. Asimismo, las estrategias de resolución se basan en el trabajo matemático esperado según los conocimientos que los estudiantes deben tener hasta el nivel escolar correspondiente, según el currículo escolar. Para esto, se considera un protocolo de análisis utilizado en análisis previos de ETM (Henríquez-Rivas y Kuzniak, 2021).

Con el protocolo anterior se analiza el tipo de tareas propuestas por los libros de texto, la circulación del trabajo matemático, lo que implica caracterizar las componentes, génesis y la activación de los planos verticales, asociados con la resolución de cada tarea. Para el desarrollo de los análisis, la información se organiza de la forma: primero, se muestra la tarea presentada en el libro de texto; luego, se presenta la estrategia de resolución esperada, se identifican y describen los episodios; finalmente, los análisis basados en protocolo de ETM.

RESULTADOS

A continuación, se muestran los análisis de las tareas seleccionadas en los dos textos escolares con sus respectivos análisis según lo descrito en el apartado anterior.

Análisis tareas con uso de tecnología en TE1

La tarea que plantea el libro de texto TE1 y se encuentran dentro de la Unidad 2 de Segundo Medio (15 años aprox). Esta tarea se presenta a continuación.

Presentación de Tarea 1: Aplicación de Homotecia y análisis de figuras.

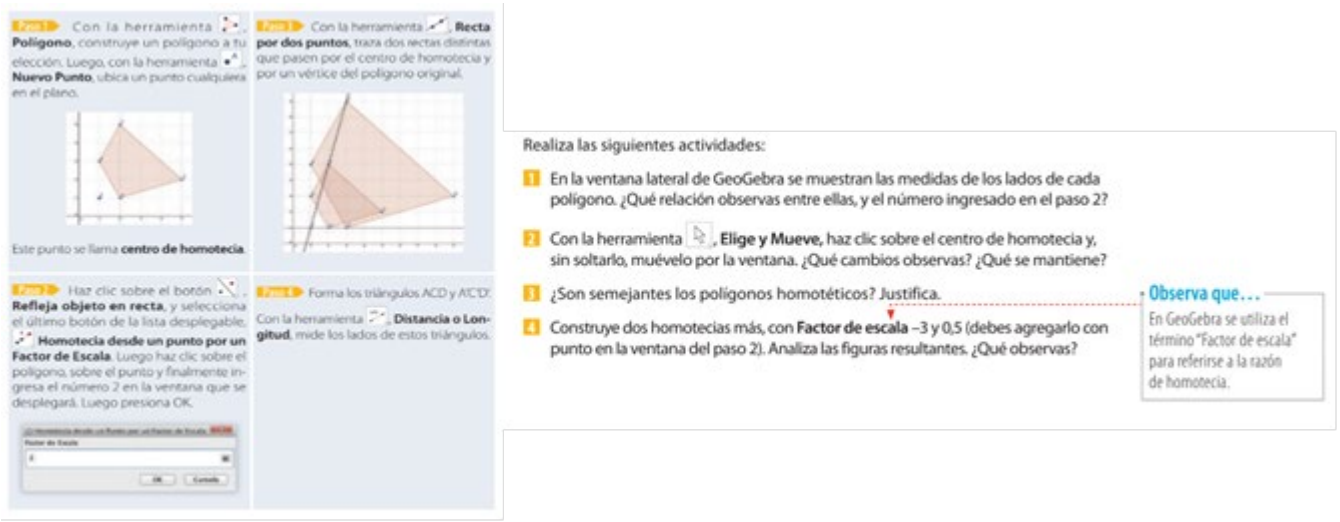


Figura 1. Tarea propuesta en Texto del Estudiante (Muñoz *et al.*, 2015, p.100-101).

Estrategia de resolución esperada en el nivel escolar

Para la resolución esperada de la tarea se presentan 6 episodios (*e*)

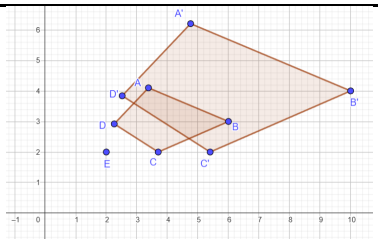
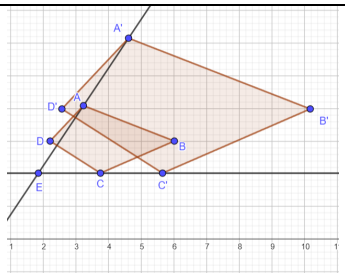
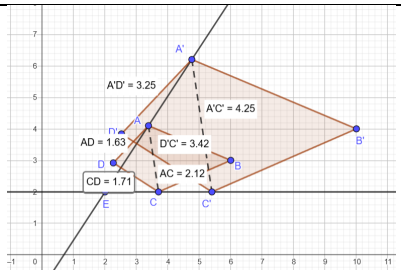
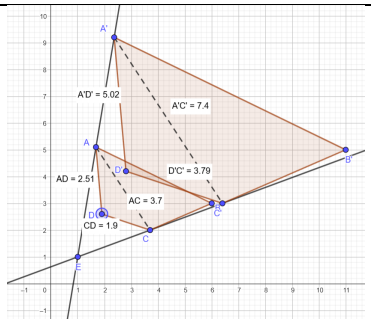
e1: Aplicar la homotecia usando la herramienta del software.		Se construye el polígono y se ubica un punto que será el centro de homotecia. Luego, se utiliza herramientas del Software para la aplicación de homotecia.
e2: Trazar rectas por los puntos correspondientes y centro de homotecia.		Se trazan dos rectas que pasen por el centro de homotecia y por dos vertices de la figura original.
e3: Medir lados del triángulo con herramienta del software.		Utilizando herramientas de GeoGebra, se miden los lados solicitados.
e4: Relacionar razón de homotecia con las medidas de la figura original y su figura homotética.		En la manipulación del software, se observa que las medidas de la nueva imagen son el doble que las medidas de la imagen original, lo que se relaciona el número ingresado en GeoGebra, al momento de realizar la homotecia, es decir, con la razón de homotecia.
e5: verificar semejanza entre figuras homotéticas.	Para verificar si los polígonos son semejantes, a través de la definición, se miden los ángulos de los polígonos y sus respectivos lados para verificar que la razón de los lados homotéticos sea la misma. En este caso: $$\frac{A'D'}{AD} = \frac{D'C'}{DC} = \frac{A'B'}{AB} = \frac{C'B'}{CB} = \frac{2}{1}$$ $m\sphericalangle A = m\sphericalangle A'; m\sphericalangle B = m\sphericalangle B'; m\sphericalangle C = m\sphericalangle C'; m\sphericalangle D = m\sphericalangle D'$	
e6: Construir y observar nuevas homotecias con los mismos pasos anteriores.	Al observar distintas homotecias realizadas a una misma figura, se concluye que la figura original siempre es semejante con la figura resultante y que la razón de homotecia, coincide con la razón de semejanza entre las figuras.	

Tabla 2: episodios y posibles respuestas tarea 1.

Análisis de la circulación en TE1

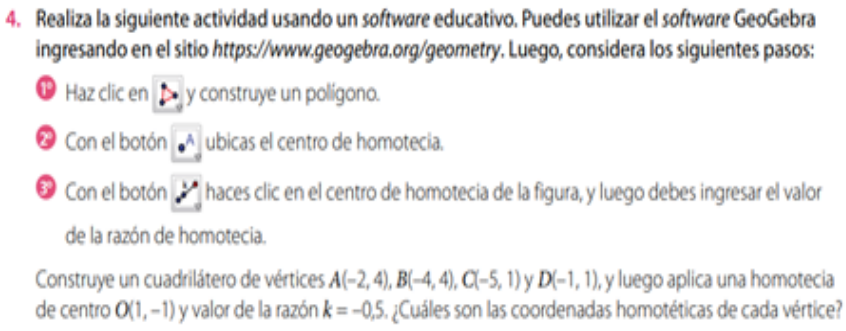
En *e1*, el trabajo involucra una aplicación de una homotecia a una figura 2D con el uso del software GeoGebra(artefacto). Relaciona la homotecia con sus elementos significantes (Representamen) activando el plano [Sem-Ins]. En el caso de *e2*, se privilegia la génesis instrumental, al igual que en *e3*, aunque en este episodio se involucra la visualización. Con respecto a procesos cognitivos, se relaciona una visualización icónica (Duval, 2005) al caracterizarse por el desarrollo de secuencias de operaciones y construcción con uso de instrumentos, implica un acercamiento más directo con el objeto matemático de estudio. El uso específico de herramientas indicadas en el enunciado favorece la representación en el plano vertical [Sem-Ins].

En relación con el episodio *e5* y *e6* se activa el componente de la prueba, de acuerdo con lo definido por Balacheff (1987), de tipo pragmático al momento de solicitar que los estudiantes interactúen con el software para generar un análisis sobre el concepto de homotecia, y la semejanza que existe en las figuras homotéticas, poniendo en juego definiciones o propiedades (Referencial). De esta manera se activan los planos verticales, [Ins-Dis] y [Sem-Dis]. Por otro lado, se observa un equilibrio de los procesos ascendentes y descendentes en los episodios planteados para el desarrollo de la tarea, ya que se promueve la exploración concreta con la manipulación del software, la toma de medidas, y la generalización matemática al relacionar medidas con la razón de homotecia y la verificación de propiedades matemáticas. Por ejemplo, en *e4* y *e6*, se muestra la acción de arrastre con GeoGebra, presentando descubrimiento por parte de los estudiantes, lo que genera un apoyo al proceso de prueba (Arzarello *et al.*, 2002)

Análisis tareas con uso de tecnología en TE3

La tarea que plantea el libro de texto TE3 y se encuentran dentro de la Unidad 3 de Primero Medio (14 años aprox.). Esta tarea se presenta a continuación.

Tarea 6: Construcción de homotecia de figura 2D en GeoGebra.


4. Realiza la siguiente actividad usando un *software* educativo. Puedes utilizar el *software* GeoGebra ingresando en el sitio *https://www.geogebra.org/geometry*. Luego, considera los siguientes pasos:

1° Haz clic en y construye un polígono.

2° Con el botón ubicas el centro de homotecia.

3° Con el botón haces clic en el centro de homotecia de la figura, y luego debes ingresar el valor de la razón de homotecia.

Construye un cuadrilátero de vértices $A(-2, 4)$, $B(-4, 4)$, $C(-5, 1)$ y $D(-1, 1)$, y luego aplica una homotecia de centro $O(1, -1)$ y valor de la razón $k = -0{,}5$. ¿Cuáles son las coordenadas homotéticas de cada vértice?

Figura 2. Tarea propuesta en Texto del Estudiante (Fresno *et al.*, 2021, p. 118).

Estrategia de resolución esperada en el nivel escolar

Para la resolución esperada de la tarea se presentan 3 episodios (*e*).

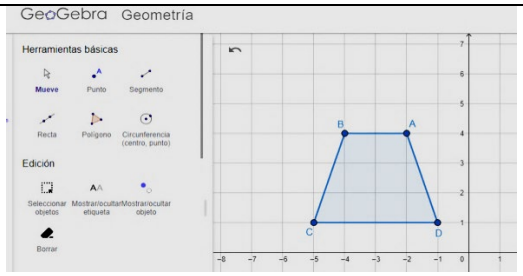
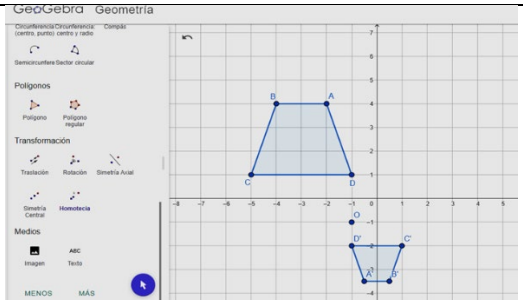
e1: Construir un cuadrilátero con herramientas del Software.		Se contruye cuadrilatero con herramientas de GeoGebra.
e2: Aplicar la homotecia usando la herramienta del software.		Ubicar el centro de homotecia y aplicar la homotecia con el comando del Software
e3: Identificar los vértices de la figura homotética.	A' (-0.5,-3.5); B' (0.5,-3.5); C' (1,-2); D' (-1,-2)	Determinar las coordenadas de los vértices de la figura homotética usando herramientas del Software o bien, identificando desde el plano cartesiano.

Tabla 3: episodios y posibles respuestas de tarea 6.

La resolución de la tarea se aborda desde el enfoque geométrico cartesiano. En *e1*y *e2* se privilegia la visualización de los objetos geométricos representados en el registro gráfico, los cuales se construyen con el software GeoGebra (artefacto). En términos del proceso cognitivo de visualización, esta se asocia con lo que Duval (2005) denomina del tipo icónico, pues involucra *ver* las figuras por medio de la percepción y los tratamientos asociados con la transformación solicitada. El artefacto en este caso implica usar ciertas herramientas específicas que vienen indicadas en el enunciado. Además, en *e3* se activa la génesis semiótica, por la representación de puntos en el registro numérico. Lo anterior, favorece el plano vertical [Sem-Ins]. Asimismo, se aprecia la componente referencial teórica, vinculada con la noción de homotecia, aunque esto no implique considerar sus propiedades o definición explícita. Por su parte, de acuerdo con los procesos ascendente y descendentes planteados por Arzarello *et al.*, (2002), la tarea presenta una tendencia a procesos ascendentes, ya que invita a los estudiantes a realizar representaciones concretas y explorar visualmente el efecto de la homotecia, lo que se evidencia en los episodios *e1* y *e3*. En el primer caso, se debe manipular el software para construir la figura inicial y, en el segundo, se observa y comparan los vértices transformados con los originales, lo que carece de una conexión con la generalización o la validación, que son parte de los procesos descendentes.

En esta tarea, el potencial dinámico del software no es aprovechado para que el estudiante descubra o conjeture en relación con las propiedades de la homotecia, o bien,

para trabajar con énfasis en procesos de visualización más desafiantes que impliquen construir y deconstruir las figuras.

CONCLUSIÓN

Para este estudio se ha planteado cómo las tareas presentadas en los libros de texto utilizados durante la última década en la educación pública chilena presentan el concepto de semejanza de figuras planas y qué trabajo matemático propician para el aprendizaje de los estudiantes.

Para esto se encontraron 6 tareas, de las cuales se analizaron 2, debido a que, de las seis, dos de ellas se repetían en libros de años diferentes y luego, se eligió una tarea por libro que fuera representativa. A continuación, se presenta la tabla 4, con un resumen de los análisis realizados a estas tareas destacando sus principales hallazgos.

En general, la tarea 1 no indica si se privilegia el enfoque geométrico sintético o analítico; sin embargo, las sub-tareas no señalan información sobre el uso de coordinadas. A diferencia de la tarea 6, que explícitamente considera el uso de coordenadas de los vértices de las figuras implicadas. En este sentido, al parecer, el enfoque geométrico y su complementariedad no parece ser un tema relevante las tareas estudiadas. El uso de GeoGebra puede apoyar la elaboración de tareas en este sentido (Henríquez-Rivas y Montoya-Delgadillo, 2016).

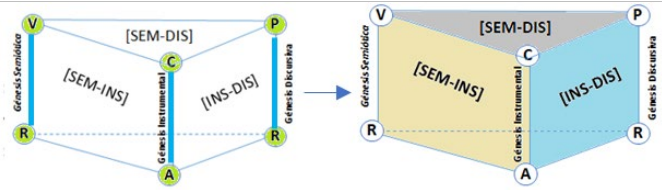
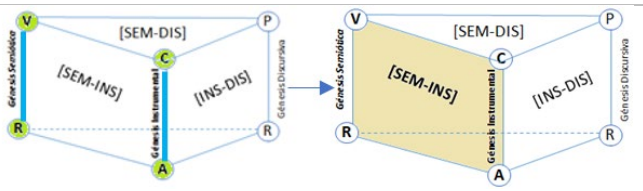
Texto del estudiante	Tarea	Año de vigencia	Activación ETM
TE1	Tarea 1	2013-2015	 Componentes y Génesis Activadas Planos activados
TE2 y TE3	Tarea 6	2016-2019/2020-2024	 Componentes y Génesis Activadas Planos activados

Tabla 4: Síntesis análisis de tareas.

De acuerdo con la tabla presentada, se observa que en la tarea 1, se centra en la construcción de un objeto matemático por medio de software geométrico. Se trabajan los componentes de visualización y representación, activando la génesis semiótica, donde además se presenta la activación de la génesis instrumental, al momento de la utilización de artefactos para la construcción solicitada, activando el plano vertical

[Sem-Ins] propiciando un trabajo matemático por medio del descubrimiento y la exploración (Kuzniak y Richard, 2014). Además, se presenta una activación de la génesis discursiva, poniendo en juego definiciones o propiedades (referencial teórico) y la interacción con el software para generar un análisis y un descubrimiento por parte de los estudiantes, apoyando el razonamiento y la prueba a la que se enfrentan, lo que permite la activación de los planos verticales [Sem-Dis] y de [Ins-Dis].

En relación con la tarea 6, se observa que esta se centra en la construcción de un objeto matemático por medio de GeoGebra. Se trabaja los componentes de visualización y representación, activando la génesis semiótica y génesis instrumental, al momento de la utilización de artefactos para la construcción de figuras 2D. De esta manera se activa el plano vertical [Sem-Ins] propiciando un trabajo matemático por medio del descubrimiento y la exploración (Kuzniak y Richard, 2014).

De los análisis, se evidencia que las tareas presentadas en el libro de texto con uso de tecnología no consideran ciertos procesos, dificultando la integración de componentes presentes en los planos cognitivos y epistemológicos planteados por el modelo, de tal manera de poder activar de manera eficiente y adecuada los planos verticales, con el fin de lograr un ETM completo (Kuzniak *et al.*, 2016a). Asimismo, existe una escasa conexión con la generalización matemática o procesos de validación, generando un desequilibrio en los procesos ascendente y descendentes planteados por Arzarello *et al.* (2002) quienes plantean que ambos procesos son complementarios y necesarios para un aprendizaje significativo. De este modo, es deseable que los diseñadores de libros de texto consideren tareas más complejas, con el fin de brindar al estudiante espacios en que se fortalezca el razonamiento, descubrimiento, exploración, presentación, justificación y comunicación en el desarrollo matemático de estos. Estos recursos pedagógicos son los más utilizados en las aulas, por ello, se debe trabajar para ofrecer una mejor propuesta para el aprendizaje de la matemática escolar.

Finalmente, a modo de limitación, se debe considerar que este estudio muestra un análisis acotado de tareas específicas. En futuras investigaciones, se podrían analizar otros niveles y dominios matemáticos en relación con el estudio de las tareas que se proponen en este tipo de manuales para el aprendizaje. La investigación de Panqueban *et al.* (2024) deja en evidencia que este es un ámbito de investigación menos explorado desde los ETM. Asimismo, se propone esta investigación asociada al diseño de tareas como una manera de hacer visibles las tareas propuestas en los libros de texto y de mostrar aquellos procesos cognitivos que se propician. Esto se trata de un asunto a considerar por los autores de los libros de texto, por diseñadores de tareas e investigadores en la línea de task design (Watson y Ohtani, 2015), lo cual puede ser abordado desde los ETM.

AGRADECIMIENTOS

Las autoras agradecen a la Agencia Nacional de Investigación y Desarrollo de Chile (ANID), Fondo Nacional de Desarrollo Científico y Tecnológico de Iniciación 2023, Folio 11230523, y al Centro de Investigación en Educación Matemática y Estadística

(CIEMAE) de la Universidad Católica del Maule. D. Avilés-Henn agradece a Beca ANID-Subdirección de Capital Humano/Doctorado Nacional 2024-21242171.

REFERENCIAS

Arzarello, F., Olivero, F., Paola, D., & Robutti, O. (2002). A cognitive analysis of dragging practises in Cabri environments. *ZDM Mathematics Education, 34*(3), 66-72. http://dx.doi.org/10.1007/BF02655708

Balacheff, N. (1987). Processus de preuve et situations de validation. *Educational Studies in Mathematics, Netherlands,18*(2), 147-176.

Bustamante-Valdés, M., Díaz-Levicoy, D., & Alarcón-Bustamante, E. (2024). Analysis of formative and evaluative activities on statistical graphs in textbooks for Chilean rural multigrade education. *European Journal of Investigation in Health, Psychology and Education, 14*(5), 1396-1412.

Creswell, J. W. (2018). *Research Design: Qualitative, Quantitative, and Mixed Methods Approaches*. Sage Publications

Díaz-Levicoy, D., Osorio, M., Rodríguez-Alveal, F., y Ferrada, C. (2019). Los gráficos de barras en los libros de texto de Educación Primaria en Perú. *Paradigma, 40*, 259-279

Duval, R. (2005). Les Conditions Cognitives de l'apprentissage de la géométrie : Développement de la Visualisation, Différenciation des Raisonnements et Coordination de leurs Fonctionnements. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 10*, 5-53.

Fernández-Nieto, E. L. (2018). La geometría para la vida y su enseñanza. *Aibi revista de investigación, administración e ingeniería, 6*(1), 33-61.

Flores Cuevas, F., Vásquez Martínez, C. R., & González González, F. A. (2021). El uso de las TIC en la enseñanza de conceptos geométricos en la educación básica. *RIDE. Revista Iberoamericana para la Investigación y el Desarrollo Educativo, 12*(23).

Fresno, C., Torres, C., y Avila, J. (2021). *Texto del Estudiante. 1° Medio*. Santillana.

Galasso, B., Maldonado, L., y Marambio, V. (2019). *Texto del Estudiante. 1° Medio*. Santillana.

Gaona, J., y Menares, R. (2021). Argumentación de futuros profesores de matemáticas en tareas sobre fracciones mediadas por un sistema de evaluación en línea con feedback automático *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 17*, 1-18,

Henríquez-Rivas, C., y Kuzniak, A. (2021). Profundización en el trabajo geométrico de futuros profesores en entornos tecnológicos y de lápiz y papel. *Bolema, 35*, 1550-1572.

Herbst, P.; Cheah, U. H.; Richard, P. R.; & johns, K. (2018). *International Perspectives on the Teaching and Learning of Geometry in Secondary Schools. ICME-13 Monographs*. Springer.

Houdement, C.; & Kuzniak, A. (2006). Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, *11*, 175-193.

Marmolejo, G. y Gonzalez, M. (2013). Visualización en el área de regiones poligonales: Una metodología de análisis de textos escolares. *Educación Matemática*, 61-102.

MINEDUC. (2008). *Política de textos escolares*. Gobierno de Chile.

MINEDUC. (2015). *Bases curriculares. 7° a 2° medio*. Gobierno de Chile.

MINEDUC. (2021a). Estándares de la profesión docente carreras de pedagogía en matemática educación media. Centro de Perfeccionamiento, Experimentación e Investigaciones Pedagógicas.

MINEDUC. (2021b). Informe resultados nacionales Evaluación Nacional Diagnostica de la Formación Inicial Docente. Centro de Perfeccionamiento, Experimentación e Investigaciones Pedagógicas.

Muñoz, G., Jiménez, L., y Rupin, P. (2015). Texto del Estudiante. 2° Medio. Editorial SM.

Panqueban, D., Henríquez-Rivas, C., & Kuzniak, A. (2024). Advances and trends in research on mathematical working spaces: A systematic review. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 20*(6), em2450.

Pavié, A., Cárdenas, C., Vásquez, L. y Lagos, P. (2019). Política de textos escolares en Chile. *Opción, 35*(90), 41-82

Kuzniak, A., Nechache, A., & Drouhard, J. P. (2016a). Understanding the development of mathematical work in the context of the classroom. *ZDM*, *48*, 861-874.

Kuzniak, A. & Nechache, A. (2021). On forms of geometric work: a study with pre-service teachers based on the theory of Mathematical Working Spaces. *Educational Studies in Mathematics*, *106*(2), 271-289.

Kuzniak, A., Montoya-Delgadillo, E., & Richard, P. (2022). *Mathematical work in educational context: The perspective of the theory of mathematical working spaces*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-90850-8

Kuzniak, A. & Richard, P. (2014). Espacios de trabajo matemático. Puntos de vista y perspectivas. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 17*(4-I), 5-15.

Ribeiro dos Santos, J., & Souza Bonfim, M. R. (2023). O uso da tecnologia e do software geogebra nas aulas de matemática do ensino fundamental II. *RECIMA21 - Revista Científica Multidisciplina*r, *4*(8), e483887. https://doi.org/10.47820/recima21.v4i8.3887

Richard, P. (2004). *Raisonnement et stratégies de preuve dans l'enseignement des mathématiques*. Peter Lang

Schubring, G. & Fan, L. (2018). Recent advances in mathematics textbook research and development: an overview. *ZDM, 50*(5), 765-771.

Van Hiele, P. M. (1957). El problema de la comprensión: En conexión con la comprensión de los escolares en el aprendizaje de la geometría. (Tesis doctoral, Universidad Real de Utrecht). Recuperado de: https://www.uv.es/aprengeom/archivos2/VanHiele57.pdf

Watson, A. & Ohtani, M. (2015). *Task Design in Mathematics Education. An ICMI study* 22. Springer.

Yin, R. K. (2018). *Case Study: Research and Applications*. SAGE Publications.

RÉSOLUTIONS D'ÉQUATIONS DU PREMIER DEGRÉ EN IUT GEII – ENRICHIR L'ETM PERSONNEL DES ÉTUDIANTS

Philippe Hoppenot

Université Paris-Saclay, Univ Evry, Université Paris Cité, Univ Paris Est Creteil, CY Cergy Paris Université, Univ. Lille, Univ Rouen, LDAR, F-75013 Paris, France

Résumé. Cette étude porte sur le travail d'étudiants en première année universitaire dans une formation technologique sur la résolution d'équations du premier degré. Les équations proposées sont tirées de documentations techniques de composant électroniques La complexité de ces équations réside dans la forme et le nombre des lettres utilisées, ainsi que dans la structure des équations. Notre hypothèse est que c'est le nombre de paramètres et la forme des équations qui posent des problèmes aux étudiants. Un travail inhabituel sur la prédiction du degré d'une équation est proposé aux étudiants. L'objectif de cette étude est de mesurer si ce travail inhabituel a un effet sur la capacité des étudiants à résoudre ces équations.

INTRODUCTION

L'algèbre est un puissant outil de modélisation, appliqué à différents domaines dont l'électricité et l'électronique. En BUT[45] Génie Électrique et Informatique Industrielle (GEII), les étudiants sont ainsi régulièrement amenés à manipuler des expressions algébriques et à résoudre des équations, souvent simples, en particulier du premier degré. Ces étudiants sont issus, pour une part importante (45% à 50% ces dernières années), de bacs technologiques STI2D. Dans la pratique, il s'avère que plusieurs d'entre eux ont des difficultés pour obtenir des résultats corrects. Un exemple typique est le suivant :

Sachant que $A_V = 1 + \frac{R_{27}+P_5}{R_{26}}$, exprimer R_{26} en fonction de P_5, R_{27} et A_V.

Dans la précédente édition du symposium ETM, la question suivante avait été posée : les élèves reconnaissent-ils qu'ils sont en présence d'une équation du premier degré lorsqu'ils se retrouvent face à l'énoncé donné ci-dessus ? (Hoppenot, 2022). Le constat final était que "En définitive, les étudiants se retrouvent face à des équations dont ils ne reconnaissent pas toujours la forme et ne connaissent pas les transformations qui mènent à la forme générique ax+b=0, équation qu'ils savent résoudre" (ibid., p. 621). Ce constat amène à se demander comment aider les étudiants à reconnaitre ce type d'équations et ainsi enrichir leur ETM personnel afin de leur permettre de mieux résoudre ce type d'équation.

[45] Bachelor Universitaire de Technologie, formation en 3 ans post-bac qui a replacé le DUT (Diplôme Universitaire de Technologie)

CADRE THEORIQUE

Dans le cadre de cette étude, la structure des expressions du premier degré est d'une grande complexité pour des équations du premier degré. Cette notion de complexité est étudiée depuis longtemps. Grugeon (1997) parle de « complexité de la "compétence algébrique" ». Les travaux de J. Pilet (2012, 2015) proposent des parcours d'enseignements différenciés pour aider les élèves à prendre en compte cette complexité. Assude *et al.* (2012) explicite aussi la complexité d'expressions du type ax+bx, voire a(a'x+b). Ces études s'intéressent à des élèves de collège (grade 6 à grade 9), âgés de 11 à 14 ans. La complexité des équations proposées dans notre étude est comparable à celle présentées dans les études précédemment citées quant au degré des expressions et au niveau de parenthésage, mais elle est supérieure quant au nombre de paramètres et parce que l'on considère des expressions dans lesquelles l'inconnue est au dénominateur. Une complexité supplémentaire réside dans la forme des lettres utilisées. Elles sont d'écriture complexe avec souvent des indices, l'inconnue ne s'appelle pas x et elle n'est pas toujours la même pour une expression donnée en fonction du problème à résoudre. Mais le contexte de cette étude est différent des précédentes : les élèves sont en fait des étudiants d'université. Certes ils ne sont pas dans un cursus de mathématiques, mais ont trois années supplémentaires de formation. La complexité des expressions est imposée par le contexte technologique mais on fait l'hypothèse que cette complexité sémantique est accessible aux étudiants et que c'est plus le nombre de paramètres littéraux qu'il faut les aider à prendre en compte.

Dans ce contexte, l'outil mathématique algèbre élémentaire, au sens de Douady (1986), n'est pas toujours opérationnel : "un élève a des connaissances en mathématiques s'il st capable d'en provoquer le fonctionnement comme outils explicites dans les problèmes qu'il doit résoudre, qu'il y ait ou non des indicateurs dans la formulation, s'il est capable de les adapter lorsque les conditions habituelles d'emploi ne sont pas exactement satisfaites, pour interpréter les problèmes ou poser des questions à leurs propos" (ibid., p.11-12). Les étudiants semblent développer **des conceptions** (au sens de Tall et al,1981) **erronées** sur ces notions. Coulange (1998) apporte un éclairage intéressant sur la mise en équation de problèmes concrets en mettant en regard les injonctions institutionnelles et leur mise en pratique dans les classes. En BUT GEII, les étudiants peuvent aussi être amenés à modéliser le fonctionnement d'un montage : il ne s'agit plus ici d'injonctions institutionnelles mais de réels besoins pour développer une solution technologique en réponse à un cahier des charges. Dans l'étude présentée ici, les équations sont données dans les documentations techniques des composants électroniques utilisés. Enfin, Bednarz *et al.* (1996) montre que certains problèmes sont solubles arithmétiquement (ils sont dits **connectés**) et d'autres non (ils sont dits **déconnectés**). Ces derniers imposent de développer une technique algébrique reposant sur des outils mathématiques qui doivent donc être non seulement disponibles mais mobilisables. Cette distinction a été un élément théorique important de ce travail.

Le degré de l'équation n'étant pas toujours reconnu par les étudiants, on cherche à donner aux étudiants un moyen de prédire ce degré. La question que l'on se pose ici

est la suivante : est-ce que la capacité à prédire le degré d'une équation est de nature à aider les étudiants à mieux résoudre des équations du premier degré de type de celle donnée ci-dessus ?

METHODOLOGIE

Description de l'expérimentation

Une expérimentation a été menée au début de l'année universitaire 2023-2024 auprès de 74 étudiants de BUT1 GEII, répartis en 6 groupes A1, A2, B1, B2, C1 et C2 ; chaque production est numérotée, par exemple A107 (groupe A1, étudiant numéro 7). Elle consistait à résoudre 5 équations du premier degré (ou se ramenant à une équation du premier degré) tirées de relations ou formules présentes dans les documentations techniques de composants électroniques.

À cette période, les étudiants ne sont pas encore familiarisés avec ces expressions faisant intervenir de nombreuses lettres, souvent avec des indices qui en brouillent encore la lecture. Afin de limiter l'effet de cette profusion de signes et de leur interprétation, les consignes habituelles données en cours d'électricité ont été reformulées. Par exemple, face à l'expression $T_H = 0{,}693\ R_8 C_6$, il est généralement demandé : comment obtenir le temps souhaité sachant l'on dispose d'une valeur de capacité donnée. Dans cette expérimentation, la consigne est formulée de la façon suivante : Exprimer R_8 en fonction de C_6 et T_H.

L'expérimentation s'est déroulée en 3 phases : une phase de résolution d'équations, une phase de prédiction du degré d'équations et une deuxième phase de résolution d'équations. La phase de prédiction était intercalée après la résolution de 2 ou 4 équations suivant les groupes ; ainsi, les équations 3 et 4 ont été résolues par certains étudiants avant la séquence de prédiction et pour d'autres après. Le texte complet de l'expérimentation avec la première phase contenant équations est fourni en annexe ; les équations y sont numérotées pour une plus grande clarté.

Cette séquence était accompagnée par l'enseignant, la résolution des équations étant réalisée sans aide. Afin de donner aux étudiants un moyen pour prédire le degré d'une équation à partir de sa forme initiale, un travail spécifique a été demandé. Il se présentait de la façon suivante : prédire le degré de l'équation $(0) = (1) + \frac{(0)}{(1)}$ avec les notations suivantes :

(0) bloc ne contenant pas la variable

(1) bloc contenant la variable à la puissance 1

(2) bloc contenant la variable au carré (et à la puissance 1)

Après un temps d'adaptation à cette consigne inhabituelle pour eux, la majorité des étudiants a bien compris l'exercice.

L'expérimentation a duré 2h, dont 40 à 50 minutes sur la prédiction du degré d'une équation. Sur la résolution des équations, les étudiants travaillaient seuls. Pour la partie

sur la prédiction, l'approche étant inhabituelle pour les étudiants, le travail était piloté par l'enseignant.

Description du travail attendu

Toutes les équations à résoudre sont données en annexe. Elles ont toutes une complexité comparable concernant les lettres et les indices. Les deux premières ont en outre un coefficient décimal, peu fréquemment utilisé en classe de mathématiques. Un autre élément différencie plus fortement les équations proposées : la notion de problème connecté ou non introduit par Bednarz *et al.* (1996). En donnant des valeurs numériques à tous les paramètres connus, les équations 1 et 3 sont issues de problèmes connectés : on peut les résoudre arithmétiquement. Les trois autres ne le sont pas. Pour ces dernières une résolution arithmétique n'est pas possible, même avec des valeurs numériques pour tous les paramètres connus. Même si le travail demandé s'inscrit pleinement dans l'algèbre puisque les paramètres sont exprimés à l'aide de symboles algébriques, la résolution reste plus simple pour un problème qui serait connecté en donnant des valeurs numériques à tous les paramètres que si le problème n'était pas connecté. Il semble judicieux de différencier le travail attendu pour les équations connectées et celui pour celles qui ne le sont pas. Prenons pour commencer la troisième équation, $15V = R_1.I_1 + R_2.I_1$, où l'on cherche à exprimer R_1. On est dans le cas d'une équation issue d'un problème connecté : en donnant des valeurs numériques à R_2 (par exemple 1000 Ω) et I_1 (par exemple 0,01 A), on peut calculer $1000 \times 0{,}01 = 10$, soustraire cette valeur à 15 et diviser ensuite 5 par 0,01 pour obtenir R_1=500 Ω. La résolution algébrique est calquée sur cette résolution arithmétique : on soustrait $R_2.I_1$ à 15 et on divise le tout[46] par I_1. Le travail attendu correspondant à cette résolution est le suivant :

1. Reconnaissance de l'équation comme étant du premier degré (genèse sémiotique, voire uniquement le représentamen de type $ax + b = cx + d$)

2. Transformation de l'équation pour arriver à la solution $R_1 = \frac{15V - R_2.I_1}{I_1}$[47] ou mieux du point de vue de l'électricité $R_1 = \frac{15V}{I_1} - R_2$ (plan sémiotique-instrumental) sur le modèle de la transformation de $ax + b = cx + d$ en $x = \frac{d-b}{a-c}$[48]

[46] On verra qu'une hypothèse permettant d'expliquer les difficultés des élèves est que ce "tout", exprimé par des parenthèses, est souvent oublié par les étudiants dans leurs résolution algébriques.

[47] On a l'habitude en électricité de ne pas considérer le cas où le courant (ici I_1) serait nul, qui en l'occurrence ne permettrait pas d'obtenir de solution.

[48] La condition $a \neq c$ n'est pas prise en compte dans cette étude.

3. Contrôle du travail (genèse discursive), par exemple grâce aux dimensions (Ohm, Ampère, Volt) ou au travail sur la prédiction du degré d'une équation.

L'étape 3 peut être un moyen de constater une incohérence dans l'égalité (même avant d'arriver à l'expression de R_1) et re boucler avec l'étape 2. On remarque que le travail proposé, passant par toutes les genèses, est complet. Il est aussi correct.

Prenons l'exemple maintenant la deuxième équation, $f = \frac{1{,}44}{(R_A+2R_B)C}$ [49], où l'on cherche à exprimer R_A. Ici, la résolution arithmétique avec des valeurs numériques données aux paramètres est impossible : le problème est déconnecté. De plus, l'équation n'est pas donnée sous une forme du premier degré. Le travail attendu est le suivant :

1. Transformation de l'équation afin d'obtenir une forme du premier degré (genèse sémiotique, ou transformation de l'équation dans le plan sémiotique-instrumental) de type $ax + b = cx + d$

2. Transformation de l'équation pour arriver à la solution $R_A = \frac{1{,}44}{fC} - 2R_B$ (plan sémiotique-instrumental) sur le modèle de la transformation de $ax + b = cx + d$ en $x = \frac{d-b}{a-c}$

3. Contrôle du travail (genèse discursive), par exemple grâce aux dimensions (Ohm, Ampère, Volt) ou au travail sur la prédiction du degré d'une équation.

L'étape 1 est probablement une des difficultés des élèves et étudiants : effectuer des transformations d'écritures algébriques avec un but qui n'est pas formulé explicitement (trouver la forme de l'équation, ici le premier degré). Cette étape, ainsi que la suivante, sont plus complexes pour les équations issues de problèmes non connectés.

Là aussi, le travail proposé, passant par toutes les genèses, est complet et correct.

ANALYSE DU TRAVAIL MATHÉMATIQUE

Cette section présente d'abord les ETM personnels des étudiants, illustrés par plusieurs exemples représentatifs. Une analyse du travail de prédiction est ensuite proposée s'appuyant d'une part sur son effet et d'autre part sur ce qu'en disent les étudiants.

[49] Ici encore, les conditions d'existence de l'équation ne sont pas interrogées : ni le condensateur ni les résistances n'ont une mesure nulle.

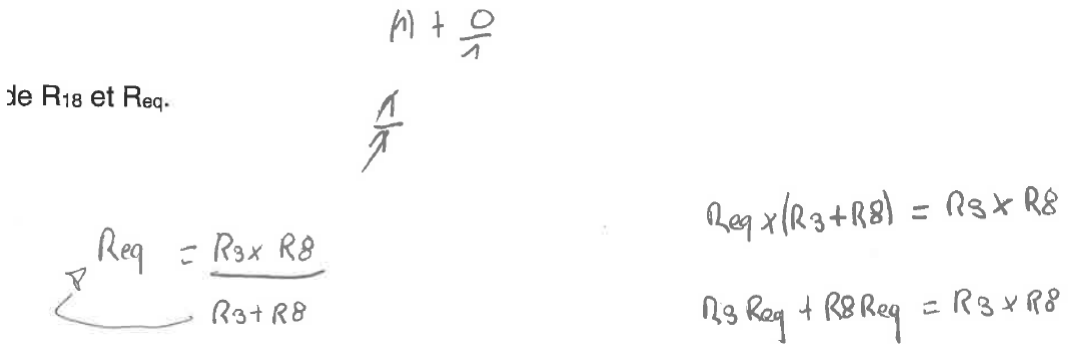


Figure 1. Contrôle des transformations grâce à la prédiction du degré (C102).

On constate d'abord que le travail des étudiants se situe très majoritairement dans le plan Sémiotique-Instrumental. En effet, on constate aussi **une absence quasiment générale de contrôle** sur les résultats obtenus, qu'ils soient corrects ou non. Dans deux cas, un contrôle à l'aide de la séquence de prédiction du degré d'une équation est exprimé. Dans un cas, le contrôle intervient en début de résolution et guide les transformations (Figure 1). Dans le second cas (Figure 2), une erreur est repérée dans le résultat obtenu. Un carré apparait dans la résolution, la prédiction du degré prévoyant une équation du premier degré. Aucune correction n'est apportée.

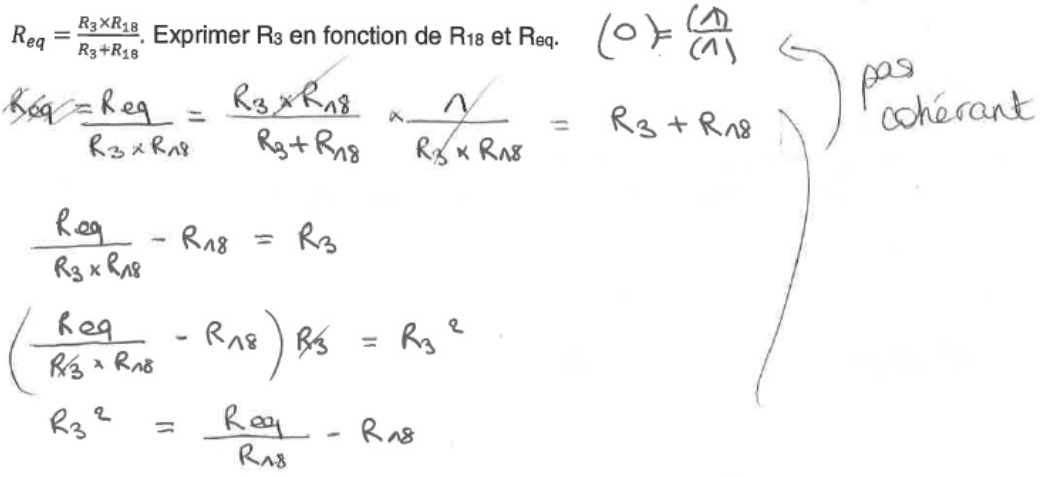


Figure 2. Contrôle sur un résultat incorrect (A106).

Outre les erreurs de transformation des équations qui aboutissent à un résultat erroné, certaines résolutions, bien que s'appuyant sur des transformations correctes, n'aboutissent pas au résultat demandé. C'est par exemple le cas de l'étudiant A109 (Figure 3). Cela montre une démarche de transformation qui semble ne pas être guidée par le résultat que l'on cherche à obtenir.

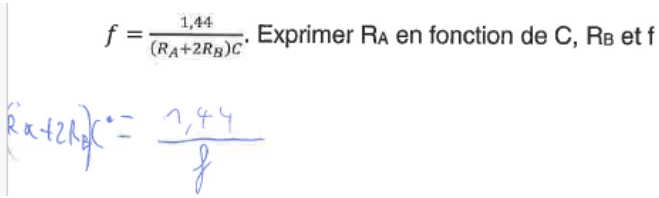


Figure 3. Transformation correcte de l'équation n°2 (A109).

Enfin, une référence explicite au référentiel est fournie (Figure 4) mais, la solution du problème spécifique n'est pas donnée.

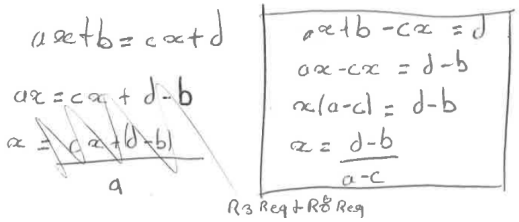


Figure 4. Lien avec le référentiel pour la résolution de l'équation.

Au-delà de l'absence de contrôle, **on constate que les résolutions d'équations (étape 2) sont souvent incorrectes** : le taux de réussite par équation sont les suivants : éq. 1 (66%), éq. 2 (30%), éq. 3 (49%), éq. 4 (31%), éq. 5(14%). On constate tout d'abord l'incidence de la notion de problème connecté ou non, les équations 1 et 3 étant issues de problèmes connectés, les équation 1, 3 et 5 étant issues de problèmes non connectés.

Sur le type de travail attendu, on considère que cette étape 2 est dans le plan sémiotique-instrumental dans la mesure où la résolution d'une équation du premier degré devrait être automatisée à ce niveau d'étude. Les taux de réussite montrent que ce n'est pas le cas : les étudiants ont donc besoin d'expliciter les lois de transformation des expressions algébrique et de passer par la genèse discursive pour résoudre ces équations. Une analyse des erreurs permettra de proposer de nouvelles expérimentations pour guider les étudiants sur cet apprentissage.

Les figures ci-dessous montrent quelques exemples significatifs du travail mathématique fourni par les étudiants. Les deux premiers proviennent du travail d'un même étudiant (A107). La Figure 5 correspond à la résolution correcte de l'équation n°1. On ne voit pas de signe clair de la genèse discursive, mais il serait exagéré à ce stade d'affirmer qu'elle n'est pas présente pour l'étudiant ; l'équation est assez simple et l'étudiant n'a pas forcément vu l'intérêt d'expliciter les mécanismes de résolution mis en œuvre.

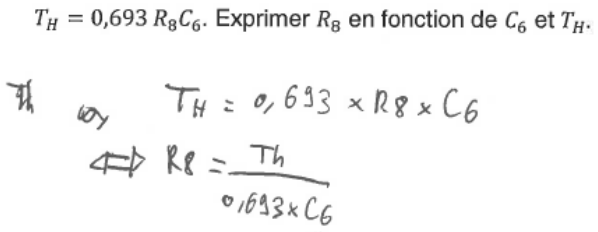


Figure 5. Résolution correcte de l'équation n°1 (A107).

La Figure 6 montre la résolution de l'équation n°3 par le même étudiant A107. Elle est incorrecte. On constate une confusion entre l'inverse et l'opposé qui permet de penser que la résolution s'appuie sur une organisation spatiale sans tenir compte de l'opération mise en jeu. On trouve un exemple de ce type de résolution chez l'étudiant A109 (Figure 7) où la spatialité est exprimée explicitement par des flèches.

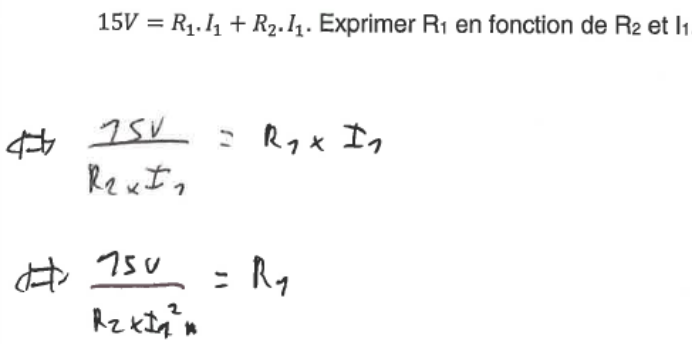


Figure 6. Résolution incorrecte de l'équation n°3 (A107).

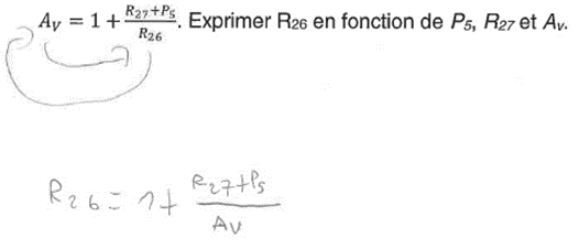


Figure 7. Résolution incorrecte de l'équation n°4 (A109).

Certains étudiants qui semblent expliciter leur démarche ; on pourrait y voir une activation de la genèse discursive. C'est le cas de A106. La Figure 8 montre la résolution de l'équation 1 en montrant la démarche suivie.

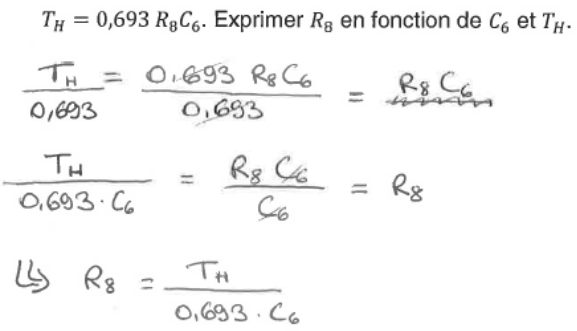


Figure 8. Résolution correcte de l'équation n°1 (A106).

Le même étudiant A106 montre une démarche aussi appliquée pour la résolution de l'équation 2 (Figure 9), mais le passage de $(R_A + 2R_B)C$ du dénominateur vers le numérateur renvoie à nouveau vers une résolution dans le plan sémiotique-instrumental, les lois de transformation des équations n'étant pas appliquées convenablement. On trouve ici un exemple de l'aspect procédural (expression algébrique appréhendée comme un processus) décrite comme une vision arithmétique de l'expression (Sfard, 1991). Cela interroge sur les conceptions (au sens de Tall *et al.*,

1981) des étudiants sur la signification des expressions algébriques et leurs transformations. En rester à une conception procédurale rend la capacité de généralisation de ces transformations plus délicates face à des formes rendues complexes par le nombre de paramètres littéraux, la priorité des opérations et le niveau de parenthésage, ce dernier pouvant être explicite ou masqué par une fraction. Cette analyse est renforcée par la différence des résultats obtenus par les étudiants en fonction du caractère connecté ou non des équations proposées. En comparant le nombre de résultats corrects pour les équations issues de problèmes connectés (équations 1 et 3 ; 85 résultats corrects sur 145 réponses) et ceux pour les équations issues de problèmes non connectés (équations 2 et 4 ; 45 résultats corrects sur 145 réponses), on trouve une différence significative[50].

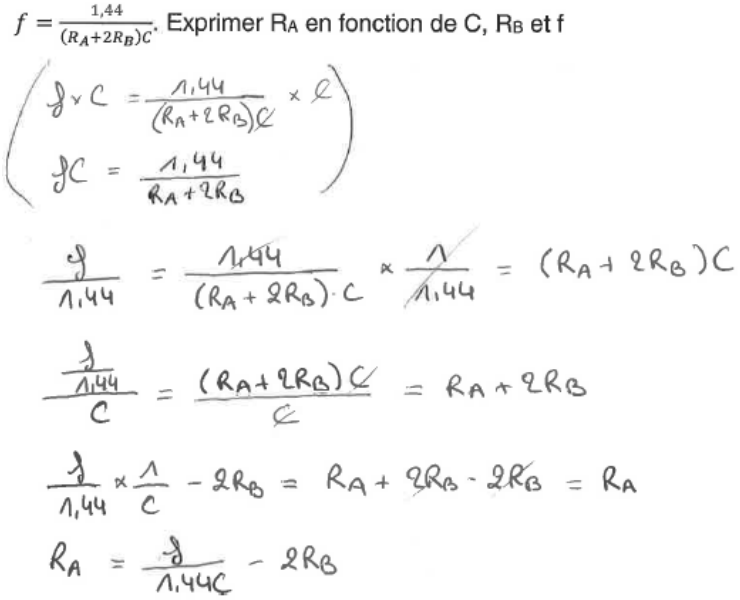


Figure 9. Résolution incorrecte de l'équation n°2 (A106).

On constate que les erreurs rencontrées sont les suivantes : problème de signe, confusion inverse-opposé, problème de simplification de fraction, et problème de réduction au même dénominateur. Ces confusions s'appuient d'une part sur une reconnaissance spatiale des entités manipulées, parfois résumée par le fameux "on passe de l'autre côté" qui invisibilise les différences entre addition et multiplication et d'autre part sur une routinisation incorrecte des transformations des écritures algébriques. Cela montre que les automatismes qui pourraient être attendus à l'université ne sont pas présents et que le travail des étudiants devrait montrer, au-delà des contrôles, des aspects discursifs en explicitant les règles de transformation appliquées à chaque étape.

[50] On ne prend pas en compte l'équation n°5 qui en plus d'être issu d'un problème connecté fait apparaitre deux fois l'inconnue, ce qui la rend plus difficile que les autres. Sa prise en compte aurait rendu la différence encore plus représentative.

Analyse de la séquence de prédiction

Le deuxième constat est une **absence d'effet de la séquence de prédiction du degré d'une équation** sur la réussite de la résolution des équations suivantes. Elle est mesurée d'une part par un taux de réussite qui ne s'améliore pas après le travail sur la prédiction ; en particulier, l'amélioration n'est pas notable pour les équations 3 et 4 entre les groupes ayant effectué le travail sur la prédiction du degré d'une équation avant la résolution de ces équations et ceux l'ayant effectué après. Et d'autre part par une absence quasiment totale de référence à ce travail de prédiction dans les résolutions qui le suivent : les deux seuls cas qui en parlent sont présentés ci-dessus. Il aurait certainement fallu un temps plus long pour en mesurer d'éventuels effets. C'est une piste pour les expérimentations prévues l'année prochaine.

Enfin, un **avis était demandé aux étudiants** sur le travail proposé. 71 étudiants ont donné un avis sur cette activité, tant sur les équations demandées (parties I et III) que sur la prédiction du degré d'une équation (partie II). Sur l'ensemble de ces avis, 36 sont cohérents avec le résultat du travail fourni (par exemple, l'étudiant B102 indique "je n'ai pas réussi à appliquer ce que j'ai appris dans cet exo sur les autres exos" et en effet, son travail ne s'améliore pas après la séquence de prédiction), 12 ne sont pas cohérents (par exemple, l'étudiants B108 indique "Ca m'a bien aidé et ensuite avec votre méthode cela m'a fais vite comprendre" et seul la première équation est résolue correctement) et 23 n'apportent pas d'information sur la cohérence. Si l'on se restreint aux 62 étudiants qui donnent explicitement un avis sur la prédiction du degré, 37 d'entre eux indiquent que cette activité leur a permis de mieux comprendre ou les a aidés ; 11 sur ces 37 indiquent que malgré cette aide ils ne sont pas arrivés à résoudre les équations convenablement. 18 indiquent le contraire et 7 n'en disent rien. Sur les 55 étudiants qui se prononcent, 24 ont un avis cohérent avec le résultat de leur travail, 10 ne sont pas cohérents et 21 n'apportent pas d'information sur la cohérence. L'absence d'effet de la séquence de prédiction relevée ci-dessus est reconnue par la moitié des étudiants et 20% seulement ont un avis incohérent. On peut penser que la piste proposée ci-dessus d'un travail plus long sur le sujet pourrait être bénéfique.

CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES

Est-ce que la capacité à prédire le degré d'une équation est de nature à aider les étudiants à mieux résoudre des équations du premier degré de type de celle donnée ci-dessus ? L'étude présentée apporte quelques éléments de réponse à cette question. Un premier constat est que les étudiants travaillent presque exclusivement dans le plan sémiotique-instrumental, ce qui est mesuré par la quasi absence de contrôle dans le travail. L'analyse des erreurs montrent que la routinisation de la résolution correcte des équations du premier degré n'est pas acquise comme on pourrait s'y attendre à l'entrée à l'université.

Un deuxième constat est l'absence d'effet de la séquence de prédiction du degré d'une équation, mesuré par l'absence d'évolution du taux de réussite après la séquence d'une part et de référence à cette séquence par les étudiants d'autre part. Néanmoins, le fait

que seuls 20% des étudiants ont un avis incohérent sur la qualité de leur travail et que 50% ont un avis cohérent est un aspect positif qui ouvre la porte à prolonger cette expérimentation. En particulier, comme indiqué ci-dessus, le temps a certainement manqué aux étudiants pour s'approprier la notion de prédiction du degré d'une équation. La dimension discursive du travail devrait en être augmentée.

Au-delà de ces résultats et de l'évolution qui peut être envisagée pour cette expérimentation, deux autres pistes sont à l'étude pour la compléter : (i) demander aux étudiants d'identifier explicitement la variable avant de se lancer dans la résolution ; (ii) demander aux étudiants d'expliciter à chaque étape de transformation de l'écriture la règle utilisée (dimension discursive du travail) ; (iii) travailler sur la priorité des opérations, en incluant un travail sur la gestion des parenthèses en passant par la factorisation et le développement ainsi que le lien avec les fractions.

ELEMENTS BIBLIOGRAPHIQUES

Assude Teresa, Coppé Sylvie, Pressiat André. "Tendances de l'enseignement de l'algèbre élémentaire au collège : atomisation et réduction", RDM Hors série, p. 41-62, 2012.

Bednarz, N., Kieran, C., & Lee, L. (1996). Approaches to Algebra. Perspectives for Research and Teaching (Vol. 18). Dordrecht : Kluwer Academic- Publishers.

Coulange, L. (1998). Les problèmes- "concrets" à "mettre en équations" dans l'enseignement. Petit x, Vol. 47, 33-58.

Douady, R. (1986). Jeux de cadres et dialectique outil/objet. Recherches en didactique de mathématiques, 7 (2), 5-32.

Grugeon, B. (1997). Conception et exploitation d'une structure d'analyse multidimensionnelle en algèbre élémentaire. Recherches en didactique des mathématiques, 17 (2), 167-210.

Hoppenot P. Résolution d'équations du premier degré en IUT GEII – ETM de référence des étudiants. Septième Symposium d'Étude sur le Travail Mathématique, ETM7, 27 juin-2 juillet 2022, pages 615-624) Strasbourg (France).

Pilet, J. (2012). Parcours d'enseignement différencié appuyé sur un diagnostic en algèbre élémentaire à la fin de la scolarité obligatoire : modélisation, implémentation dans une plateforme en ligne et évaluation. Thèse de doctorat, 11 décembre 2012.

Pilet, J. (2015). Réguler l'enseignement en algèbre élémentaire par des parcours d'enseignement différencié. RDM, Vol. 35.3, p. 273-312.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. Educational Studies in Mathematics, 22 , 1-36.

Tall David and Vinner Shlomo. (1981). Concept-image et Concept-définition in mathematics with particular reference to limits and continuity. Educational Studies in Mathematics (vol. 12) p.151-169.

ANNEXES

Texte de l'étude

Résolution d'équations

Ce travail n'a pas vocation à évaluer vos connaissances individuellement mais à avoir une vision globale de vos points forts et points faibles. Répondez donc ce qui vous semble correct, sans échanger avec votre voisine ou votre voisin !

Il est important de donner le maximum de justifications à chaque question.

I. Résoudre

$T_H = 0{,}693\ R_8 C_6$. Exprimer R_8 en fonction de C_6 et T_H (eq. 1)

$f = \frac{1{,}44}{(R_A+2R_B)C}$. Exprimer R_A en fonction de C, R_B et f (eq. 2)

$15V = R_1.I_1 + R_2.I_1$. Exprimer R_1 en fonction de R_2 et I_1. (eq. 3)

$A_V = 1 + \frac{R_{27}+P_5}{R_{26}}$. Exprimer R_{26} en fonction de P_5, R_{27} et A_v. (eq. 4)

II. Prédire le degré de l'équation

Notations :

(0) bloc ne contenant pas la variable

(1) bloc contenant la variable à la puissance 1

(2) bloc contenant pas la variable au carré (et à la puissance 1)

$(0) + (1) = (0)$ $(0) + (1) = (1)$

$(0) + (1) + (2) = (0)$ $(0) + (1) = (2)$ $(0) + (1) + (2) = (2)$

$(0) = \frac{(0)}{(1)}$ $(0) = (1) + \frac{(0)}{(1)}$ $(1) = \frac{(0)}{(1)}$

$(0) = (2) + \frac{(0)}{(1)}$ $(1) = (2) + \frac{(0)}{(1)}$ $(2) = (2) + \frac{(0)}{(1)}$

$(1) = \frac{(2)}{(1)}$ $\frac{(1)}{(2)} = (0) + \frac{(2)}{(1)}$ $\frac{(1)}{(2)} = (2) + \frac{(2)}{(1)}$

III. Résoudre[51]

$R_{eq} = \frac{R_3 \times R_{18}}{R_3+R_{18}}$. Exprimer R_3 en fonction de R_{18} et R_{eq}. (eq. 5)

[51] Cette section contenait soit uniquement la dernière équation comme dans l'exemple ci-dessus, soit les trois dernières, afin de mesurer d'éventuels effets de la section II sur la résolution des équation 3 et 4

ÉTUDE DES VARIATIONS DE CONTRATS FORTEMENT DIDACTIQUES DANS DES ETM IDOINES AUTOUR DE « L'AIRE DE BAIGNADE »

Alain Kuzniak[1], Blandine Masselin [1, 2]

[1]Université Paris Cité et LDAR [2]Irem de Rouen

Cette communication s'inscrit dans le cadre de nos recherches sur la réalité du travail mathématique développé par les élèves dans un contexte éducatif et elle approfondit cette question dans deux directions. Tout d'abord, nous montrons comment les différents outils que nous avons introduits dans ces recherches, permettent de rendre compte du travail mathématique potentiel proposé dans les manuels scolaires. Puis, nous revenons sur la question des contrats constructivistes observés lors de sessions de classe élaborées dans le cadre d'une Lesson Studie Adaptée.

Notre étude s'appuie sur une tâche générique portant sur l'optimisation d'une fonction. Nous montrons comment les différentes variations, introduites par les professeurs, influent sur le travail mathématique prévu ou mis en place.

INTRODUCTION

Dans Kuzniak et Masselin (2024), nous avons proposé une catégorisation des contrats fortement didactiques réalisée à partir de la tâche emblématique du lièvre et de la tortue. Cette tâche propose une simulation d'une expérience aléatoire et elle a fait l'objet d'une étude approfondie dans la thèse que lui a consacré Masselin (2020). Nous avons développé différents outils et une méthodologie spécifiques pour décrire les itinéraires et chemins qui apparaissent quand un enseignant (ou un collectif d'enseignants) prévoit et met en place une situation didactique basée sur une tâche riche. Grâce à un codage des itinéraires prévus et des chemins réalisés lors de la mise en œuvre de ces situations, nous avons pu spécifier le type de travail mathématique potentiel et effectif mis en jeu. De cette façon, nous avons pu dégager une classification des contrats fortement didactiques qui s'appuie sur la circulation du travail dans le diagramme des ETM.

QUESTION DE RECHERCHE ET METHODOLOGIE ASSOCIEE

Dans cette communication, nous nous intéressons plus particulièrement aux possibles variations des contrats didactiques potentiels proposés par les manuels et aux contrats didactiques effectifs qui apparaissent lors des Lesson Studies Adaptées.

Nous avons utilisé un nouveau corpus de tâches basées sur une tâche générique initiale commune. Cette nouvelle étude utilise la méthodologie et les outils théoriques introduits lors de notre étude initiale. Nous reprenons notamment, avec quelques adaptations, le codage des différentes phases d'une situation didactique.

La tâche générique que nous avons utilisée existe sous une grande variété d'énoncés dans les manuels français de plusieurs niveaux d'enseignement allant du collège au

lycée. Elle porte sur l'optimisation d'une « aire de baignade » et sa forme générique est la suivante :

L'aire de baignade

Pour délimiter une aire de baignade, on dispose d'un cordon flottant d'une longueur L.

Quelle est l'aire maximale qu'on peut délimiter quand on utilise toute la ligne d'eau ?

Le premier corpus que nous avons étudié est composé de quatre manuels scolaires du collège et du lycée, de deux fiches « situations en bref » proposé par le groupe Activités de l'IREM de Rouen et d'une fiche destinée aux enseignants et proposée sur le site de l'académie d'Orléans. Dans tous les cas, la forme de l'aire de baignade est précisée : il s'agit d'un rectangle.

Le deuxième corpus s'appuie sur le compte-rendu d'un atelier (Masselin & Guérin, 2025) proposé lors d'un colloque sur la modélisation. Cet atelier est organisé sous la forme d'une Lesson Studie adaptée (Masselin et al, 2023) et il comporte trois étapes destinées à préparer puis à mettre en œuvre une séance de classe. Le germe de la situation (Masselin et Artigue, 2023) utilisé dans cette LSa est une adaptation de la tâche générique : la forme de l'aire de baignade n'est pas précisée et une contrainte sur le nombre de nageurs est introduite.

Dans cette communication, nous exploiterons essentiellement les données de deux manuels et celles portant sur le travail des groupes d'élèves lors de la mise en œuvre de la LSa dans une classe de seconde. De cette façon, nous aurons accès à deux types de contrats : le contrat potentiel et le contrat effectif (Kuzniak et Masselin, 2023).

APPUI THEORIQUE ET METHODOLOGIQUE

Dans cette recherche, nous avons utilisé des éléments de la théorie des Espaces de Travail Mathématiques (Kuzniak *et al.* 2016, Kuzniak *et al.* 2022) pour réaliser une première analyse épistémologique, inspirée de la grille spécifique déployée par Masselin (2020). Cette grille comporte trois axes associés aux dimensions et genèses (sémiotique, instrumentale et discursive) du diagramme des ETM. Un quatrième axe porte sur la question relative à la modélisation proposée dans la LSA. Il permet de distinguer les modélisations horizontale et verticale et son étude est présentée dans Yvain-Prébiski et Masselin (2023).

Une analyse épistémologique approfondie permet ensuite d'établir et de comparer des itinéraires et chemins suggérés ou réalisés à partir d'énoncés variés de l'aire de baignade dans des ETM idoines, potentiels ou effectifs (Henriquez *et al.* 2022). Le codage (Tableau 1) développé par Kuzniak et Masselin (2023) sert d'appui pour caractériser différents contrats didactiques potentiel ou effectif.

Professeur	D Dévolution	I Institutionalisation	Institutionalisé mais pas sur le contenu
Eleve	A Action	R Resultat	F Formulation Communication
Plan ETM Activé	[Sem-Ins]	[Ins-Dis]	[Sem-Dis]
Dimension privilégiée	Semiotique	Instrumentale	Discursive

Tableau 1 : Codage des itinéraires et des chemins.

Méthodologie pour l'étude des contrats potentiels à l'œuvre dans les manuels et les fiches

Dans cette communication, nous présentons l'étude de deux manuels (Déclic 2nde et Transmath 4ème) choisis dans le corpus que nous avons utilisé. Notre analyse des différents énoncés suit la méthodologie par analyse ascendante et descendante (Kuzniak et Nechache 2021, Henriquez *et al.* 2023) qui a été initialement développée pour l'analyse du travail mathématique personnel des élèves. Dans notre cas, elle permet de repérer les spécificités du travail mathématique attendu par les auteurs du manuel en relation avec les objectifs d'enseignement sous-jacents.

Nous identifions aussi les intentions des auteurs de ces énoncés lors de deux phases : la dévolution et l'institutionnalisation. Ces deux phases sont essentielles pour comprendre le rythme et la coloration du travail proposé. Nous nous demandons comment elles sont suggérées et ce qu'elles favorisent comme circulation du travail mathématique, afin de mettre en lumière des éléments du contrat didactique potentiel (Kuzniak et Masselin, 2023).

Méthodologie pour l'étude des données issues de la Lesson Study

Nous étudions le contrat didactique effectif observé lors de la Lesson Study Adaptée grâce à une description précise des chemins empruntés dans l'ETM idoine effectif. Dans cette étude, les élèves ont été divisés en huit groupes et nous présentons ici le travail mathématique de trois de ces groupes.

En étudiant la circulation du travail mathématique à travers les différentes dimensions de l'ETM et les plans privilégiés, nous souhaitons enrichir et préciser notre catégorisation de contrats fortement didactiques.

ÉTUDE DES ETM IDOINES PROPOSES PAR LES MANUELS ET CONTRATS FORTEMENT DIDACTIQUE POTENTIEL

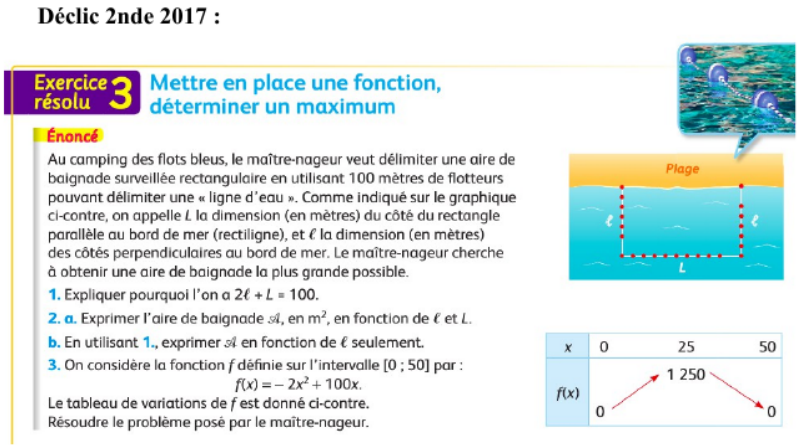
Une première recherche systématique, nous a initialement permis de trouver quatre manuels qui proposaient l'aire de baignade. Tous ces manuels ont choisi d'indiquer la forme de l'aire de baignade : un rectangle dont il faut trouver l'aire maximale. Nous n'avons pas retenu le manuel qui donnait la tâche complètement ouverte sans aucune piste sur sa résolution. Cette façon de faire se rapproche de celle utilisée dans la Lesson Study et son étude passe nécessairement par une observation de la séance mise en œuvre.

Nous avons organisé nos observations dans des tableaux comportant cinq colonnes :

Objectif global de la tâche	Dévolution initiale	Analyse descendante	Institutionnalisation	Analyse Ascendante

La première colonne permet d'identifier le but de l'exercice. Deux colonnes précisent la forme des dévolutions et l'existence ou non de l'institutionnalisation. L'analyse descendante suit les différentes sous-tâches proposées dans l'exercice et l'analyse ascendante se concentre sur la circulation du travail mathématique.

Déclic 2nde 2017 :



Exercice résolu 3 Mettre en place une fonction, déterminer un maximum

Énoncé

Au camping des flots bleus, le maître-nageur veut délimiter une aire de baignade surveillée rectangulaire en utilisant 100 mètres de flotteurs pouvant délimiter une « ligne d'eau ». Comme indiqué sur le graphique ci-contre, on appelle L la dimension (en mètres) du côté du rectangle parallèle au bord de mer (rectiligne), et ℓ la dimension (en mètres) des côtés perpendiculaires au bord de mer. Le maître-nageur cherche à obtenir une aire de baignade la plus grande possible.

1. Expliquer pourquoi l'on a $2\ell + L = 100$.
2. a. Exprimer l'aire de baignade $\mathcal{A}$, en m², en fonction de ℓ et L.
   b. En utilisant 1., exprimer $\mathcal{A}$ en fonction de ℓ seulement.
3. On considère la fonction f définie sur l'intervalle [0 ; 50] par : $f(x) = -2x^2 + 100x$.
   Le tableau de variations de f est donné ci-contre.
   Résoudre le problème posé par le maître-nageur.

Plage

x	0	25	50
$f(x)$	0	1 250	0

Fig. 1. Le manuel Declic Seconde 2017 (Tableau d'analyse dans l'annexe 1).

Dans ce manuel destiné à des élèves de seconde, l'énoncé contient une photo et il faut noter l'abondance des registres, tant graphiques que symboliques, utilisés. La dévolution initiale est basée sur une articulation entre un diagramme-image et des symboles algébriques. Elle est entièrement placée dans la genèse sémiotique.

L'analyse descendante fait apparaître quatre sous-tâches qui ne proposent, à chaque fois, qu'une seule action des élèves. Chacune de ces sous-tâches repose sur des outils sémiotiques

L'institutionnalisation est en germe dans la dernière sous-tâche qui, de manière implicite, propose d'interpréter un tableau de variation pour trouver le maximum.

ST4. On considère la fonction f définie sur l'intervalle [0;50] par :

$$f(x) = -2x^2 + 100x$$

Le tableau de variation est donné ci-contre

Résoudre le problème posé par le maître-nageur.

La fonction *f* correspond à la fonction qui est demandée en 2b (ST3). Elle permet à l'élève de vérifier son résultat. Cette dernière question suppose la maîtrise du tableau de variation utilisé comme un instrument pour fournir la réponse au problème.

L'analyse ascendante fait apparaître la circulation globale suivante :

[Sem] → [(Ref)→ [Sem]] → [Sem] → [**Sem**-Dis]

Le travail potentiel est ainsi confiné dans le plan [Sem-Dis] et privilégie la dimension sémiotique. Le paradigme de l'analyse est de type A2 [Alg] et le travail d l'élève semble réduit celui d'un tâcheron mis à part dans la dernière phase qui mobilise tous les registres et peut s'avérer très complexe pour un élève non familier avec ce type d'exercice.

En utilisant notre système de codage, nous obtenons :

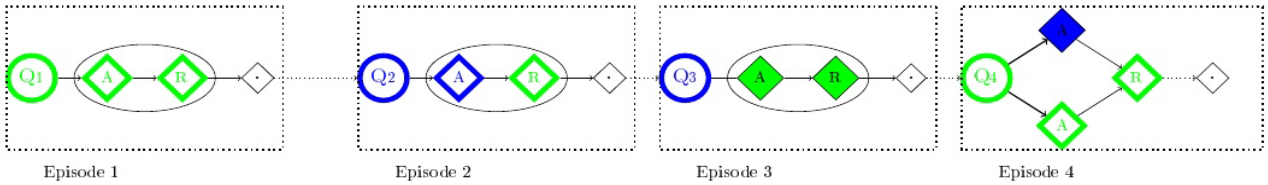


Fig. 2. Circulation du travail prévu dans le manuel Declic.

Ce qui correspond à un type de contrat maïeutique basée essentiellement sur l'ostension.

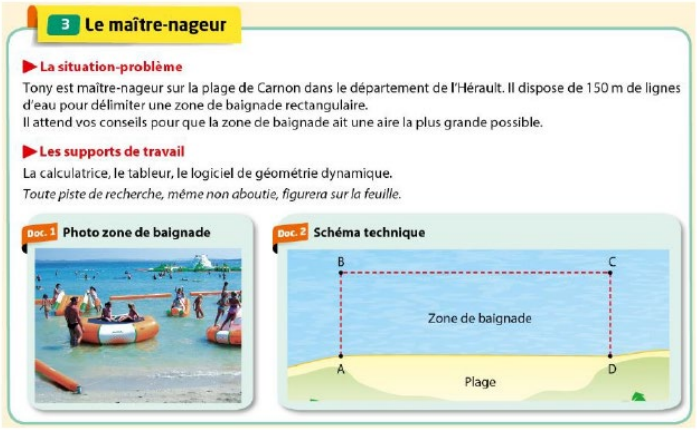


Fig. 3. Le manuel Transmath Quatrième (Tableau d'analyse dans l'annexe 2).

Dans ce manuel, il s'agit encore d'optimiser l'aire d'un rectangle mais la dévolution est ouverte :

Il attend vos conseils pour que la zone de baignade ait une aire la plus grande possible.

Pour guider le travail un schéma technique est fourni et plusieurs artefacts sont mis à la disposition de l'élève (tableur, calculatrice, logiciel de géométrie dynamique). Il y a donc un épaississement de la genèse instrumentale (Masselin, 2020). La dévolution favorise l'usage d'un diagramme mais n'oriente pas explicitement le travail dans un plan de l'ETM déterminé. L'analyse descendante est assez complexe car elle dépend de chaque instrument, le logiciel de géométrie dynamique est celui qui offre le plus de types de représentation en rendant possible la construction et l'estimation des aires des rectangles. Dans tous les cas, la solution du problème sera obtenue par un travail d'ajustement et de tâtonnement plus ou moins maîtrisé par l'élève.

L'analyse ascendante fait apparaître une circulation globale qui privilégie un travail confiné dans le plan [Sem-Ins] avec un épaississement de la dimension instrumentale.

[Ins] -->[Ins]→ [Sem-Ins]

L'élève doit faire un travail d'exploration qui débouche sur un type de preuve mécanique (Richard *et al.*, 2016) qui suppose une maîtrise des outils et instruments technologiques.

Le contrat didactique proposé est ici de type constructiviste basé sur des rétroactions avec un milieu en relation avec des instruments de calcul et de constructions. Comme dans le cas précédent, le plan semiotico-instrumental donne la coloration principale du contrat mais, cette fois, il est davantage centrée sur la dimension instrumentale que sur la dimension sémiotique. De ce fait, il n'est pas exclu que le contrat effectif soit plus orienté par le plan [Ins-Dis] comme dans les contrats constructivistes de type Brousseau. Cette orientation dépendra du professeur et notamment du type d'institutionnalisation qui n'est pas visible ici.

Dans ces deux cas d'analyse de manuel, pour aller plus loin dans l'étude il faudrait et s'assurer du travail effectif qui permet notamment de voir la coloration réelle du travail. Elle permet aussi de s'assurer que les résultats prévus par le manuel sont bien obtenus par les élèves ou d'observer les blocages rencontrés et les contrôles opérés.

ÉTUDE DE L'ETM IDOINE EFFECTIF MIS EN ŒUVRE DANS UNE LSA

L'étude de la Lsa proposée lors du colloque CII Modéliser nous a permis d'analyser un contrat didactique effectif et de revenir sur le rôle des rétroactions et du professeur dans les contrats constructivistes.

Comme nous l'avons indiqué, cette étude s'appuie sur le compte rendu très détaillé de la LSA réalisée lors du colloque CII sur la modélisation (Masselin et Guérin, à paraître). Le collectif d'enseignants, composé de dix professeurs, a utilisé le germe de situation suivant :

Les moniteurs d'une colonie de vacances veulent emmener 120 enfants se baigner ensemble dans un lac. Ils disposent d'une ligne d'eau de 25 m de long pour délimiter une zone de baignade.

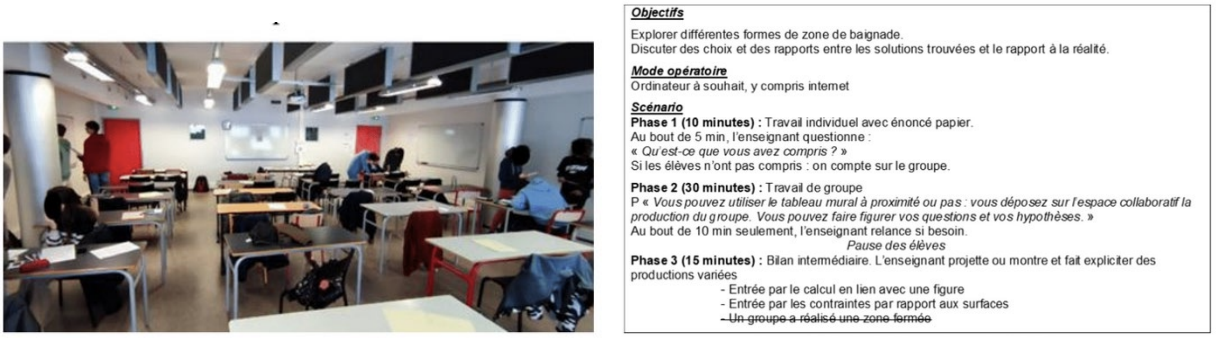
Peuvent-ils se conformer à la législation ?

Article D1332-10 transféré du décret n°2008-990 du 18 septembre 2008-art. 1

« Le nombre maximum de baigneurs présents dans l'établissement ne doit pas dépasser 3 personnes par 2 mètres carrés pour les zones de baignade en plein air et 1 personne par mètre carré pour les zones de baignade couvertes. »

Par rapport à la tâche générique, la principale transformation porte sur l'ajout d'une condition d'occupation de l'aire de baignade fixée par la loi. Cette contrainte est judicieusement choisie pour nécessiter l'introduction d'autres configurations géométriques que les rectangles. En effet, il est impossible de trouver un rectangle (même carré) qui convienne. La situation proposée se transforme aussi en situation de modélisation qui était le thème central du colloque.

Le scénario prévu comporte trois phases : une phase initiale de travail individuel (10 min) puis une deuxième phase par groupes (30 min) de quatre élèves. Les groupes ont à produire un bilan qu'ils peuvent écrire sur un tableau mural de la salle de classe. En phase 3, l'enseignant fait une mise en commun (15 min) de certaines productions de groupes



Objectifs

Explorer différentes formes de zone de baignade.
Discuter des choix et des rapports entre les solutions trouvées et le rapport à la réalité.

Mode opératoire

Ordinateur à souhait, y compris internet

Scénario

Phase 1 (10 minutes) : Travail individuel avec énoncé papier.
Au bout de 5 min, l'enseignant questionne :
« *Qu'est-ce que vous avez compris ?* »
Si les élèves n'ont pas compris : on compte sur le groupe.

Phase 2 (30 minutes) : Travail de groupe
P « *Vous pouvez utiliser le tableau mural à proximité ou pas : vous déposez sur l'espace collaboratif la production du groupe. Vous pouvez faire figurer vos questions et vos hypothèses.* »
Au bout de 10 min seulement, l'enseignant relance si besoin.
Pause des élèves

Phase 3 (15 minutes) : Bilan intermédiaire. L'enseignant projette ou montre et fait expliciter des productions variées
- Entrée par le calcul en lien avec une figure
- Entrée par les contraintes par rapport aux surfaces
- ~~Un groupe a réalisé une zone fermée~~

Fig. 4. Salle de classe et scénario préparé collectivement (séance en classe de seconde).

Lors de la phase de dévolution, l'enseignant-expérimentateur n'induit pas de travail dans un plan spécifique de l'ETM et ne propose pas de modèles pour l'aire de baignade : différentes formes d'aire de baignade sont investies par les groupes d'élèves (carré, rectangle, circulaire, semi-circulaire). La modélisation est vue d'un point de vue purement mathématique (mathématisation verticale) et peu de groupes s'interrogent sur des éléments de mathématisation horizontale en relation avec la réalité de la situation.

Pour l'analyse des travaux de chaque groupe, nous listons les différentes sous-tâches que les élèves se sont données lors de cette session. A chacune de sous-tâches correspond un épisode lors de l'analyse descendante.

ST-C : Étude d'une zone carrée avec deux variantes avec un carré fermé f (4 cotés) ou ouvert (3 côtés)

ST-R : Étude d'une zone de baignade rectangulaire avec les deux variantes fermées ou ouvertes

ST-SC : Étude d'une zone de baignade semi-circulaire avec les deux variantes fermées ou ouvertes.

ST-L : Recherche de l'aire minimale nécessaire pour respecter la loi.

Le tableau suivant donne un récapitulatif des groupes dont le travail a pu être observé.

Groupe	**1**	**2**	**3**	**4**	**6**	**…**
Types de zones de baignade étudiées	Carrés fermé puis ouvert Rectangle Semi-circulaire	Circulaire Semi-circulaire	Semi-circulaire	Carré ouvert Rectangles	Circulaire Carré Rectangles	
Nombre de ST	4	3	3	2	3	

Tableau 2. Types des zones de baignade étudiées.

Dans notre article (Kuzniak et Masselin, 2024), nous avons identifié deux types de contrats constructivistes effectifs. Le premier est monitoré par le professeur qui par ses interactions avec les différents groupes fait converger le travail des élèves vers une sous-tâche commune et un travail mathématique du même type. Le second (contrat constructiviste de Brousseau) est piloté par les retroactions du milieu. Lorsque ce milieu est matériel, le travail mathématique peut se situer dans le plan [Ins-Dis] avec un type de preuve expérimentale ou bien dans le plan [Sem-Ins] avec une preuve mécanique. Le choix du milieu est essentiel pour orienter le travail des élèves. Un autre des enjeux principaux de ce type de contrats est la phase d'institutionnalisation qui est souvent problématique voire inexistante.

Dans le cadre de cette étude, nous allons d'abord considérer le contrat didactique qui est apparu pendant le travail de groupe puis nous étudierons l'institutionnalisation qui a eu lieu. Pour cette étude, nous ne présentons que trois groupes sur les six dont nous disposons d'une observation détaillée.

Groupe 1. Quatre épisodes sont associés aux sous-tâches suivantes

ST1-Cf –> ST2-Co –> ST3-Ro –> ST4 –>SCo

Voici le codage coloré du travail effectué par les élèves.

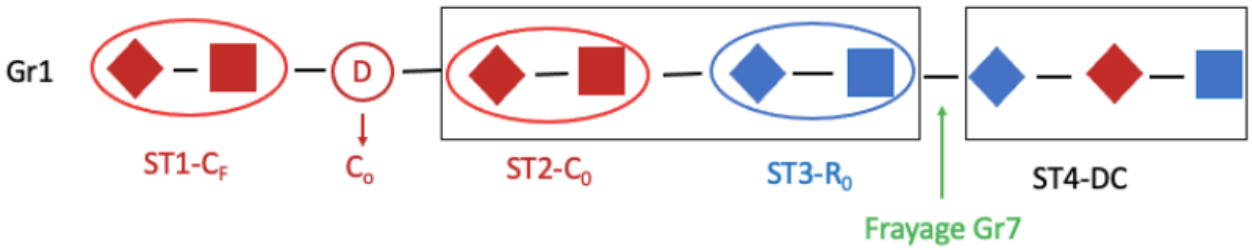


Fig. 5. Circulation du travail dans le Groupe 1.

On notera une seule intervention du professeur entre ST1 et ST2, où ils suggèrent aux élèves d'ouvrir le carré à cause de la plage. Par ailleurs, entre les épisodes 3 et 4, les élèves ont vu sur le grand tableau mural, la production du groupe 7 basé sur l'étude du demi-cercle, ce qui a réorienté par frayage leur travail dans le dernier épisode.

Le travail produit par ces étudiants est particulièrement riche puisqu'il explore toutes les formes prévues a priori et produit à chaque fois des résultats corrects (excepté une division par 2) et suit les attentes en termes de maîtrise et d'usage des savoirs à ce niveau. Nous parlerons ici de travail efficace et complet.

Groupe 2

Le groupe 2 se scinde en deux sous-groupes qui se répartissent les tâches l'une en relation avec la loi sur les baignades, l'autre avec la forme de l'aire de baignade. Les élèves trouvent bien l'aire minimale (80 m²). Par contre le résultat final portant sur l'aire du disque est faux. On constate une nouvelle fois un travail très riche dans les différents plans de l'ETM avec souvent un travail restreint dans une dimension pour le sous-groupe 2 et aussi quelques blocages suivis par des rebonds en changeant de genèse.

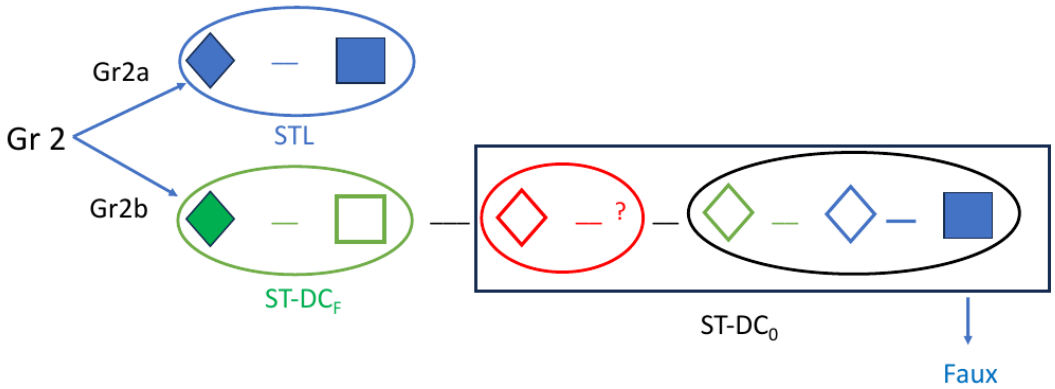


Fig. 6. Circulation du travail dans le Groupe 2.

Le travail apparaît efficace pour le binôme qui est resté dans le plan [Sem-Dis] et improductif pour le second. Dans ce cas, le travail est complet avec des rebonds entre les dimensions de l'ETM pour surmonter certaines difficultés.

Groupe 3

Ce groupe a rencontré de nombreuses difficultés puisqu'il ne parvient pas à trouver des résultats malgré une régulation de l'enseignante. Le résultat qu'il donne sur la tache en relation avec la loi vient de leur observation du tableau du groupe 4 dont il recopie le résultat

Fig. 7. Circulation du travail dans le Groupe 3.

Leur travail reste confiné à chaque fois dans une seule dimension avec des tentatives pour donner des résultats qui n'aboutissent pas.

Nous ne détaillons pas ici les travaux des autres groupes et nous concluons notre analyse par une interrogation sur le type de contrat constructiviste mis en place. Contrairement aux deux contrats que nous avons évoqués plus haut, le travail n'est régulé ni par le milieu, ni par le professeur. De fait, la régulation opérée est interne (à chaque groupe) et repose entièrement sur le plan [Sem-Dis] et plus particulièrement sur la validité des preuves produites. Les risques de blocage sont importants mais nous avons pu observer aussi des rebonds effectués par les élèves grâce à un changement d'épisodes ou de plan de travail.

En conclusion, il s'agit d'un contrat constructiviste où les élèves sont autonomes et doivent produire des preuves basées sur une démonstration mettant en œuvre leurs savoirs et connaissances. Il n'y a pas de validation externe avec des rétroactions avec un milieu matériel ou le professeur. On a pu noter l'importance du frayage ou de la copie favorisé par le fait que chaque travaillait sur un tableau visible de tous. Dans ce cas, la situation d'institutionnalisation va être un phase essentielle pour mettre en place une validation qui fera passer le travail des élèves d'un travail privé et autonome à un travail public contrôlé par la classe et le professeur.

Situation d'institutionnalisation

Lors de la phase d'institutionnalisation globale, l'enseignant-expérimentateur a fait commenter la production de chaque groupe par un de ces membres. Le tableau mural est le support de la production du groupe.

Deux questions ont guidé notre analyse :

> Comment s'organise la convergence ou divergence entre les productions de groupes ? Et comment le professeur parvient-il à relier ce qu'il avait prévu d'institutionnaliser et ce qui apparaît dans les productions de groupes ?

Les présentations des groupes sont regroupées en fonction des types de surfaces choisies : zone semi-circulaire (4 groupes), zone carrée (1 groupe) et zone rectangulaire (3 groupes). Tous les groupes exposent leur travail, tandis que les autres observent de leur place les différents tableaux. Durant les présentations, l'enseignant questionne le rapporteur et se déplace de tableaux en tableaux tandis que le reste de la classe reste assis à sa place. Le dernier rapporteur de groupe montre à la classe un fichier GeoGebra. Son groupe a élaboré un fichier en y insérant une inéquation du second degré. Ce groupe a cherché ainsi à optimiser l'aire des rectangles. Il conclut devant la classe qu'il n'est pas possible de respecter la loi car la courbe de la parabole est toujours située en dessous de la droite d'équation y=80, 80 m^2 étant l'aire minimale à atteindre pour respecter la loi.

Il n'y a donc, a proprement parlé, semble-t-il par vraiment d'institutionnalisation globale finale mais une évaluation de chaque production. Chaque groupe doit ainsi s'approprier et, à sa manière, les attentes du professeur.

Concernant l'institutionnalisation globale, l'enseignant-expérimentateur déplore ne pas avoir eu le temps de plus parler de modélisation.

> Nadia m'avait proposé de réunir les élèves au centre de la classe pour faire le bilan, je n'ai pas suivi son conseil, mais rétrospectivement, je pense que c'était une bonne idée, à tester, afin de rendre plus actifs les élèves lors du bilan. J'avais prévu après la présentation des travaux par les élèves de faire un bilan au tableau, mais je n'ai pas eu le temps. J'aurais voulu (…) insister sur les hypothèses de modélisation : certains groupes les ont bien mises en évidence, d'autres non, et aucun groupe n'y est revenu à la fin pour commenter son modèle.
>
> Par exemple, pour l'aire rectangulaire, il y a eu une approche algébrique (maximisation d'un polynôme du second degré), numérique (utilisation de Geogebra pour le même polynôme), et un argument géométrique confus mais que l'on peut rendre rigoureux. Je retiendrai quelques points forts comme l'importance :
>
> - du vécu pour exclure certaines configurations (ceux ayant participé à une colonie pourraient reproduire la figure observée en colonie, vent sur les bouées etc.)
> - du retour sur la réalité (par exemple : expérience pour trancher entre demi-cercle infaisable ou non ? Reconnaître que ce n'est pas une question mathématique).

CONCLUSION

Cette courte étude, qui reste à compléter, nous a permis de développer une méthodologie spécifique d'étude des manuels basée sur la théorie des ETM. L'analyse descendante peut s'appuyer sur les découpages en sous-tâches prévus par le manuel. Tout comme l'analyse ascendante, elle suppose une analyse préalable des savoirs (contenus et méthodes) supposés connus à ce niveau de la scolarité. Comme toute étude de manuel, sa portée reste limitée et elle ne donne qu'une connaissance de l'ETM idoine potentiel. De plus, cet ETM s'appuie sur une estimation a priori de l'ETM

personnel des élèves : celui-ci est supposé générique et indépendant des classes dans lesquelles les tâches vont être proposées.

La seconde étude se concentre sur un ETM idoine effectif et sur le contrat didactique effectif qui est apparu. Dans Kuzniak et Masselin (2024), nous avons montré que ce contrat effectif était profondément différent du contrat potentiel et ceci en grande partie à cause de la gestion réelle du travail mathématique des élèves par les professeurs et également par l'absence d'un travail de préparation approfondi sur l'institutionnalisation. Celle-ci devant faire, selon nous, l'objet d'une séance spécifique pour éviter les effets d'improvisation et d'inachèvement qui caractérisent trop souvent cette phase essentielle de l'enseignement des mathématiques dans les contrats de nature constructiviste. Notre étude a dégagé une nouvelle forme de contrat constructiviste. Celui-ci n'est pas monitoré par des rétroactions du professeur et il n'est pas non plus régulé par les rétroactions du professeur. Les élèves doivent gérer de manière autonome leur travail mathématique en s'appuyant sur leurs savoirs et connaissances antérieures.

REFERENCES

Brousseau, G. (1997b). *Théorie des situations didactiques, le cours de Montréal.* https://guy-brousseau.com/ 1694/la-theorie-des-situations-didactiques-le-cours-de-montreal-1997/

Henriquez, C., Kuzniak, A., & Masselin, B. (2022). The idoine or suitable MWS as an essential transitional stage between personal and reference mathematical work. In A. Kuzniak, E. Montoya-Delgadillo, & P.R. Richard (Eds.), *Mathematical work in educational context: The perspective of the theory of mathematical working spaces* (pp. 121-146). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-90850-8_6

Kuzniak, A. & Masselin, B. (2024). *Strongly didactic contracts and mathematical work. Educational Studies in Mathematics*. Educational Studies in Mathematics, https://doi.org/10.1007/s10649-023-10286-1

Kuzniak, A., Tanguay, D., & Elia, I. (2016). Mathematical working spaces in schooling: An introduction. *ZDM-Mathematics Education,* 48(6), 721-737. https://doi.org/10.1007/s11858-016-0812-x

Kuzniak, A., Montoya Delgadillo, E., & Richard, P. R. (2022). *Mathematical work in educational context: the perspective of the theory of mathematical working spaces. Springer.* https://doi.org/10.1007/ 978-3-030-90850-8

Masselin, B. (2020). Dynamique du travail mathématique en classe entre un enseignant et des groupes d'élèves sur la simulation en probabilités : Une étude de cas. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives,* 25, 49-88. https://doi.org/10.4000/adsc.529

Masselin, B., & Artigue, M. (2024). How the situation seeds used in LSa support the collaborative work of facilitators and future facilitators. In P. Drijvers, C. Csapodi, H. Palmér, K. Gosztonyi, & E. Kónya (Eds.), *Proceedings of the Thirteenth Congress of*

the European Society for Research in Mathematics Education (CERME13) (pp. 4996-5003).

Masselin, B., Hartmann, F., & Artigue, M. (2023). Étude du rôle des facilitateurs dans un dispositif de Lesson Study adapté [Study of the role of facilitators in an adapted Lesson Study framework]. Annales de Didactique et de Sciences cognitives, Spécial 1, 213-260. https://doi.org/10.4000/adsc.1816

Masselin, B., & Guérin, M. (2025). Modélisation avec un protocole relevant des Lesson Studies, Pré-actes du colloque « Rencontres autour de la compétence Modéliser » de la CII Didactique, Poitiers, 25-26 mai 2023.

Richard, P.R., Oller, A.M., & Meavilla, V. (2016). The concept of proof in the light of mathematical work. *ZDM Mathematics Education, 48*(6), 843-859.

ANNEXE 1 : DECLIC 2E

Objectif global de la tâche	Dévolution initiale	Analyse descendante	Institutionnalisation	Analyse Ascendante
Optimisation (aire la plus grande possible d'un rectangle)	Basée sur une articulation entre un diagramme-image et des symboles algébriques	4 sous-tâches ST1-- 1 Outils et instruments sémiotiques. Travail de conversion entre deux registres (une seule action) [Sem] ST2-- 2-a Outil et instruments théorique (aire du rectangle) et sémiotique Travail dans le registre sémiotique (Ref)-→ [Sem] ST3-- 2-b Outils instruments sémiotiques Résolution d'un système d'équation par substitution. Travail algébrique de conversion de registre (une seule action, la substitution) Travail dans [Sem] ST4 Outils et instruments sémiotiques : tableau de variation, symboles algébriques et symboles fonctionnel Travail dans [**Sem**-Dis] avec conversion entre registres et travail important de visualisation articulé sur le tableau de variation (plusieurs actions) qui doit être un instrument sémiotique [**Sem**-Dis]	But de la question 3 (sous-tâche 4) Interprétation des données du tableau des variations Lecture des variations pour trouver le maximum	Circulation globale [Sem] -->[(Ref)→ [Sem]] --> [Sem] → [**Sem**-Dis] Travail confiné dans le plan [Sem-Dis] en privilégiant la dimension sémiotique Le paradigme de l'analyse est de type [Alg] L'élève est réduit à un travail de tâcheron mais la dernière question suppose une maîtrise de l'instrument tableau de variation

ANNEXE 2 : TRANSMATH 4

Objectif global de la tâche	Dévolution initiale	Analyse descendante			Institutionna-lisation	Analyse Ascendante
Optimisation (aire la plus grande possible d'un rectangle)	Ouverte basée sur une image, un schéma et la donnée d'une série d'artefacts (Tableur, calculatrice, GeoGebra)	Penser à différents scénarios (en quatrième)			Dépend de la technologie utilisée A faire par le professeur	Circulation globale [Ins] -->[(Ins→ [Sem-Ins]
		Avec GeoGebra	Avec une Calcu-latrice	Avec un tableur		Travail confiné dans le plan [Sem-**Ins**] en privilégiant la dimension instrumentale Le paradigme de l'analyse est de type A1 (AG) L'élève a un travail d'exploration qui débouche sur un type de preuve mécanique Travail de technicien maîtrise des outils et instruments technologiques
		Episode 1 Construction du rectangle Outils et instruments technologique [Ins] Figures géométrique Episode 2 Utilisation de Aire Outils et instruments technologique [Ins] Nombres Episode 3 Faire glisser un point et articuler les registres numériques et figuraux [Sem-Ins]				

Febrero, 2026

El Octavo Simposio sobre el Estudio del Trabajo Matemático (ETM8) se celebró en Castro Urdiales (España) del 21 al 25 de octubre de 2024. Reunió a una amplia comunidad internacional de investigadores interesados en el estudio del trabajo matemático y sus implicaciones en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

Los simposios ETM son encuentros internacionales organizados en forma de grupos de trabajo temáticos basados en las contribuciones de los participantes. La dinámica establecida en el simposio favorece intercambios entre los participantes y contribuye a crear una comunidad de investigadores alrededor de intereses comunes. Además, los encuentros se desarrollan en un marco trilingüe dentro del cual las contribuciones se pueden presentar en cualquiera de las tres lenguas (español, francés e inglés) y deben ir acompañadas de material visual elaborado en una de las otras lenguas.

El ETM8 se organizó en torno a los siguientes cuatro temas:

- Tema 1. Perspectivas y enfoques teóricos sobre el trabajo matemático.
- Tema 2. Estudio de los signos, las herramientas y el discurso, y de la evolución dinámica de sus interacciones mutuas en el trabajo matemático.
- Tema 3. Génesis y desarrollo del trabajo matemático: papel del profesor, del formador, del grupo y de las interacciones.
- Tema 4. El papel de las tareas y situaciones didácticas en la formación del trabajo matemático.

Cada tema se desarrolló por un grupo temático, a lo largo de cinco días.

Instituto de Matemática Interdisciplinar
UNIVERSIDAD COMPLUTENSE MADRID
UNIVERSIDAD NEBRIJA
AYUNTAMIENTO DE CASTRO-URDIALES
UC Universidad de Cantabria
CIEM Centro Internacional de Encuentros Matemáticos
ISBN 978-84-19897-40-4
0 €
www.editorial.unican.es
THEMA: YPM, PB, UYQ, GT, 4C